

Analiz 1: Temeller

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 23 Eylül 2026

İçindekiler

Giriş	11
1 Önergeler Mantığı	13
1.1 Önergeler	13
1.2 Bileşik Önergeler ve Bağlaçlar	14
1.3 Karşıt, Ters ve Karşıt Ters	18
1.4 Çelişki ve Totoloji	19
1.5 Önemli Mantık Yasaları	19
1.6 Önergelerin Matematikteki Kullanımı	20
1.7 Alıştırmalar	21
2 Niceleyiciler ve İspat Yöntemleri	25
2.1 Açık Önergeler ve Niceleyiciler	25
2.2 Niceleyicilerin Olumsuzlanması	26
2.3 İç İç Niceleyiciler ve Sıranın Önemi	27
2.4 Sözel İfadeleri Sembollere Çevirme	29
2.5 İspat Yöntemleri	30
2.6 Alıştırmalar	35
3 Kümeler ve Küme İşlemleri	37
3.1 Küme Kavramı	37
3.2 Alt Küme, Öz Alt Küme ve Küme Eşitliği	37
3.3 Küme İşlemleri	39
3.4 Küme İşlemlerinin Özellikleri	41
3.5 İndisli Aileler	43
3.6 Alıştırmalar	45
4 Bağlıntılar	47
4.1 Bağlıntı Kavramı	47
4.2 Bağlıntıların Özellikleri	48
4.3 Denklik Bağlıntıları	50
4.4 Sıralama Bağlıntıları	52
4.5 Alıştırmalar	53
5 Fonksiyonlar	55
5.1 Fonksiyon Kavramı	55
5.2 Görüntü ve Ters Görüntü	56
5.3 Görüntü, Ters Görüntü ve Küme İşlemleri	57

5.4	Bazı Özel Fonksiyonlar	59
5.5	Birebir, Örtten ve Birebir-Örtten Fonksiyonlar	60
5.6	Bileşke	62
5.7	Ters Fonksiyon	64
5.8	Alıştırmalar	67
6	Reel Sayılar ve Cebirsel Aksiyomlar	69
6.1	Reel Sayıları Nasıl Kuracağız?	69
6.2	Cebirsel Aksiyomlar	69
6.3	Toplama Aksiyomlarının Sonuçları	71
6.4	Çarpma Aksiyomlarının Sonuçları	73
6.5	Örnekler	77
6.6	Alıştırmalar	78
7	Sıralama Aksiyomları ve Aralıklar	81
7.1	Sıralama Aksiyomları	81
7.2	Sıralama Aksiyomlarının Sonuçları	82
7.3	Eşitsizlik Çözme	87
7.4	Aralıklar	88
7.5	Sıralamayla Tanımlanan Fonksiyonlar	89
7.6	Alıştırmalar	91
8	Mutlak Değer	93
8.1	Mutlak Değer ve Uzaklık	93
8.2	Mutlak Değer, Maksimum ve Minimum	94
8.3	Mutlak Değerin Temel Özellikleri	95
8.4	Üçgen Eşitsizliği	96
8.5	Mutlak Değer ve ε -Komşuluğu	99
8.6	Mutlak Değerli Eşitsizlikler	99
8.7	Alıştırmalar	101
9	Doğal Sayılar ve Tümevarım	103
9.1	Tümevarımsal Kümeler ve Doğal Sayılar	103
9.2	Tümevarım İlkesi	104
9.3	Doğal Sayıların Temel Özellikleri	106
9.4	Özyineli Tanımlar	107
9.5	Tümevarımın Değişik Biçimleri	108
9.6	Bernoulli Eşitsizliği	110
9.7	Binom Teoremi	110
9.8	Genel Üçgen Eşitsizliği	112
9.9	Alıştırmalar	112
10	Üst Sınır, Supremum ve Tamlık Aksiyomu	115
10.1	Üst Sınır ve Alt Sınır	115

10.2	Maksimum ve Minimum	116
10.3	Supremum ve İnfimum	117
10.4	Tamlık Aksiyomu	118
10.5	Supremumun Özellikleri	120
10.6	İç İçe Aralıklar	121
10.7	Alıştırmalar	123
11	Tam Sayılar ve Rasyonel Sayılar	125
11.1	Tam Sayılar Kümesi	125
11.2	Tam Sayılarda Sınırlılık ve Maksimum İlkesi	126
11.3	Tek ve Çift Sayılar	128
11.4	Bölünebilme ve Asal Sayılar	129
11.5	Tam Sayı Kuvvetleri	130
11.6	Rasyonel Sayılar	131
11.7	Alıştırmalar	134
12	Arşimet Özelliği ve Sonuçları	137
12.1	Arşimet Özelliği	137
12.2	Supremum ve İnfimum İspatlarında Arşimet Özelliği	139
12.3	Aralık Ailelerinin Kesişimi ve Birleşimi	140
12.4	Taban Fonksiyonu	141
12.5	Bölme Algoritması	143
12.6	Alıştırmalar	144
13	Köklerin Varlığı, İrrasyonel Sayılar ve Yoğunluk	147
13.1	Karekök İkinci Varlığı	147
13.2	n-inci Köklerin Varlığı	148
13.3	Karekök İki Rasyonel Değildir	150
13.4	İrrasyonel Sayılar	151
13.5	Rasyonel Üsler	152
13.6	Rasyonel ve İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu	153
13.7	Alıştırmalar	156
14	Sonlu, Sonsuz ve Sayılabilir Kümeler	157
14.1	Eşgüçlü Kümeler	157
14.2	Sonlu ve Sonsuz Kümeler	158
14.3	Sayılabilir Kümeler	160
14.4	Kartezyen Çarpım ve Birleşim	163
14.5	Reel Sayılar Sayılamaz	167
14.6	Alıştırmalar	168
15	Komşuluklar ve Açık Kümeler	171
15.1	Komşuluklar	171
15.2	Açık Kümeler	173

15.3	Açık Kümelerin Temel Özellikleri	175
15.4	İç Nokta ve Bir Kümenin İçi	177
15.5	Alıştırmalar	178
16	Kapalı Kümeler	181
16.1	Kapalı Küme Tanımı	181
16.2	Temel Örnekler	182
16.3	Kapalı Kümelerin Temel Özellikleri	183
16.4	Ne Açık Ne Kapalı Bir Küme	186
16.5	Hem Açık Hem Kapalı Kümeler	186
16.6	Alıştırmalar	187
17	Yığılma Noktaları, Kapanış ve Yoğun Kümeler	189
17.1	Yığılma Noktaları	189
17.2	Mükemmel Kümeler ve İzole Noktalar	192
17.3	Değme Noktaları ve Kapanış	194
17.4	Yoğun Kümeler	196
17.5	Supremum, İnfimum ve Yığılma Noktaları	197
17.6	Bolzano–Weierstrass Teoremi	198
17.7	Alıştırmalar	199
18	Kompaktlık ve Heine–Borel Teoremi	201
18.1	Açık Örtüler	201
18.2	Kompakt Kümelerin Özellikleri	204
18.3	Heine–Borel Teoremi	205
18.4	Alıştırmalar	208
19	Diziler: Tanım, Sınırlılık ve Monotonluk	211
19.1	Dizi Kavramı	211
19.2	Sınırlı Diziler	214
19.3	Monoton Diziler	215
19.4	Alıştırmalar	219
20	Dizilerde Yakınsaklık ve Limit	221
20.1	Yakınsaklık Tanımı	221
20.2	Limitin Tekliği	223
20.3	Tanımla Limit Hesaplama	223
20.4	Yakınsak Diziler Sınırlıdır	226
20.5	Mutlak Değer ve Limit	227
20.6	Alıştırmalar	228
21	Limitin Cebirsel Özellikleri ve Sıkıştırma Teoremi	231
21.1	Limitin Cebirsel Özellikleri	231
21.2	Yakınsak ve Iraksak Dizilerin Toplamı	233

21.3	Sınırlı Dizi ile Sıfır Dizisinin Çarpımı	234
21.4	Limitlerde Sıralama	234
21.5	Kuvvet ve Kök Dizileri	236
21.6	Sıkıştırma Teoremi	237
21.7	Supremum ve İnfimumun Dizilerle Karakterizasyonu	239
21.8	Yoğunluk, Kapalılık ve Kapanışın Dizilerle Karakterizasyonu	240
21.9	Alıştırmalar	242
22	Sonsuza Iraksayan Diziler ve Özel Limitler	245
22.1	Sonsuza Iraksama	245
22.2	Sonsuz Limitlerle İşlemler	247
22.3	Özel Limitler	250
22.4	Özet Tablo	256
22.5	Alıştırmalar	256
23	Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı	259
23.1	Monoton Dizileri Hatırlayalım	259
23.2	Monoton Yakınsaklık Teoremi	259
23.3	Sınırsız Monoton Diziler	262
23.4	e Sayısı	262
23.5	Özyineli Dizilerin Limiti	266
23.6	Alıştırmalar	268
24	Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi	271
24.1	Alt Diziler	271
24.2	Alt Dizilerin Yakınsaklığı	272
24.3	Dizinin Kuyruğu	275
24.4	Monoton Alt Diziler	276
24.5	Bolzano–Weierstrass Teoremi	278
24.6	İç İç Aralıklar: Dizilerle Yeni Bir İspat	280
24.7	Dizisel Kompaktlık	281
24.8	Alıştırmalar	282
25	Dizilerin Yığılma Noktaları, Üst Limit ve Alt Limit	285
25.1	Dizinin Yığılma Noktası	285
25.2	Yığılma Noktaları Kümesi	287
25.3	Üst Limit ve Alt Limit	289
25.4	Sınırsız Dizilerde Üst ve Alt Limit	290
25.5	Sıkıştırma Özelliği ve Yakınsaklık Ölçütü	291
25.6	Kuyruk Formülü	293
25.7	Üst ve Alt Limitte İşlemler	295
25.8	Alıştırmalar	297

26	Cauchy Dizileri ve Reel Sayıların Tamlığı	299
26.1	Cauchy Dizisi	299
26.2	Yakınsak Diziler Cauchy'dir	301
26.3	Cauchy Ölçütü	301
26.4	Tam Kümeler	304
26.5	Reel Sayıların Tamlığı: Beş Denk Özellik	305
26.6	Alıştırmalar	308
27	Fonksiyon Limiti: ϵ-δ Tanımı	311
27.1	Sezgisel Yaklaşım	311
27.2	Limitin ϵ - δ Tanımı	311
27.3	Limitin Tekliği	313
27.4	Tanımdan Limit Hesaplama	314
27.5	Alıştırmalar	318
28	Limit için Dizisel Ölçüt ve Cauchy Ölçütü	321
28.1	Dizisel Ölçüt (Heine Ölçütü)	321
28.2	Cauchy Ölçütü	325
28.3	Alıştırmalar	327
29	Limitin Özellikleri: Sınırlılık, Cebirsel İşlemler ve Bileşke	331
29.1	Nokta Yakınında Sınırlılık	331
29.2	Limitlerde Cebirsel İşlemler	332
29.3	Polinomların ve Rasyonel Fonksiyonların Limitleri	335
29.4	Bileşke Fonksiyonun Limiti	336
29.5	Alıştırmalar	339
30	Limitlerde Mutlak Değer, İşaret, Sıralama ve Sıkıştırma	341
30.1	Mutlak Değerin Limiti	341
30.2	Limitin İşaretini Koruma	342
30.3	Sınırlı Fonksiyon ile Sıfıra Giden Fonksiyonun Çarpımı	343
30.4	Limit ve Sıralama	345
30.5	Sıkıştırma Teoremi	346
30.6	Sinüs x Bölü x Limiti	348
30.7	Alıştırmalar	351
31	Tek Yönlü Limitler	353
31.1	Sağ Limit ve Sol Limit	353
31.2	Limit ile Tek Yönlü Limitlerin İlişkisi	356
31.3	Tek Yönlü Limitler için Dizisel Ölçüt	358
31.4	Monoton Fonksiyonların Tek Yönlü Limitleri	359
31.5	Alıştırmalar	361

32	Sonsuz Limitler ve Sonsuzdaki Limitler	363
32.1	Bir Noktada Sonsuz Limit	363
32.2	Sonsuzdaki Limitler	366
32.3	Bütün Süreçler için Dizisel Ölçüt	368
32.4	Sonsuz Limitlerle İşlemler	369
32.5	Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzdaki Limitleri	371
32.6	Asimptotlar	373
32.7	Alıştırmalar	375
33	Süreklilik	377
33.1	Bir Noktada Süreklilik	377
33.2	Süreklilik için Dizisel Ölçüt	380
33.3	Sürekli Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler	381
33.4	Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği	384
33.5	Sürekli Fonksiyonların Yerel Davranışı	386
33.6	Tek Yönlü Süreklilik	386
33.7	Alıştırmalar	387
34	Süreksizlik Çeşitleri	389
34.1	Süreksizlik Noktası	389
34.2	Kaldırılabilir Süreksizlik	390
34.3	Sıçrama Süreksizliği	391
34.4	İkinci Tür Süreksizlik	392
34.5	Thomae Fonksiyonu	393
34.6	Monoton Fonksiyonların Süreksizlikleri	394
34.7	Alıştırmalar	396
35	Ara Değer Teoremi ve Weierstrass Teoremleri	399
35.1	İşaret Koruma ve Bolzano Teoremi	399
35.2	Ara Değer Teoremi	401
35.3	Sınırlılık ve Weierstrass Ekstremum Teoremi	404
35.4	Kompakt Kümelerin Sürekli Görüntüsü	407
35.5	Alıştırmalar	408
36	Düzgün Süreklilik ve Cantor Teoremi	411
36.1	Noktaya Bağlı Delta	411
36.2	Örnekler	413
36.3	Lipschitz Koşulu	414
36.4	Düzgün Sürekli Olmama için Dizisel Ölçüt	415
36.5	Cantor Teoremi	417
36.6	Düzgün Süreklilik ve Cauchy Dizileri	418
36.7	Alıştırmalar	420
36.8	Analiz 1'in Sonu	422

37	Kümeler, Fonksiyonlar ve Reel Sayılar Üzerine Problemler . .	423
37.1	Supremum ve İnfimum	423
37.2	Tümevarım	424
37.3	Supremum, İnfimum, Maksimum ve Minimum Hesapları	425
37.4	İrrasyonel Sayılar	427
37.5	Epsilon Diliyle Eşitlik	427
37.6	Görüntü ve Ters Görüntü	428
38	Diziler, Limit ve Süreklilik Üzerine Problemler	431
38.1	Özyineli Bir Dizinin Yakınsaklığı	431
38.2	Doğru mu, Yanlış mı?	432
38.3	Rasyonel ve İrrasyonel Noktalarda Ayrı Tanımlanan Bir Fonksiyon	434
38.4	Limit Hesapları	436
38.5	Ara Değer Teoreminin Bir Uygulaması	438

Giriş

Analiz 1, matematik bölümünün en önemli dersidir: burada “yaklaşmak”, “sınırsız büyümek”, “kesintisiz olmak” gibi sezgisel sözler ilk kez kesin tanımlara (ε - δ diline) dönüşür. Ders, mantık ve küme dilinden başlayarak reel sayıların aksiyomlarını kurar; sayı doğrusunun topolojisini, dizilerin yakınsaklığını, fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramlarını inceler.

Notlar, hiçbir adımı atlamadan ve olabildiğince sade bir Türkçeyle yazılmıştır; her teoremin ispatı verilmiş, her kavram örnek ve çizimlerle desteklenmiştir.

i Not

Analiz 1’in bütün başlıklarının notları hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Dört Analiz dersinin listesi için [Analiz sayfasına](#) bakabilirsiniz.

1. Önermeler Mantığı

Matematik, doğru olduğu kesin olarak bilinen cümlelerden yeni doğru cümleler üretme sanatıdır. Bunu güvenle yapabilmek için önce “cümle” ile ne kastettiğimizi, iki cümleyi nasıl birleştirdiğimizi ve bir cümlemin ne zaman bir diğerinden “çıktığını” kesin kurallara bağlamamız gerekir. Bu bölüm, Analiz 1 boyunca her tanımda ve her ispatta kullanacağımız bu ortak dili kurar: önermeler, bağlaçlar, doğruluk tabloları ve temel mantık yasaları.

Bölümün sonunda bir teoremin “karşıt tersi” ile “karşıtı” arasındaki farkı, “ancak ve ancak” içeren bir iddianın neden iki ayrı ispat gerektirdiğini ve “ve”li bir cümlemin olumsuzlamasının neden “veya”lı olduğunu tablolarla kanıtlayabiliyor olacağız. Bir sonraki bölümde bu dile niceleyicileri ($\forall$, $\exists$) ekleyip ispat yöntemlerine geçeceğiz.

1.1 Önermeler

Günlük dilde her cümle bir yargı bildirmez: emirler, sorular, dilekler vardır. Matematikte ise yalnızca “doğru mu, yanlış mı?” sorusunun tek bir yanıtı olan cümlelerle çalışırız. Bu cümlelere özel bir ad veriyoruz.

Tanım 1.1 (Önerme). Doğru ya da yanlış olan, ama ikisi birden olmayan bildirim cümlesine **önerme** (proposition) denir. Bir önermenin doğru (D) ya da yanlış (Y) olmasına o önermenin **doğruluk değeri** denir.

Tanımdaki iki koşul birlikte önemlidir: bir önermeye D ya da Y değerlerinden biri kesinlikle atanabilmesidir; önerme hem D hem Y olamaz, ne D ne Y de olamaz. Önermeleri genellikle $p, q, r, s, \dots$ harfleriyle gösteririz. (İngilizce metinlerde doğruluk değerleri T ve F harfleriyle yazılır; biz D ve Y kullanacağız.) Aşağıdaki cümleleri inceleyelim:

- p : “Çin, Avrupa’dadır.” Bu bir önermedir; doğruluk değeri Y’dir, çünkü Çin Asya’dadır.
- q : “Her asal sayı tektir.” Bu bir önermedir; doğruluk değeri Y’dir, çünkü 2 asaldır ve çifttir.
- r : “ $2 + 2 = 4$.” Bu bir önermedir; doğruluk değeri D’dir.
- s : “Kapıyı kapat.” Bu bir önerme değildir; bir emirdir, doğru ya da yanlış olması söz konusu değildir.
- t : “Nereye gidiyorsun?” Bu bir önerme değildir; bir sorudur. Soru bilgi ister, yargı bildirmez.
- u : “ $x > 4$.” Bu da bir önerme değildir; doğruluğu x ’in ne olduğuna bağlıdır. Böyle “değişkenli” cümleleri önermeye dönüştürmenin yolunu bir sonraki bölümde göreceğiz.

i Doğruluk değerini bilmemek önermeliğe engel değildir

“2’den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır.” cümlesi (Goldbach sanısı) bir önermedir: ya doğrudur ya yanlıştır. Hangisi olduğunu henüz kimsenin bilmiyor olması bunu değiştirmez. Önerme olmak, doğruluk değerinin *var* olmasıyla ilgilidir, bizim onu *bilmemizle* değil.

1.1.1 Olumsuzlama

Bir yargının tersini söylemek, mantıktaki en basit işlemdir: “yağmur yağıyor” cümlesinden “yağmur yağmıyor” cümlesine geçmek.

Tanım 1.2 (Olumsuzlama). Bir p önermesinin **olumsuzlaması** (negation), p ile zıt doğruluk değerine sahip olan önermedir. $\neg p$ ile gösterilir ve “ p değil” diye okunur:

- p doğruysa $\neg p$ yanlıştır,
- p yanlışsa $\neg p$ doğrudur.

Kaynaklarda $\sim p$ ve p' gösterimlerine de rastlanır; bu notlarda $\neg p$ kullanacağız. Olumsuzlamayı tanımlamanın en açık yolu, p 'nin alabileceği her değer için $\neg p$ 'nin değerini listeleyen **doğruluk tablosu** (truth table) yazmaktır:

p	$\neg p$
D	Y
Y	D

Örnekler:

1. p : “2 çift sayıdır.” önermesi doğrudur (D). Olumsuzlaması $\neg p$: “2 çift sayı değildir.” yanlıştır (Y).
2. q : “Dünya, Güneş’ten büyüktür.” önermesi yanlıştır (Y). Olumsuzlaması $\neg q$: “Dünya, Güneş’ten büyük değildir.” doğrudur (D).

⚠ Olumsuzlama, zıddını söylemek değildir

“Her asal sayı tektir.” önermesinin olumsuzlaması “Her asal sayı çifttir.” *değildir*, ikisi de yanlıştır, oysa bir önerme ile olumsuzlamasından tam biri doğru olmalıdır. Doğru olumsuzlama “Tek olmayan bir asal sayı vardır.” cümlesidir. “Her” ve “vardır” içeren cümlelerin olumsuzlanması kuralını [bir sonraki bölümde](#) ayrıca ele alacağız.

1.1.2 Mantıksal Denklik

İki farklı cümle aynı şeyi söylüyor olabilir: “2 çift sayıdır” ile “2, ikiye bölünür” gibi. Mantıkta “aynı şeyi söylemek”, bileşenlerin her doğruluk değeri dağılımında aynı sonucu vermek demektir.

Tanım 1.3 (Mantıksal Denklik). Aynı $p, q, r, \dots$ önergelerinden kurulmuş iki önerme, kurucu önermelerin doğruluk değerlerinin **her** olası dağılımında aynı doğruluk değerini alıyorsa, yani doğruluk tabloları birebir aynysa, bu iki önermeye **mantıksal denk** (logically equivalent) ya da kısaca **denk** denir. P ve Q önergeleri denkse $P \equiv Q$ yazılır.

$\equiv$ işareti yeni bir önerme kurmaz; iki önerme *hakkında* bir bilgi verir: “bu ikisi birbirinin yerine kullanılabilir.” Denkliğin ilk ve en basit örneği, bir önermeyi iki kez olumsuzlamaktır.

Önerme 1.1 (Çift Olumsuzlama Yasası). Her p önermesi için

$$\neg(\neg p) \equiv p.$$

İspat.

Doğruluk tablosunu kuralım. $\neg p$ sütunu p sütununun zıddı, $\neg(\neg p)$ sütunu da $\neg p$ sütununun zıddıdır:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
D	Y	D
Y	D	Y

İlk ve son sütun birebir aynıdır; [Tanım 1.3](#) gereği $\neg(\neg p) \equiv p$.

■

Örneğin “2’nin çift sayı olmadığı doğru değildir.” cümlesi ile “2 çift sayıdır.” cümlesi mantıksal olarak aynı şeyi söyler. Bu yasa ispatlarda sık sık, fark etmeden kullanılır: “ x ’in pozitif olmadığını varsayalım ... demek ki x pozitif değil değilmiş, yani pozitifmiş” adımı tam olarak budur.

1.2 Bileşik Önergeler ve Bağlaçlar

Sayılarla toplama ve çarpma yaparak yeni sayılar ürettiğimiz gibi, önergeleri de “ve”, “veya”, “ise” gibi kelimelerle birleştirerek yeni önergeler üretiriz.

Tanım 1.4 (Basit ve Bileşik Önerme). Tek bir yargı bildiren ve daha küçük önermelere ayrılamayan önermeye **basit önerme**; bir ya da daha çok basit önermenin “değil”, “ve”, “veya”, “ise”, “ancak ve ancak” gibi **bağlaçlarla** (logical connectives) birleştirilmesiyle elde edilen önermeye **bileşik önerme** denir.

Basit önerme tek bir özne ve tek bir yüklem içerir; doğruluk değeri başka önermelere bakılmadan belirlenir. Örneğin “Yağmur yağıyor.”, “Güneş bir yıldızdır.”, “3 tek sayıdır.” basit önermelerdir. Bileşik önerme ise en az bir bağlaç içerir ve doğruluk değeri, bileşenlerinin doğruluk değerleriyle bağlacın kuralından hesaplanır:

- “Yağmur yağıyor **ve** Güneş bir yıldızdır.”
- “Yağmur yağıyor **veya** 3 tek sayıdır.”
- “Yağmur yağıyor **ise** 3 tek sayıdır.”
- “Yağmur yağmıyor.”

Bir bağlacı, girdi olarak bir ya da iki önerme alıp çıktı olarak yeni bir önerme veren bir **işlem** gibi düşünebiliriz. İşlemin sonucu yalnızca girdilerin doğruluk değerlerine ve bağlacın tanımına bağlıdır; bu tanımı vermenin standart yolu doğruluk tablosudur. Dört temel bağlacı sırayla tanımlayalım.

1.2.1 Ve Bağlacı

Günlük dilde “hem ... hem de” anlamındadır: her iki parça da doğruysa bütün doğrudur.

Tanım 1.5 (Ve Bağlacı). p ve q önermelerinin **konjonksiyonu** (conjunction) $p \wedge q$ ile gösterilir, “ p ve q ” diye okunur ve ancak ve ancak p ile q ’nun ikisi de doğruyken doğrudur; diğer her durumda yanlıştır.

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Örnek: p : “Hava güneşli.” (D) ve q : “Hava sıcak.” (D) ise $p \wedge q$: “Hava güneşli ve sıcak.” doğrudur. Hava sıcak olmasaydı (q yanlış olsaydı), p doğru kalsa bile $p \wedge q$ yanlış olurdu. İki önermeli bir tabloda dört satır olduğuna dikkat edin: p ve q ’nun her biri iki değer alabildiğinden $2 \cdot 2 = 4$ olası dağılım vardır. Üç önerme için satır sayısı $2^3 = 8$ olur.

1.2.2 Veya Bağlacı

Matematikte “veya” kapsayıcıdır: iki parçadan en az biri doğruysa bütün doğrudur, ikisi birden doğru olabilir.

Tanım 1.6 (Veya Bağlacı). p ve q önermelerinin **disjonksiyonu** (disjunction) $p \vee q$ ile gösterilir, “ p veya q ” diye okunur ve ancak ve ancak p ile q ’nun ikisi de yanlışken yanlıştır; diğer her durumda doğrudur.

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek: p : “Rapor salı günü teslim edilecek.” (D) ve q : “Rapor çarşamba günü teslim edilecek.” (Y) ise $p \vee q$: “Rapor salı veya çarşamba günü teslim edilecek.” doğrudur.

⚠️ Günlük dildeki ya ... ya da

“Çay ya da kahve alır mısınız?” sorusundaki “ya da” genellikle *ikisinden yalnız birini* kasteder (dışlayıcı veya). Matematikteki $\vee$ böyle değildir: “ $x = 0$ veya $y = 0$ ” önermesi, x ile y ’nin ikisi de sıfırken de doğrudur. Dışlayıcı veya’yı yazmak gerekirse $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ biçiminde açıkça yazılır (bkz. [Aıştırma 1.1 a](#)).

1.2.3 İse Bağlacı (Koşullu Önerme)

Matematiğin en önemli bağlacı budur: teoremlerin büyük çoğunluğu “... ise ...” biçimindedir.

Tanım 1.7 (İse Bağlacı). p ve q önermelerinden kurulan **koşullu önerme** (conditional) $p \Rightarrow q$ ile gösterilir; “ p ise q ” ya da “ p , q ’yu gerektirir” diye okunur. Yalnızca p doğru ve q yanlışken yanlıştır; diğer her durumda doğrudur. Burada p ’ye **hipotez** (varsayım, öncül), q ’ya **sonuç** (hüküm) denir.

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Tablonun son iki satırı ilk bakışta şaşırtıcıdır: hipotez yanlışsa koşullu önerme, sonuç ne olursa olsun doğru sayılır. Bunu bir söz verme olarak düşünmek yardımcı olur. p : “Finalden AA alırsın.” ve q : “Dersi geçersin.” olsun; $p \Rightarrow q$: “Finalden AA alırsan dersi geçersin.” bir vaattir. Bu vaat yalnızca tek bir durumda *bozulmuş* olur: AA alıp da dersi geçememen. AA alamadıysan vaat hiç sınanmamıştır; dersi geçsen de geçmesen de sözünü tutmayan kimse yoktur, dolayısıyla vaat yanlışlanmamıştır. Matematikte bu duruma “boşlukla doğru” (vacuously true) denir; bir sonraki bölümde niceleyicilerle birlikte tekrar karşımıza çıkacak.

Aynı önermenin farklı okunuşları vardır ve teorem ifadelerinde hepsi kullanılır:

İ Yeter koşul, gerek koşul

$p \Rightarrow q$ önermesi şu biçimlerde de söylenir:

- “ p , q için **yeter koşuldur**” (sufficient condition): p ’nin doğru olması q ’nin doğru olmasına yeter.
- “ q , p için **gerek koşuldur**” (necessary condition): p doğruysa q mutlaka doğrudur; q olmadan p olamaz.
- “ q olması için p olması yeterlidir”, “ p olması için q olması gereklidir”, “ p olduğunda q olur”, “ q olmadıkça p olmaz”. Sonuncusu, aşağıda göreceğimiz karşıt ters biçimidir: $\neg q \Rightarrow \neg p$. Dikkat: “ p olmadıkça q olmaz” cümlesi ise $\neg p \Rightarrow \neg q$ demektir ve $p \Rightarrow q$ ile aynı şey değildir.

Teorem ispatlarında p *verilen, kabul edilen* kısımdır; q ise *gösterilmesi gereken* kısımdır. Bir ispat, hipotezin doğru olduğu varsayımı altında sonucun da doğru olmak zorunda olduğunu gösterir.

Koşullu önerme, aslında “değil” ve “veya” ile yazılabilir; bu gözlem hem olumsuzlama alırken hem de ispat yöntemlerini gerekçelendirirken işimize yarayacak.

Örnek 1.1 (İse Bağlacının Veya ile Yazılması). $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ denkleğini doğruluk tablosuyla gösteriniz.

Çözüm.

p ve q ’nin dört olası dağılımı için $p \Rightarrow q$ sütununu [Tanım 1.7](#) ile, $\neg p$ sütununu [Tanım 1.2](#) ile, $\neg p \vee q$ sütununu ise [Tanım 1.6](#) ile dolduralım:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
D	D	D	Y	D
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D

$p \Rightarrow q$ ve $\neg p \vee q$ sütunları dört satırda da aynıdır; [Tanım 1.3](#) gereği iki önerme denktir. Sözle: “ p ise q ” demek, “ya p yanlıştır ya da q doğrudur” demektir.

■

1.2.4 Ancak ve Ancak Bağlacı (İki Koşullu Önerme)

İki önermenin “aynı anda doğru, aynı anda yanlış” olmasını ifade eden bağlaçtır; tanımlarda ve karakterizasyon teoremlerinde sürekli karşımıza çıkar.

Tanım 1.8 (Ancak ve Ancak Bağlacı). p ve q önermelerinden kurulan **iki koşullu önerme** (biconditional) $p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir ve ancak ve ancak p ile q aynı doğruluk değerine sahipken doğrudur; farklı değerlere sahipken yanlıştır. “ p ancak ve ancak q ”, “ p ile q denktir”, “ p , q için gerek ve yeter koşuldur” diye okunur.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Örnek: Belirli bir çokgen verilmiş olsun. p : “Bu çokgenin tam üç kenarı vardır.” ve q : “Bu çokgen bir üçgendir.” olsun. Çokgen bir kez sabitlendiğinde iki cümle de doğruluk değeri belirlidir, yani ikisi de [Tanım 1.1](#) anlamında birer önermedir. $p \Leftrightarrow q$: “Bu çokgenin tam üç kenarı vardır ancak ve ancak bu çokgen bir üçgense.” doğrudur; çünkü hangi çokgen verilirse verilsin iki cümle ya birlikte doğru ya birlikte yanlıştır.

İki koşullu önerme, adından da anlaşılacağı gibi, iki koşullu önermenin birleşimidir:

Örnek 1.2 (Ancak ve Ancak, İki Yönlü İse Demektir). $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ denkleğini doğruluk tablosuyla gösteriniz.

Çözüm.

$p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ sütunlarını [Tanım 1.7](#) ile ayrı ayrı doldurup [Tanım 1.5](#) ile birleştirelim; son sütun [Tanım 1.8](#)’den gelir:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	Y
Y	Y	D	D	D	D

Son iki sütun birebir aynı olduğundan denklik kanıtlanmıştır.

■

Bu denkleğin ispat pratiğindeki anlamı büyüktür: “ $p \Leftrightarrow q$ ” biçimindeki bir teorem, **iki ayrı teoremdir**. “ $\Rightarrow$ ” yönü ($p \Rightarrow q$) p ’nin yeterliliğini, “ $\Leftarrow$ ” yönü ($q \Rightarrow p$) p ’nin gerekliliğini söyler ve teorem ancak iki yön de ispatlandığında ispatlanmış sayılır. Yalnızca bir yönü gösterip “ancak ve ancak”lı sonucu ilan etmek, öğrencilerin en sık yaptığı hatalardan biridir.

1.3 Karşıt, Ters ve Karşıt Ters

$p \Rightarrow q$ önermesinden, parçalarının yerini değiştirerek ya da olumsuzlayarak üç yeni koşullu önerme üretilebilir. Bunların hangisinin özgün önermeye denk olduğunu bilmek, ispat yazarken yaşamsaldır.

Tanım 1.9 (Karşıt, Ters ve Karşıt Ters). $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi verilsin.

- $q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ ’nun **karşıtı** (converse),
- $\neg p \Rightarrow \neg q$ önermesine $p \Rightarrow q$ ’nun **tersi** (inverse),
- $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesine $p \Rightarrow q$ ’nun **karşıt tersi** (contrapositive)

denir.

Adlar akılda kalıcıdır: *karşıt*, iki tarafın yerini karşılıklı değiştirir; *ters*, iki tarafı olumsuzlar; *karşıt ters*, ikisini birden yapar.

Örnek 1.3 (Koşullu Önerme Karşıt Tersine Denktir). $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ denkleğini doğruluk tablosuyla gösteriniz. Karşıt ve ters için ne söylenebilir?

Çözüm.

Tabloya $\neg p$ ve $\neg q$ sütunlarını ekleyip karşıt tersi, karşıtı ve tersi ayrı sütunlarda hesaplayalım. Her koşullu önerme sütunu için kural aynıdır: yalnızca “hipotez D, sonuç Y” satırında Y yazılır.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
D	D	D	Y	Y	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	D	D
Y	D	D	D	Y	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D	D	D	D

$p \Rightarrow q$ ile $\neg q \Rightarrow \neg p$ sütunları dört satırda da aynıdır: bir koşullu önerme, karşıt tersine denktir.

Öte yandan $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ sütunları ikinci ve üçüncü satırlarda farklıdır: bir koşullu önerme karşıtına **denk değildir**. Son iki sütun ise birbirine eşittir; yani karşıt ile ters birbirine denktir (ters, karşıtın karşıt tersidir).

■

Somut bir örnekle sindirelim. p : “Yağmur yağıyor.”, q : “Yer ıslak.” olsun ve $p \Rightarrow q$: “Yağmur yağıyorsa yer ıslaktır.” önermesini doğru kabul edelim.

- Karşıtı: “Yer ıslaksa yağmur yağıyordur.” Doğru olmak zorunda değil; yer hortumla sulanmış olabilir.
- Ters: “Yağmur yağmıyorsa yer ıslak değildir.” Aynı nedenle doğru olmak zorunda değil.
- Karşıt tersi: “Yer ıslak değilse yağmur yağmıyordur.” Doğru: yağmur yağsaydı yer ıslak olurdu.

İspatlarda karşıt tersin kullanımı

$p \Rightarrow q$ ile $\neg q \Rightarrow \neg p$ denk olduğundan, bir teoremi ispatlarken özgün ifade yerine karşıt tersini ispatlamak tamamen meşrudur. Bazen karşıt ters çok daha kolay ispatlanır: “ n^2 çift ise n çifttir” yerine “ n tek ise n^2 tektir” göstermek gibi. Bu yöntemi bir sonraki bölümde ayrıntılı işleyeceğiz. Ama dikkat: karşıtı ispatlamak, özgün önermeyi ispatlamaz.

1.4 Çelişki ve Totoloji

Bazı bileşik önermeler, bileşenlerinin değeri ne olursa olsun hep aynı sonucu verir. Bu iki uç durumun özel adları vardır.

Tanım 1.10 (Totoloji ve Çelişki). Kurucu önermelerinin her doğruluk değeri dağılımında **doğru** olan bileşik önermeye **totoloji** (tautology); her dağılımda **yanlış** olan bileşik önermeye **çelişki** (contradiction) denir.

En basit örnekler tek bir önermeden kurulur:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
D	Y	Y	D
Y	D	Y	D

$p \wedge \neg p$ sütunu hep Y'dir: bu bir çelişkidir. $p \vee \neg p$ sütunu hep D'dir: bu bir totolojidir. Bu iki tablo, aslında önermeler mantığının temel ilkelerinin tablo hâlidir.

i Önermeler mantığının üç temel ilkesi

1. **Özdeşlik ilkesi:** Bir önerme doğruysa doğrudur; yani $p \Rightarrow p$ bir totolojidir. (Tabloda p ile p aynı değeri aldığından "hipotez D, sonuç Y" satırı hiç oluşmaz.)
2. **Çelişmezlik ilkesi:** Hiçbir önerme aynı anda hem doğru hem yanlış olamaz; yani $p \wedge \neg p$ bir çelişkidir.
3. **Üçüncü hâlin olmazlığı ilkesi:** Bir önerme ya doğrudur ya yanlıştır, üçüncü bir olasılık yoktur; yani $p \vee \neg p$ bir totolojidir.

Üçüncü ilke, "olmayana ergi" yöntemine güç veren ilkedir: $\neg p$ 'nin bir çelişkiye götürdüğünü gösterirsek, üçüncü bir seçenek olmadığından p doğru olmak zorundadır.

Totoloji kavramı, denkliği de yeniden ifade etmemizi sağlar: $P \equiv Q$ olması, $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin bir totoloji olması demektir. Gerçekten de Tanım 1.8 gereği $P \Leftrightarrow Q$ tam olarak P ile Q aynı değeri aldığından doğrudur; her satırda doğru olması, her satırda aynı değeri almaları, yani denk olmaları demektir.

1.5 Önemli Mantık Yasaları

Aşağıdaki yasaların çoğu, sayılardaki değişme, birleşme ve dağılma özelliklerinin mantıktaki karşılıklarıdır ve birer denkliktir; (5) numaralı geçişlilik maddesi ise bir denklik değil, tek yönlü bir gerektirir. Hepsini doğruluk tablosuyla doğrulanabilir; bundan sonra ispatlarda gerekçe göstermeden kullanacağız.

Teorem 1.1 (Temel Mantık Yasaları). p, q ve r önermeler olsun.

1. **Değişme yasaları:** $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. **Birleşme yasaları:** $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ve $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
3. **Dağılma yasaları:** $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
4. **Özdeşlik yasaları:** $p \wedge p \equiv p$ ve $p \vee p \equiv p$. (Identity laws; bazı kaynaklarda eş güçlülük ya da idempotens yasaları denir. Yukarıdaki "özdeşlik ilkesi" ($p \Rightarrow p$) ile aynı şey değildir.)
5. **Geçişlilik (transitivity):** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ bir totolojidir.
6. **De Morgan yasaları:** $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ve $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
7. **Karşıt ters yasası:** $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

İspat.

Her maddeyi doğruluk tablosuyla doğrulayabiliriz; bazıları için tablo kurmaya bile gerek yoktur.

(1) **Değişme.** Tanım 1.5 ve Tanım 1.6 tabloları p ile q 'ya göre simetriktir: $p \wedge q$ yalnızca ikisi de doğruyken doğrudur, bu koşul p ile q 'nın sırasına bağlı değildir. $\vee$ için de aynı şey "ikisi de yanlışken yanlış" koşulu için geçerlidir.

(4) **Özdeşlik.** $p \wedge p$ önermesi p doğruyken doğru, yanlışken yanlıştır; yani sütunu p 'nin sütunuyla aynıdır. $p \vee p$ için de aynı gerekçe geçerlidir.

(6) **De Morgan, ilk yasa.** $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ denkliği için tabloyu kuralım:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
D	D	D	Y	Y	Y	Y
D	Y	D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	D	Y	Y
Y	Y	Y	D	D	D	D

$\neg(p \vee q)$ ve $\neg p \wedge \neg q$ sütunları birebir aynıdır; ilk De Morgan yasası kanıtlanmıştır. Sözle: “ p veya q ” yanlışsa ikisi de yanlıştır; ikisi de yanlışsa “ p veya q ” yanlıştır.

(7) **Karşıt ters.** Örnek 1.3’te tabloyla gösterildi.

(2), (3), (5) ve De Morgan’ın ikinci yasası. Bu maddeler bölüm sonundaki [Alıştırma 1.1](#) alıştırmasının b, c ve d şıklarında ispatlanmıştır: (3), (5) ve De Morgan’ın ikinci yasası için doğruluk tabloları kurulur (üç önermeli tablolar sekiz satırlıdır), birleşme yasaları (2) ise tablo kurmadan, sözlü bir gerekçeyle gösterilir.

Bu yasalar ne işe yarar? Birleşme yasaları sayesinde $p \wedge q \wedge r$ ya da $p \vee q \vee r$ yazarken parantez koymamıza gerek kalmaz. Dağılma yasaları, “ $x = 0$ ve ($y = 1$ veya $y = 2$)” gibi bir koşulu “($x = 0$ ve $y = 1$) veya ($x = 0$ ve $y = 2$)” biçiminde açmamızı sağlar. Geçişlilik, ispatlardaki “zincir” mantığının kendisidir: $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$ adımlarından $p \Rightarrow q$ sonucuna böyle geçilir (yasa iki halkalı zincir için yazılmıştır; daha uzun zincirler onu tekrar tekrar uygulayarak kısaltılır). Beşinci maddenin bir *denklik* değil, bir *totoloji* olduğuna dikkat edin: $p \Rightarrow r$ doğruyken $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ yanlış olabilir.

De Morgan yasaları ise olumsuzlama alırken vazgeçilmezdir. “ x çift ve y tek” önermesinin olumsuzlaması “ x tek veya y çift”tir; “ $x = 0$ veya $y = 0$ ” önermesinin olumsuzlaması “ $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ”dır. Olumsuzlama “ve”yi “veya”ya, “veya”yı “ve”ye çevirir. Bu yasayı koşullu önermeye uygulayınca, ispat yöntemlerinin temel taşı olan bir sonuç elde ederiz.

Sonuç 1.1 (Koşullu Önermenin Olumsuzlaması).

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q.$$

İspat.

Örnek 1.1 gereği $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ ’dur. Denk önermelerin olumsuzlamaları da denktir (tabloları aynıysa zıtları da aynıdır); dolayısıyla

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q).$$

Sağ tarafa Teorem 1.1 (6), ilk De Morgan yasasını uygulayalım:

$$\neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q.$$

Son olarak Önerme 1.1 ile $\neg(\neg p) \equiv p$ olduğundan $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ elde edilir.

Sonucun söylediği şudur: “ p ise q ” iddiasının yanlış olması, “ p doğru ve q yanlış” olması demektir; başka hiçbir şey değil. Bu yüzden bir “ise”li iddiayı çürütmek için hipotezin sağlandığı ama sonucun sağlanmadığı **tek bir örnek** yeter; ve bu yüzden olmayana ergi yönteminde “ p ve $\neg q$ ” varsayımıyla başlanır. Her iki fikri de bir sonraki bölümde kullanacağız.

1.6 Önermelerin Matematikteki Kullanımı

Mantıkta bir önerme doğru ya da yanlış olabilir. Matematik metinlerinde ise “önerme” sözcüğü neredeyse her zaman *doğruluğu ispatlanmış* bir ifade için kullanılır; bundan sonra “önerme” dediğimizde, bağlamdan aksi anlaşılmıyorsa, bu matematiksel anlamı kastedeceğiz. Bir matematik metninin yapı taşları aşağıdaki sözcüklerle adlandırılır; bu notlardaki kutu başlıkları da bu adlandırmayı izler.

i Matematik metinlerinin yapı taşları

- **Tanım** (definition): Bir sözcüğün matematiksel anlamının açıklanması ya da bir kavrama ad verilmesidir. Tanımlar ispatlanmaz; kabul edilir.
- **Aksiyom** (axiom, postulat): Bir matematiksel yapı hakkında, ispat gerektirmeden doğru kabul edilen temel varsayımdır. Reel sayıları böyle aksiyomlarla kuracağız.
- **Teorem** (theorem): Önemli, genel ve güçlü sonuçları olan, ispatlanmış bir önermedir.
- **Önerme** (proposition): Doğruluğu ispatlanmış ama teorem kadar önemli sayılmayan bir ifadedir.
- **Lemma** (lemma, yardımcı teorem): Bir teoremin ispatında kullanılmak üzere ispatlanan yardımcı önermedir.
- **Sonuç** (corollary): Bir teoremden kolayca türetilen önermedir.
- **İspat** (proof): Bir önermenin neden doğru olduğunu gösteren, tanımlara, aksiyomlara ve daha önce ispatlanmış sonuçlara dayanan mantıksal açıklamadır. Yukarıdakilerin geçerliliği ispatla kurulur.
- **Sanı** (conjecture): Doğru olduğuna inanılan ya da iddia edilen, ancak henüz ispatı bulunamamış ve çürütülememiş önermedir. Goldbach sanısı böyledir.

Teorem, önerme, lemma ve sonuç arasındaki fark mantıksal değil, “önem” ve “kullanım yeri” ile ilgilidir; hepsi ispatlanmış önermelerdir. Bu notlar boyunca ispatlar, ait oldukları kutunun içinde, hipotezden sonuca giden adımların her birinin gerekçesi yazılarak verilecektir. Bir sonraki bölümde bu adımların hangi kalıplara oturduğunu, yani ispat yöntemlerini öğreneceğiz.

1.7 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Önermeler Mantığı Alıştırmaları).

- $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ önermesinin (dışlayıcı veya) doğruluk tablosunu kurunuz ve $\neg(p \Leftrightarrow q)$ önermesine denk olduğunu gösteriniz.
- De Morgan’ın ikinci yasasını, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, doğruluk tablosuyla ispatlayınız.
- Dağılım yasalarını, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, doğruluk tablosuyla ispatlayınız. Birleşme yasalarını tablo kurmadan, sözlü bir gerekçeyle ispatlayınız.
- Geçişlilik yasasının, yani $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ önermesinin bir totoloji olduğunu doğruluk tablosuyla gösteriniz.
- “Bir tam sayı 6 ile bölünüyorsa 3 ile bölünür.” önermesinin karıştını, tersini ve karışt tersini yazınız; her birinin doğru olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Önce iç parçaları, sonra bütünü hesaplayalım:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
D	D	D	D	Y	Y	D	Y
D	Y	D	Y	D	D	Y	D
Y	D	D	Y	D	D	Y	D
Y	Y	Y	Y	D	Y	D	Y

Dışlayıcı veya yalnızca p ile q ’dan tam biri doğruyken doğrudur; altıncı ve sekizinci sütunlar aynı olduğundan $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$.

b) Tabloyu kuralım:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
D	D	D	Y	Y	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	D

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
Y	D	Y	D	D	Y	D
Y	Y	Y	D	D	D	D

Dördüncü ve yedinci sütunlar aynıdır; $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. Sözle: “ p ve q ” yanlışsa en az biri yanlıştır; en az biri yanlışsa “ p ve q ” yanlıştır.

c) Üç önerme olduğundan tablo sekiz satırlıdır. Sol tarafı $q \vee r$ üzerinden, sağ tarafı $p \wedge q$ ve $p \wedge r$ üzerinden hesaplayalım:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	D	D	Y	D
D	Y	D	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y	Y	Y	Y
Y	D	Y	D	Y	Y	Y	Y
Y	Y	D	D	Y	Y	Y	Y
Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

Beşinci ve sekizinci sütunlar aynıdır; birinci dağılma yasası kanıtlanmıştır. İkinci dağılma yasası için aynı sekiz satırı kullanalım:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	Y	D	D	D	D
D	Y	D	Y	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	D	D	D
Y	D	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	Y	Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

Yine beşinci ve sekizinci sütunlar aynıdır; ikinci dağılma yasası da kanıtlanmıştır.

Birleşme yasaları için tabloya gerek yoktur. $(p \vee q) \vee r$ önermesi, [Tanım 1.6](#) gereği, ancak ve ancak $p \vee q$ ve r 'nin ikisi de yanlışken yanlıştır; $p \vee q$ 'nin yanlış olması da p ile q 'nin ikisinin yanlış olması demektir. Yani $(p \vee q) \vee r$ tam olarak p, q, r 'nin üçü de yanlışken yanlıştır. Aynı akıl yürütme $p \vee (q \vee r)$ için de “üçü de yanlışken yanlış” sonucunu verir; iki önermenin yanlış olduğu satırlar aynı olduğundan tabloları aynıdır. Benzer biçimde $(p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ önermelerinin ikisi de tam olarak p, q, r 'nin üçü de doğruyken doğrudur.

d) Sekiz satırlı tabloyu kuralım. Koşullu sütunlarda yalnızca “hipotez D, sonuç Y” satırına Y yazılır:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	Y	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D	D

Son sütun sekiz satırda da D'dir; önerme bir tautolojidir. Tabloda görülen bir ayrıntı: altıncı satırda $p \Rightarrow r$ doğru olmasına karşın $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ yanlıştır. Bu yüzden geçişlilik bir denklik değil, tek yönlü bir gerektirir.

e) p : “Tam sayı 6 ile bölünür.”, q : “Tam sayı 3 ile bölünür.” olsun; verilen önerme $p \Rightarrow q$ 'dur ve doğrudur: 6 ile bölünen bir sayı $6k = 3(2k)$ biçimindedir, dolayısıyla 3 ile de bölünür.

- Karşıtı ($q \Rightarrow p$): “Bir tam sayı 3 ile bölünüyorsa 6 ile bölünür.” Yanlıştır: 9 sayısı 3 ile bölünür ama 6 ile bölünmez.
- Tersi ($\neg p \Rightarrow \neg q$): “Bir tam sayı 6 ile bölünmüyorsa 3 ile bölünmez.” Yanlıştır: yine 9 sayısı 6 ile bölünmez ama 3 ile bölünür. (Ters, karşıta denk olduğundan aynı örnek ikisini de çürütür.)
- Karşıt tersi ($\neg q \Rightarrow \neg p$): “Bir tam sayı 3 ile bölünmüyorsa 6 ile bölünmez.” Doğrudur, çünkü özgün önermeye denktir: 6 ile bölünseydi 3 ile de bölünürdü.

■

Önermeler ve bağlaçlar hazır. Ancak matematiğin gerçek cümleleri “her x için” ve “öyle bir y vardır ki” gibi ifadeler içerir; bunları ve teorem ispatlamanın temel yöntemlerini bir sonraki bölümde ele alıyoruz: [Niceleyiciler ve İspat Yöntemleri](#).

2. Niceleyiciler ve İspat Yöntemleri

Önceki bölümde önermeleri bağlaçlarla birleştirmeyi öğrendik. Ne var ki analizdeki cümlelerin neredeyse hiçbiri “ $2 + 2 = 4$ ” gibi tek bir yargı değildir; “her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N vardır ki ...” biçimindedir. Bu cümleleri kesin olarak yazabilmek ve özellikle olumsuzlayabilmek için iki yeni sembole ihtiyacımız var: “her” anlamındaki $\forall$ ve “vardır” anlamındaki $\exists$.

Bölümün ikinci yarısında matematiğin asıl işine, teorem ispatlamaya geçiyoruz. Doğrudan ispat, karşıt tersle ispat, olmayana ergi, iki yönlü ispat, karşıt örnekle çürütme ve durumlara ayırma yöntemlerinin her birini önce mantıksal olarak gerekçelendirip sonra örneklerle uygulayacağız. Bu bölümden sonra kitaptaki her ispat, burada adı konan kalıplardan birine ya da birkaçına oturacaktır.

2.1 Açık Önergeler ve Niceleyiciler

“ $x > 4$ ” ifadesini düşünelim. Bu, tek başına bir önerme değildir; doğruluğu x ’in değerine bağlıdır. $x = 5$ alırsak “ $5 > 4$ ” doğru, $x = 2$ alırsak “ $2 > 4$ ” yanlış bir önermedir. Üstelik ifadenin anlamlı olması için x ’in hangi kümeden seçildiğini de söylemek gerekir: x bir reel sayı mı, bir doğal sayı mı?

Tanım 2.1 (Açık Önerme). İçinde bir ya da daha çok değişken bulunan ve değişkenlere belirli bir X kümesinden (**evren kümesi**) değer verildiğinde bir önermeye dönüşen ifadeye **açık önerme** (predicate, open sentence) denir. Değişkeni x olan bir açık önerme $p(x)$, değişkenleri x, y olan bir açık önerme $p(x, y)$ ile gösterilir.

Örneğin $p(x)$: “ $x > 4$ ” ifadesi, evren kümesi $\mathbb{R}$ olan bir açık önermedir; $p(5)$ doğru, $p(2)$ yanlış bir önermedir. $q(n)$: “ n asaldır” ifadesi, evren kümesi $\mathbb{N}$ olan bir açık önermedir; $q(7)$ doğru, $q(8)$ yanlıştır. Bir açık önermeyi önermeye çevirmenin iki yolu vardır: ya değişkene somut bir değer veririz ya da “bütün x ’ler için” veya “en az bir x için” diyerek değişkeni **niceleriz**. İkinci yol için kullanılan sembollere niceleyici denir.

Tanım 2.2 (Tümel ve Varlıksal Niceleyici). $p(x)$, evren kümesi X olan bir açık önerme olsun.

1. **Tümel niceleyici** (universal quantifier) $\forall$: “ $\forall x \in X, p(x)$ ” önermesi, “ X ’in her x elemanı için $p(x)$ doğrudur” anlamına gelir. Bu önerme ancak ve ancak X ’in **bütün** elemanları p özelliğini sağlıyorsa doğrudur; özelliği sağlamayan tek bir eleman bile varsa yanlıştır. “Her x için”, “bütün x ’ler için”, “keyfi bir x için” diye okunur.
2. **Varlıksal niceleyici** (existential quantifier) $\exists$: “ $\exists x \in X, p(x)$ ” önermesi, “ X ’te $p(x)$ ’i doğru yapan en az bir x elemanı vardır” anlamına gelir. Bu önerme ancak ve ancak X ’in **en az bir** elemanı p özelliğini sağlıyorsa doğrudur. “Öyle bir x vardır ki”, “bazı x ’ler için”, “en az bir x için” diye okunur.
3. **Teklik niceleyicisi** $\exists!$: “ $\exists! x \in X, p(x)$ ” önermesi, “ $p(x)$ ’i doğru yapan **tam olarak bir** $x \in X$ vardır” anlamına gelir.

Tanımdaki farkı bir kez daha vurgulayalım: $\forall x \in X, p(x)$ için özelliğin *herkeste* olması gerekir; $\exists x \in X, p(x)$ için *birinde* olması yeter. Şu örnekleri inceleyelim:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: “Her reel sayının karesi sıfırdan büyük ya da sıfıra eşittir.” Hangi reel sayıyı seçersek seçelim karesi negatif olmadığından bu önerme doğrudur.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$: Yanlıştır, çünkü $x = 0$ için $0^2 > 0$ sağlanmaz. Tek bir istisna tümel önermeyi yanlış yapar.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$: Doğrudur; $x = \sqrt{2}$ böyle bir sayıdır. (Böyle bir reel sayının gerçekten var olduğunu ileride aksiyomlardan ispatlayacağız: [Teorem 13.1](#).)
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$: Yanlıştır; hiçbir reel sayının karesi negatif değildir.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: Doğrudur.
- $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 7$: Doğrudur; denklemleri sağlayan tek reel sayı $x = 3$ ’tür.

- $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$: Yanlıştır; $x = 2$ ve $x = -2$ olmak üzere iki çözüm vardır. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ ise doğrudur.

i Teklik niceleyicisi diğer ikisiyle yazılabilir

“Tam olarak bir x vardır” demek, “en az bir x vardır ve özelliği sağlayan her y , bu x ’e eşittir” demektir:

$$\exists! x \in X, p(x) \equiv \exists x \in X, [p(x) \wedge \forall y \in X, (p(y) \Rightarrow y = x)] .$$

Bu yüzden bir “teklik” teoremi (limitin tekliği, supremumun tekliği gibi) her zaman iki adımda ispatlanır: önce **varlık**, sonra **teklik**. Teklik için de standart yol, özelliği sağlayan iki aday x ve y alıp $x = y$ olmak zorunda olduğunu göstermektir.

Niceleyiciler, aslında “ve” ile “veya” bağlaçlarının sonsuz kümelere genellenmesidir. Evren kümesi sonlu, diyelim $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise

$$\forall x \in X, p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n), \quad \exists x \in X, p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n).$$

Bu gözlem, niceleyicilerin olumsuzlama kuralının neden De Morgan yasalarına bu kadar benzediğini açıklar.

2.2 Niceleyicilerin Olumsuzlanması

“Herkes sınavı geçti” cümlesinin yanlış olması için ne gerekir? Herkesin kalması değil; **bir kişinin** kalması yeter. “Birisini sınavı geçti” cümlesinin yanlış olması içinse **herkesin** kalmış olması gerekir. Kural budur: niceleyiciyi çevir, içerideki önermeyi olumsuzla.

Teorem 2.1 (Niceleyicilerin Olumsuzlanması). $p(x)$, evren kümesi X olan bir açık önerme olsun.

1. $\neg (\forall x \in X, p(x)) \equiv \exists x \in X, \neg p(x)$.
2. $\neg (\exists x \in X, p(x)) \equiv \forall x \in X, \neg p(x)$.

İspat.

(1) İki önermenin tam olarak aynı koşulda doğru olduğunu gösterelim; bu, doğruluk tablolarının aynı olması demektir.

$\neg(\forall x \in X, p(x))$ önermesi doğrudur $\Leftrightarrow \forall x \in X, p(x)$ önermesi yanlıştır (Tanım 1.2) $\Leftrightarrow$ “ X ’in bütün elemanları p özelliğini sağlar” iddiası doğru değildir, yani $p(x)$ ’in yanlış olduğu en az bir $x \in X$ vardır (Tanım 2.2, tümel niceleyicinin “tek istisna yeter” kuralı) $\Leftrightarrow \neg p(x)$ ’in doğru olduğu en az bir $x \in X$ vardır $\Leftrightarrow \exists x \in X, \neg p(x)$ önermesi doğrudur (Tanım 2.2, varlıksal niceleyici).

Zincirin her halkası bir “ancak ve ancak” olduğundan iki önerme birlikte doğru, birlikte yanlıştır; yani denktirler.

(2) Birinci kuralı $q(x) = \neg p(x)$ açık önermesine uygulayalım:

$$\neg (\forall x \in X, \neg p(x)) \equiv \exists x \in X, \neg(\neg p(x)) \equiv \exists x \in X, p(x),$$

son adımda Önerme 1.1 kullanıldı. Denk iki önermenin olumsuzlamaları da denktir; her iki tarafı olumsuzlayıp sol tarafta tekrar çift olumsuzlama yasasını kullanırsak

$$\forall x \in X, \neg p(x) \equiv \neg (\exists x \in X, p(x))$$

elde ederiz; bu da (2)’dir.

X sonlu olduğunda bu kuralların, $\forall$ ’yı $\wedge$ zinciri ve $\exists$ ’yı $\vee$ zinciri olarak yazıp Teorem 1.1 (6) De Morgan yasalarını uygulamaktan başka bir şey olmadığına dikkat edin.

■

Teorem, analizdeki tanımların olumsuzlamalarını mekanik olarak yazmamızı sağlar; “yakınsak değil”, “sınırlı değil”, “sürekli değil” gibi ifadelerin ne demek olduğunu hep bu kuralla bulacağız. Birkaç örnek:

- “Her öğrenci sınavı geçti.” önermesinin olumsuzlaması “Sınavı geçemeyen bir öğrenci vardır.” önermesidir.
- “Bazı asal sayılar çifttir.” önermesinin olumsuzlaması “Hiçbir asal sayı çift değildir.” önermesidir.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ önermesinin olumsuzlanması $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ 'dır. Olumsuzlama doğrudur ($x = 0$), dolayısıyla özgün önerme yanlıştır.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ önermesinin olumsuzlanması $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$ 'dir; olumsuzlama doğru, özgün önerme yanlıştır.

⚠ Evren kümesi değişmez

Olumsuzlama alırken değişkenin evren kümesi (örneğin $x \in \mathbb{N}$) olduğu gibi kalır; işlem yalnızca niceleyiciyi ve içerideki önermeyi etkiler.

- $\forall x \in \mathbb{N}, p(x)$ önermesinin olumsuzlanması $\exists x \notin \mathbb{N}, \dots$ **değildir**.
- Doğrusu: $\neg(\forall x \in \mathbb{N}, p(x)) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \neg p(x)$.

" $\forall x \in \mathbb{N}$ " ifadesi, " x doğal sayıysa" koşulunu içerir; olumsuzlamada aradığımız istisna da yine bir doğal sayı olmalıdır.

Olumsuzlama kuralı, aynı zamanda ispat stratejilerimizi belirler.

💡 Niceleyicili önermeler nasıl ispatlanır?

- $\forall x \in X, p(x)$ biçiminde bir önermeyi ispatlamak için: X 'ten **keyfi** bir x alınır (" $x \in X$ olsun") ve bu x hakkında X 'e ait olmasından başka hiçbir şey varsaymadan $p(x)$ 'in doğru olduğu gösterilir. x keyfi olduğundan sonuç bütün elemanlar için geçerlidir. Tek tek örnekler denemek ispat değildir; sonsuz kümede örnekler asla tükenmez.
- $\exists x \in X, p(x)$ biçiminde bir önermeyi ispatlamak için: $p(x)$ 'i sağlayan **tek bir** $x \in X$ bulmak (ve gerçekten sağladığını doğrulamak) yeter. Buna **varlık ispatı** denir. Elemanı açıkça yazmak şart değildir; var olduğunu dolaylı yoldan göstermek de kabul edilir.
- $\forall x \in X, p(x)$ biçiminde bir önermeyi **çürütmek** için: **Teorem 2.1** gereği $\neg p(x)$ 'i sağlayan tek bir x bulmak yeter; buna **karşıt örnek** denir.
- $\exists! x \in X, p(x)$ için: önce varlık, sonra teklik gösterilir.

Örnek 2.1 (Bir Varlık ve Bir Tümel İspat). Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$.

Çözüm.

(1) Varlık ispatı: tek bir örnek yeter. $x = \frac{1}{2}$ alalım. $x^2 = \frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ olduğundan $x > x^2$ sağlanır. Demek ki önerme doğrudur. (0 ile 1 arasındaki her sayı işe yarar; ama bir tanesi yeter.)

(2) Tümel ispat: keyfi bir eleman alıp özelliği gösterelim. $x \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. Kareyi tamamlayalım:

$$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1.$$

Bir reel sayının karesi negatif olamaz (bu okul bilgisini şimdilik kabul ediyoruz; sıralama aksiyomlarından ispatı **Önerme 7.12**'nde verilecek): $(x - 1)^2 \geq 0$. Her iki tarafa 1 ekleyince $(x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ bulunur. x keyfi olduğundan eşitsizlik her reel sayı için doğrudur.

Dikkat: (2)'de $x = 0, 1, 2, 3$ için denklemi hesaplayıp "hep pozitif çıkıyor" demek ispat değildir; keyfi x ile yapılan hesap ispattır.

■

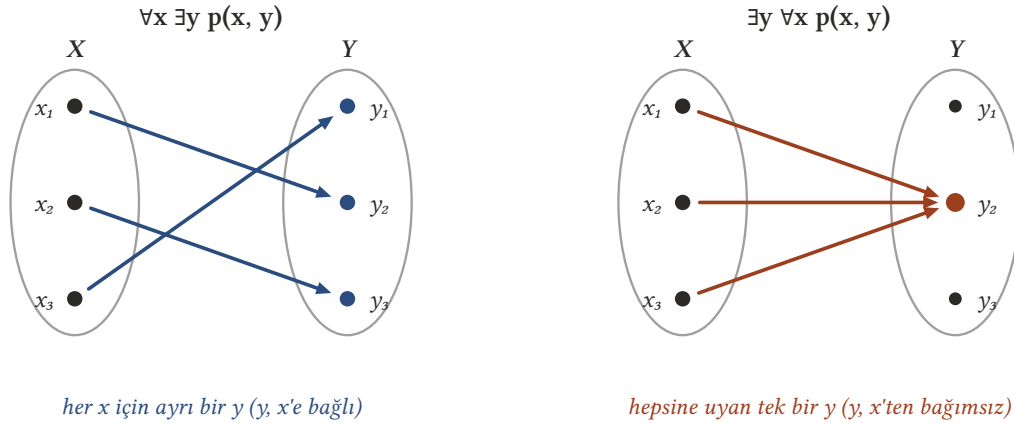
2.3 İç İçe Niceleyiciler ve Sıranın Önemi

Analizdeki tanımlar çoğunlukla birden çok niceleyici içerir ve niceleyicilerin **sırası** anlamı tamamen değiştirebilir. $p(x, y)$, $x \in X$ ve $y \in Y$ değişkenlerine bağlı bir açık önerme olsun. İki temel durum vardır. **Durum 1:** $\forall x \in X, \exists y \in Y, p(x, y)$. Anlamı: "Her x için, ona **bağlı** en az bir y vardır." Burada y 'nin seçimi x 'e bağlıdır; x değişince y de değişebilir. Bu bağımlılığı vurgulamak için bazen y yerine y_x yazılır. Örnek: "Her insanın bir annesi vardır." Anne (y), kişiye (x) göre değişir.

Durum 2: $\exists y \in Y, \forall x \in X, p(x, y)$. Anlamı: “Bütün x ’ler için **aynı anda** işe yarayan tek bir y vardır.” Burada y , x ’ten tamamen bağımsızdır; sabit bir y değeri, her x için $p(x, y)$ ’yi doğru yapar. Örnek: “Herkesin annesi olan tek bir insan vardır.” Bu önerme açıkça yanlıştır.

i Sıra neden bu kadar önemli?

Aynı $p(x, y)$ açık önermesi için Durum 1 doğru, Durum 2 yanlış olabilir. $\forall$ ile $\exists$ ’nın yerini değiştirmek, “herkese uygun ayrı ayrı bir şey bulabilirim” iddiasını “herkese uyan tek bir şey var” iddiasına dönüştürür; ikincisi çok daha güçlü bir iddiadır. Genel olarak Durum 2, Durum 1’i gerektirir (herkese uyan tek y varsa her x için bir y vardır: hep o), ama tersi doğru değildir.



Şekil 2.1: Solda $\forall x \exists y$: her x için ona uygun bir y seçilir ve seçim x ’ten x ’e değişebilir. Sağda $\exists y \forall x$: önce tek bir y sabitlenir ve bu y bütün x ’ler için işe yarar. İkincisi birinciyi gerektirir; tersi doğru değildir.

Öte yandan aynı türden iki niceleyicinin sırası önemsizdir: $\forall x \forall y$ ile $\forall y \forall x$ aynı şeyi söyler, $\exists x \exists y$ ile $\exists y \exists x$ de öyle.

Analizden üç örnek, bu ayrımın ne kadar temel olduğunu gösterir:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon$. Bu, “ (a_n) dizisi a ’ya yakınsar” ifadesinin tanımıdır (**Tanım 20.1**). Her ε için ona bağlı bir N (çoğu zaman N_ε yazılır) bulunur; ε küçüldükçe N genellikle büyür. Sıra $\exists N, \forall \varepsilon$ olsaydı, bütün ε ’lar için tek bir N istenirdi; bu, N ’den sonraki bütün terimlerin a ’ya eşit olması demektir ve bambaşka, çok daha güçlü bir koşuldur.
- $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$. Bu, “ (a_n) dizisi sınırlıdır” demektir (**Tanım 19.3**; sınırlılık orada üst ve alt sınırla tanımlanır, buradaki mutlak değerli biçime denkliği **Önerme 19.1**’de gösterilecek): dizinin **bütün** terimlerini birden bastıran tek bir M vardır; M , n ’den bağımsızdır. Sıra $\forall n, \exists M$ olsaydı her terim için ayrı bir M seçebilirdik ($M = |a_n| + 1$ gibi) ve önerme her dizi için doğru, yani içeriksiz olurdu.
- $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, 3y > x$: “Her doğal sayıdan büyük bir 3 katı vardır.” Doğrudur: x verilince $y = x$ alınırsa $3x > x$ olur. Sırası değiştirilmiş $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, 3y > x$ önermesi ise “bütün doğal sayılardan büyük bir 3 katı vardır” der ve yanlıştır: y ne olursa olsun $x = 3y$ için $3y > 3y$ sağlanmaz.

İç içe niceleyicilerin olumsuzlanması için kural değişmez: **Teorem 2.1** dıştan içe doğru art arda uygulanır.

Sonuç 2.1 (İç İçe Niceleyicilerin Olumsuzlanması). $p(x, y)$, $x \in X$ ve $y \in Y$ değişkenli bir açık önerme olsun.

1. $\neg (\forall x \in X, \exists y \in Y, p(x, y)) \equiv \exists x \in X, \forall y \in Y, \neg p(x, y)$.
2. $\neg (\exists x \in X, \forall y \in Y, p(x, y)) \equiv \forall x \in X, \exists y \in Y, \neg p(x, y)$.

Genel kural: bütün niceleyiciler sırası korunarak çevrilir ($\forall \leftrightarrow \exists$), sondaki önerme olumsuzlanır.

İspat.

(1) $q(x)$ ile $\exists y \in Y, p(x, y)$ açık önermesini gösterelim; olumsuzlanacak önerme $\forall x \in X, q(x)$ ’tir. **Teorem 2.1** (1) ile

$$\neg (\forall x \in X, q(x)) \equiv \exists x \in X, \neg q(x).$$

Şimdi $\neg q(x) = \neg(\exists y \in Y, p(x, y))$ ifadesine [Teorem 2.1 \(2\)](#)'yi uygulayalım: $\neg q(x) \equiv \forall y \in Y, \neg p(x, y)$. Yerine yazınca (1) elde edilir.

(2) Aynı biçimde: önce dıştaki $\exists$ için kural (2), sonra içteki $\forall$ için kural (1) uygulanır.

■

Örnek olarak yakınsaklık tanımını olumsuzlayalım; “ (a_n) dizisi a 'ya yakınsamaz” ne demektir?

$$\neg (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon) \equiv \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Sözle: öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, N 'yi ne kadar büyük seçersek seçelim, N 'den sonra a 'dan en az ε uzakta kalan bir terim bulunur. Burada iki küçük noktaya dikkat edin. Birincisi, “ $\forall n \geq N$ ” ifadesi aslında “ $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \dots)$ ” kısaltmasıdır; olumsuzlaması [Sonuç 1.1](#) ile “ $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \wedge \neg \dots)$ ”, yani “ $\exists n \geq N, \neg \dots$ ” olur. İkincisi, “ $\forall \varepsilon > 0$ ” ifadesi de “ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, (\varepsilon > 0 \Rightarrow \dots)$ ” kısaltmasıdır ve aynı nedenle olumsuzlaması “ $\exists \varepsilon > 0, \neg \dots$ ”dır: evren değişmez, ε yine pozitiftir.

Bir örnek daha: $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \exists y > x$ önermesinin olumsuzlaması $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists y \leq x$ 'tir: “bütün 3 katlarından büyük ya da onlara eşit bir doğal sayı vardır.” Bu yanlıştır; dolayısıyla özgün önerme doğrudur, zaten yukarıda doğrudan göstermiştik.

2.4 Sözel İfadeleri Sembollere Çevirme

Matematikte uzun sözel cümleleri kısa ve kesin sembollerle yazmak yaygın bir alışkanlıktır: belirsizliği önler ve önerme üzerinde işlem yapmayı (özellikle olumsuzlama almayı) kolaylaştırır. Tersi de aynı derecede önemlidir; sembolik bir ifadeyi okuyup sözle ne dediğini anlayabilmek gerekir. Bağlama göre iki biçim de kullanılır.

- “Bazı reel sayılar karelerinden büyüktür.” $\rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
- “Her reel sayının karesi negatif değildir.” $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- “ U 'nun her a elemanı için öyle bir pozitif δ sayısı vardır ki, $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her x reel sayısı U 'nun elemanıdır.” $\rightarrow$

$$\forall a \in U, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \delta \Rightarrow x \in U).$$

Son ifade ileride “açık küme” tanımı olarak karşımıza çıkacak ([Tanım 15.4](#)); δ 'nın a 'ya bağlı olduğunu vurgulamak için δ_a yazıldığı da olur.

Sembolik yazım, bir koşullu önermenin karşıtını ve karşıt tersini bulmayı da kolaylaştırır. Bir önceki bölümde gördüğümüz gibi, bir önermenin karşıtı (converse), tersi (inverse), karşıt tersi (contrapositive) ve olumsuzlaması (negation) birbirinden farklı şeylerdir; bunları ayırt edebilmek gerekir.

Örnek 2.2 (Niceleyicili Koşullu Önermenin Karşıtı ve Karşıt Tersi). “Her $x \in \mathbb{R}$ için, $x > 4$ ise $x^2 > 16$ 'dır.” önermesinin karşıtını ve karşıt tersini yazınız; hangileri doğrudur?

Çözüm.

Önerme sembolle $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 4 \Rightarrow x^2 > 16)$ biçimindedir. Karşıt ve karşıt ters, niceleyicinin içindeki koşullu önermeye uygulanır ([Tanım 1.9](#)):

- Karşıtı: $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 16 \Rightarrow x > 4)$; sözle “her reel x için, $x^2 > 16$ ise $x > 4$ 'tür.”
- Karşıt tersi: $\forall x \in \mathbb{R}, (\neg(x^2 > 16) \Rightarrow \neg(x > 4))$, yani $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \leq 16 \Rightarrow x \leq 4)$; sözle “her reel x için, $x^2 \leq 16$ ise $x \leq 4$ 'tür.”

Özgün önerme doğrudur: $x > 4$ ise $x^2 > 4x > 16$ olur. Karşıt ters, özgün önermeye denk olduğundan ([Teorem 1.1 \(7\)](#)) o da doğrudur. Karşıt ise yanlıştır: $x = -5$ için $(-5)^2 = 25 > 16$ sağlanır ama $-5 > 4$ sağlanmaz. Yani $x = -5$ karşıt için bir karşıt örnektir. (Karşıtın doğru olan biçimi “ $x^2 > 16 \Rightarrow x > 4 \vee x < -4$ ” olurdu.)

Bu arada $x \leq 4$ olan bir x için koşullu önerme “boşlukla doğru”dur: hipotez sağlanmadığından koşul sıranmaz. Tümel önermenin bütün x 'ler üzerinde doğru olması işte bu yüzden yalnızca $x > 4$ olanları kontrol etmeyi gerektirir.

■

2.5 İspat Yöntemleri

Matematikte bir teorem, ispatlanmış bir gerçeği ifade eder; ispatı da bu gerçeğin neden doğru olduğunun adım adım, mantıksal açıklamasıdır. Teoremlerin büyük çoğunluğu $p \Rightarrow q$ yapısındadır: p **hipotez** (verilen, varsayılan), q **sonuç** (ispatlanacak) kısımdır. İspatın amacı, p 'nin doğru olduğu varsayımı altında q 'nin de zorunlu olarak doğru olduğunu göstermektir. [Tanım 1.7](#) gereği $p \Rightarrow q$ yalnızca “ p doğru, q yanlış” durumunda yanlış olduğundan, bu durumun oluşamayacağını göstermek yeter.

Çoğu teorem ayrıca gizli bir tümel niceleyici taşır: “ n^2 çift ise n çifttir” aslında “her n tam sayısı için, n^2 çift ise n çifttir” demektir. Bu yüzden ispat, keyfi bir n ile başlar.

Aşağıdaki örneklerde tam sayılarla ilgili şu bilgileri kullanacağız: bir n tam sayısı, bir k tam sayısı için $n = 2k$ biçimindeyse **çift**, $n = 2k + 1$ biçimindeyse **tek** sayıdır; her tam sayı bunlardan tam biridir. Tam sayıların toplamı ve çarpımı yine tam sayıdır. Bu kavramların aksiyomlardan kuruluşunu ileride [Tam Sayılar ve Rasyonel Sayılar](#) bölümünde ([Tanım 11.2](#)) vereceğiz; şimdilik ispat *teknikine* odaklanıyoruz.

2.5.1 Doğrudan İspat

En doğal yöntem budur: hipotezi kabul eder, tanımları ve bilinen sonuçları kullanarak adım adım sonuca yürürüz.

1. p 'nin doğru olduğunu varsay.
2. Mantıksal bir zincir kur: $p \Rightarrow r, r \Rightarrow s, \dots, z \Rightarrow q$ (her adım bir tanım, bir aksiyom ya da ispatlanmış bir sonuçtur).
3. Geçişlilik ([Teorem 1.1](#) (5)) ile $p \Rightarrow q$ sonucuna var.

Teoremlerin çoğu bu yöntemle ispatlanır.

Örnek 2.3 (İki Tek Sayının Çarpımı Tektir). İki tek tam sayının çarpımının tek olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

m ve n keyfi iki tek tam sayı olsun (hipotez). Tek sayı tanımı gereği $m = 2k_1 + 1$ ve $n = 2k_2 + 1$ olacak biçimde k_1, k_2 tam sayıları vardır. Çarpımı hesaplayalım:

$$m \cdot n = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1.$$

k_1 ve k_2 tam sayı olduğundan $k = 2k_1k_2 + k_1 + k_2$ de bir tam sayıdır; dolayısıyla $mn = 2k + 1$ biçimindedir, yani tek sayı tanımını sağlar. m ve n keyfi olduğundan iddia bütün tek sayı çiftleri için doğrudur.

■

Bir doğrudan ispat örneği daha: bölünebilme, tanımı kullanılarak zincir kurmanın güzel bir örneğidir. a ve b tam sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere, $b = ak$ olacak biçimde bir k tam sayısı varsa “ a , b 'yi böler” der ve $a \mid b$ yazarız.

Örnek 2.4 (Bölünebilme Geçişlidir). a, b, c tam sayılar olsun. $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun (hipotez). Tanım gereği $b = ak$ ve $c = bl$ olacak biçimde k, l tam sayıları vardır. İkinci eşitlikte b yerine ak yazalım:

$$c = bl = (ak)l = a(kl).$$

kl bir tam sayı olduğundan c , a 'nın bir tam sayı katıdır; yani $a \mid c$. Zincir şuydu: hipotez $\Rightarrow b = ak, c = bl \Rightarrow c = a(kl) \Rightarrow$ sonuç.

■

2.5.2 Karşıt Tersle İspat

$p \Rightarrow q$ yerine, ona denk olan ([Teorem 1.1](#) (7)) $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesini doğrudan ispatlarız. Bazı durumlarda bu çok daha kolaydır; özellikle sonuç q “değil”li ya da hipotezden geri gitmesi zor bir ifadeyse.

1. $\neg q$ 'nın doğru olduğunu varsay (sonucun yanlış olduğunu).
2. Mantıksal adımlarla $\neg p$ 'nin doğru olduğunu göster (hipotezin de yanlış olduğunu).
3. $\neg q \Rightarrow \neg p$ ispatlandığından, ona denk olan $p \Rightarrow q$ da ispatlanmıştır.

Örnek 2.5 (Karesi Çift Olan Tam Sayı Çifttir). n bir tam sayı olsun. n^2 çift ise n 'nin çift olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Doğrudan ispat denersek $n^2 = 2k$ eşitliğinden n hakkında bir şey söylemek zordur: $n = \sqrt{2k}$ yazmak bize n 'nin çift olduğunu göstermez. Karşıt tersi deneyelim: “ n çift değilse (yani tekse) n^2 çift değildir (yani tektir).”

n tek olsun. O hâlde bir k tam sayısı için $n = 2k + 1$ 'dir. Karesini alalım:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

$2k^2 + 2k$ bir tam sayı olduğundan n^2 tek sayı biçimindedir. Böylece karşıt ters, “ n tek $\Rightarrow n^2$ tek”, ispatlanmıştır; [Teorem 1.1](#) (7) gereği özgün önerme “ n^2 çift $\Rightarrow n$ çift” de doğrudur. (Aslında bu, [Örnek 2.3](#)'ün $m = n$ özel hâlidir.)

■

Örnek 2.6 (Üç n Artı İki Tek İse n Tektir). n bir tam sayı olsun. $3n + 2$ tek ise n 'nin tek olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Karşıt tersi ispatlayalım: “ n tek değilse (çiftse) $3n + 2$ tek değildir (çifttir).”

n çift olsun; bir k tam sayısı için $n = 2k$. O zaman

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1).$$

$3k + 1$ bir tam sayı olduğundan $3n + 2$ çifttir. Karşıt ters ispatlandığından özgün önerme de doğrudur. Neden karşıt ters daha kolaydı? Hipotez “ $3n + 2$ tek” bize $3n + 2 = 2k + 1$ verir; buradan n 'yi çekmek, $n = (2k - 1)/3$ 'ün tam sayı olup olmadığını tartışmayı gerektirirdi. Karşıt terste ise hipotez doğrudan n hakkındadır ve hesap kendiliğinden ilerler.

■

2.5.3 Olmayana Ergi (Çelişkiyle İspat)

Bu yöntem, ispatlanmak istenen önermenin yanlış olduğunu varsayıp mantıksal bir olanaksızlığa (çelişkiye) ulaşmaya dayanır. Çelişmezlik ilkesi gereği çelişki olamaz; demek ki varsayım yanlıştır ve üçüncü hâlin olmazlığı ilkesi gereği önerme doğrudur.

$p \Rightarrow q$ biçimindeki bir önerme için adımlar şöyledir:

1. Önermenin yanlış olduğunu varsay. [Sonuç 1.1](#) gereği $p \Rightarrow q$ 'nin yanlış olması, p 'nin doğru **ve** q 'nin yanlış olması demektir.
2. Yani p ve $\neg q$ 'nin ikisinin de doğru olduğunu varsayarak başla.
3. Bu iki varsayımdan bir çelişki türet: hem r hem $\neg r$ olan bir r önermesi (ya da $1 = 2$ gibi açıkça yanlış bir şey).
4. Adımlar geçerli olduğundan çelişkinin kaynağı başlangıç varsayımıdır.
5. Demek ki “ $p \Rightarrow q$ yanlıştır” varsayımı yanlıştır; önerme doğrudur.

Niceleyicili bir önerme için de aynı şey yapılır: “ $\forall x, p(x)$ ” yanlış olsun, yani $\neg p(x_0)$ olan bir x_0 olsun, deyip çelişki aranır.

Örnek 2.7 (Kök İki İrrasyoneldir). $\sqrt{2}$ 'nin irrasyonel olduğunu, yani a, b tam sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayacağını ispatlayınız.

Çözüm.

Olmayana ergi ile ispatlayalım. Önermenin yanlış olduğunu, yani $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olduğunu varsayalım. O hâlde a, b tam sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

yazılabilir. Kesri sadeleştirilmiş kabul edebiliriz (pay ile paydanın ortak böleni varsa ikisini de ona böleriz; kesrin değeri değişmez): a ile b 'nin 1'den başka ortak pozitif böleni yoktur (aralarında asaldır). Özel olarak a ve b **ikisi birden çift olamaz**; çift olsalardı ortak bölen 2 olurdu.

Her iki tarafın karesini alalım: $2 = \frac{a^2}{b^2}$, yani

$$a^2 = 2b^2.$$

Sağ taraf 2'nin bir tam sayı katı olduğundan a^2 çifttir. **Örnek 2.5** gereği a çifttir; bir k tam sayısı için $a = 2k$ yazalım. Yerine koyunca

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2.$$

Demek ki b^2 de çifttir ve yine **Örnek 2.5** gereği b çifttir.

Böylece hem a hem b çift çıktı; bu, " a ve b ikisi birden çift olamaz" bilgisiyle çelişir. Çelişkiye, " $\sqrt{2}$ rasyoneldir" varsayımından geçerli adımlarla ulaştığımız için bu varsayım yanlıştır: $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

■

Bu ispat, Pisagorcuların "her uzunluk iki tam sayının oranıdır" inancını yıkan, matematik tarihinin en ünlü ispatlarından biridir. Burada " $\sqrt{2}$ " ile karesi 2 olan pozitif reel sayıyı kastettik ve varlığını kabul ettik; varlığın ispatı ve bu sonucun sıralı cisim aksiyomlarına dayanan sürümü için bkz. **Teorem 13.1** ve **Teorem 13.3**.

İkinci bir olmayana ergi örneği, Öklid'e ait bir başka klasiktir.

Örnek 2.8 (Sonsuz Çoklukta Asal Sayı Vardır). 1'den büyük ve 1 ile kendisinden başka pozitif böleni olmayan doğal sayılara asal sayı denir. Sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Önce bir yardımcı gözlem: 1'den büyük her N doğal sayısının bir asal böleni vardır. Gerçekten, N 'nin 1'den büyük bölenleri kümesi boş değildir (N kendisi bu kümededir), dolayısıyla en küçük elemanı p vardır (doğal sayıların her boş olmayan alt kümesinin en küçük elemanı olduğunu ileride ispatlayacağız: **Teorem 9.2**). Bu p asaldır: p 'nin $1 < d < p$ koşulunu sağlayan bir d böleni olsaydı, $d \mid p$ ve $p \mid N$ olduğundan **Örnek 2.4** gereği d de N 'yi bölerdi; o zaman d , N 'nin 1'den büyük bölenleri kümesinde p 'den küçük bir eleman olurdu ve bu, p 'nin bu kümenin en küçük elemanı seçilmesiyle çelişir.

Şimdi olmayana ergi. Sonlu çoklukta asal sayı olduğunu varsayalım ve hepsini listeleyelim: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Şu sayıyı kuralım:

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

$N > 1$ olduğundan yardımcı gözlem gereği N 'nin bir asal böleni p vardır. Bütün asallar listede olduğuna göre p , listedeki p_i 'lerden biridir. O hâlde p , hem N 'yi hem de $p_1 p_2 \cdots p_n$ çarpımını böler (çarpanlardan biridir); dolayısıyla farklarını da böler: $N = pu$ ve $p_1 p_2 \cdots p_n = pv$ ise $N - p_1 p_2 \cdots p_n = p(u - v)$ olur, yani

$$p \mid N - p_1 p_2 \cdots p_n = 1.$$

Ama $p > 1$ olan bir sayı 1'i bölemez. Bu bir çelişkidir. Demek ki asal sayılar sonlu çoklukta değildir. Dikkat: ispat, N 'nin kendisinin asal olduğunu iddia etmez; yalnızca listede olmayan bir asal bölenin var olduğunu gösterir. Örneğin $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ asal değildir.

■

i Karşıt tersle ispat ile olmayana ergi arasındaki fark

İkisi de $\neg q$ varsayımıyla başladığından sık sık karıştırılır. Karşıt tersle ispatta yalnızca $\neg q$ varsayılır ve hedef bellidir: $\neg p$ 'ye ulaşmak. Olmayana ergide hem p hem $\neg q$ varsayılır ve hedef herhangi bir çelişkidir; $\neg p$ 'ye ulaşmak bunlardan yalnızca biridir (çünkü $p \wedge \neg p$ bir çelişkidir). Bu yüzden olmayana ergi daha esnektir; ama elde daha çok varsayım olduğundan hangi adımın gerçekten gerekli olduğunu görmek bazen zorlaşır. Bir ispat “ $\neg q$ varsay ... $\neg p$ elde ettik, oysa p doğrudur, çelişki” biçimindeyse aslında bir karşıt ters ispatıdır ve öyle yazılması daha temizdir.

2.5.4 İki Yönlü İspat

$p \Leftrightarrow q$ (“ p ancak ve ancak q ”) biçimindeki bir teorem, [Örnek 1.2](#) gereği iki koşullu önermenin birleşimidir ve iki ayrı ispat gerektirir:

1. **Yeterlilik** ($\Rightarrow$ yönü): $p \Rightarrow q$ 'nin ispatı.
2. **Gereklilik** ($\Leftarrow$ yönü): $q \Rightarrow p$ 'nin ispatı.

Her yön için yukarıdaki yöntemlerden uygun olanı seçilebilir; iki yön farklı yöntemlerle ispatlanabilir. Teorem, iki yön de bitmeden ispatlanmış sayılmaz.

Örnek 2.9 (Bir Tam Sayı Çifttir Ancak ve Ancak Karesi Çiftse). n bir tam sayı olsun. n 'nin çift olması için gerek ve yeter koşulun n^2 'nin çift olması olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

($\Rightarrow$) n çift olsun; $n = 2k$ olacak biçimde bir k tam sayısı vardır. O zaman $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ve $2k^2$ tam sayı olduğundan n^2 çifttir. (Doğrudan ispat.)

($\Leftarrow$) n^2 çift olsun. [Örnek 2.5](#)'te karşıt tersle gösterildiği gibi n çifttir.

İki yön de ispatlandığından n çift $\Leftrightarrow n^2$ çift.

■

Bazen iki yön birden, her adımı bir denklik olan bir zincirle ispatlanır: $p \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow q$. Örneğin “ $x^2 = x$ ancak ve ancak $x = 0$ veya $x = 1$ ” iddiası

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

zinciriyle ispatlanır; üçüncü adımda “çarpım sıfırsa çarpanlardan biri sıfırdır” özelliği ([Önerme 6.13](#)) kullanılır. Böyle bir zincirde **her** okun gerçekten çift yönlü olduğundan emin olmak gerekir; tek yönlü bir adım sızarsa yalnızca bir yön ispatlanmış olur.

2.5.5 Tümevarım (Tanıtım)

Doğal sayılarla ilgili “her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ ” biçimindeki önermeler için çok güçlü bir yöntem vardır. Domino taşları gibi düşünün: ilk taş devriliyorsa ve her taş devrildiğinde bir sonrakini deviriyorsa, bütün taşlar devrilir. Buna karşılık gelen ilke şudur: $P(1)$ doğruysa ve her $k \in \mathbb{N}$ için “ $P(k)$ doğru ise $P(k + 1)$ doğru” gerektirmesi sağlanıyorsa, $P(n)$ her doğal sayı için doğrudur.

Bu ilkenin neden geçerli olduğu, doğal sayıların nasıl tanımlandığına bağlıdır ve ayrı bir bölümü hak eder. Tümevarım ilkesinin ispatını, uygulama örneklerini (toplam formülleri, eşitsizlikler, bölünebilme) ve güçlü tümevarımı [Doğal Sayılar ve Tümevarım](#) bölümünde ([Teorem 9.1](#)) ele alacağız. Şimdilik yalnızca varlığını ve ne tür önermeler için kullanıldığını bilmek yeter.

2.5.6 Karşıt Örnekle Çürütme

Bu yöntem bir önermenin **yanlış** olduğunu ispatlamak içindir ve özellikle $\forall x, p(x)$ biçimindeki tümel önermeler için idealdir. [Teorem 2.1](#) gereği $\forall x, p(x)$ önermesinin olumsuzlaması $\exists x, \neg p(x)$ 'tir; dolayısıyla $p(x)$ 'in yanlış olduğu **tek bir** x değeri bulmak, “her x için $p(x)$ ” iddiasını çürütmeye yeter. Bu, bir tür varlık ispatıdır: aradığımız şey, iddianın bozulduğu bir örnektir.

Örnek 2.10 (Asal Üreten Formül Sanısı). “Her n doğal sayısı için $f(n) = n^2 + n + 41$ bir asal sayıdır.” önermesinin yanlış olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Tek bir karşıt örnek yeter. Küçük değerler umut vericidir: $f(1) = 43, f(2) = 47, f(3) = 53$ hep asaldır; hatta $n = 1, 2, \dots, 39$ için $f(n)$ asaldır. Ama $n = 40$ alalım:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2.$$

1681 = 41 · 41 asal değildir. Dolayısıyla $n = 40$ bir karşıt örnektir ve önerme yanlıştır. ($n = 41$ de işe yarar: $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$.)

Bu örnek ayrıca “39 doğru örnek bir ispat değildir” dersini verir: kaç örnek denersek deneyelim, tümel bir önerme örneklerle ispatlanamaz.

■

Örnek 2.11 (Dört Katı Çift Olan Her Sayı Çift midir?). “Her x tam sayısı için, $4x$ çift ise x çifttir.” önermesinin yanlış olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Önerme $\forall x \in \mathbb{Z}, (4x \text{ çift} \Rightarrow x \text{ çift})$ biçimindedir. Olumsuzlaması, Teorem 2.1 ve Sonuç 1.1 ile, $\exists x \in \mathbb{Z}, (4x \text{ çift} \wedge x \text{ tek})$ ’tir; yani hipotezin sağlandığı ama sonucun sağlanmadığı bir x arıyoruz.

$x = 3$ alalım. $4 \cdot 3 = 12$ çifttir (hipotez doğru) ama 3 tektir (sonuç yanlış). Demek ki $x = 3$ bir karşıt örnektir ve önerme yanlıştır. (Aslında $4x$ her x için çift olduğundan, hipotez her zaman sağlanır ve her tek x karşıt örnektir.)

■

⚠ Örnek ispatlamaz, karşıt örnek çürütür

Bu bakışsızlık niceleyicilerden gelir. “Her x için $p(x)$ ” iddiasını **ispatlamak** için bütün x ’ler gerekir; örnekler yetmez. Aynı iddiayı **çürütmek** için tek bir x yeter. Tersine, “öyle bir x vardır ki $p(x)$ ” iddiasını ispatlamak için tek bir örnek yeter; çürütmek içinse bütün x ’ler için $\neg p(x)$ göstermek gerekir.

2.5.7 Durumlara Ayırma

Bazen bir teoremi tek bir akıl yürütmeye ispatlamak zordur. Bunun yerine önerme, **bütün olasılıkları kapsayan** birkaç duruma ayrılır ve her durum ayrı ayrı ispatlanır. Mantıksal temeli şudur: $p \equiv p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k$ ise (durumlar hipotezi tüketiyorsa) $p \Rightarrow q$ ’yu göstermek için $p_1 \Rightarrow q, \dots, p_k \Rightarrow q$ ’nun her birini göstermek yeter. Örneğin “her $x \in \mathbb{R}$ için $p(x)$ ” ispatlanacaksa $x > 0, x < 0$ ve $x = 0$ durumları ayrı ayrı ele alınabilir; üçlem yasası (Bölüm 7.1) bu üç durumun bütün reel sayıları kapsadığını garanti eder. Durumların eksiksiz olduğunu belirtmek ispatın parçasıdır.

Örnek 2.12 (n Kare Artı n Her Zaman Çifttir). Her n tam sayısı için $n^2 + n$ ’nin çift olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

n keyfi bir tam sayı olsun. $n^2 + n = n(n+1)$ olduğuna dikkat edelim. Her tam sayı ya çift ya tektir; bu iki durum bütün olasılıkları kapsar.

Durum 1: n çift. Bir k tam sayısı için $n = 2k$. O zaman $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k(2k+1))$ ve $k(2k+1)$ tam sayı olduğundan $n^2 + n$ çifttir.

Durum 2: n tek. Bir k tam sayısı için $n = 2k+1$. O zaman $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ ve $n(n+1) = (2k+1) \cdot 2(k+1) = 2((2k+1)(k+1))$; yine çifttir.

Her iki durumda da $n^2 + n$ çift olduğundan ve başka durum olmadığından iddia her n için doğrudur.

■

Yöntemleri toparlayalım: hepsi, önceki bölümdeki bir mantıksal gerçeğe dayanır.

Yöntem	Ne yapılır	Dayandığı mantık
Doğrudan ispat	p varsayılır, zincirle q 'ya gidilir	Geçişlilik, Teorem 1.1 (5)
Karşıt tersle ispat	$\neg q$ varsayılır, $\neg p$ gösterilir	$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$, Teorem 1.1 (7)
Olmayana ergi	p ve $\neg q$ varsayılır, çelişki bulunur	Sonuç 1.1 ve üçüncü hâlin olmazlığı
İki yönlü ispat	$p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ ayrı ayrı	Örnek 1.2
Karşıt örnek	$\neg p(x_0)$ olan bir x_0 bulunur	Teorem 2.1
Durumlara ayırma	Hipotez tüketici durumlara bölünür	$(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)$

Son satırdaki denklik de doğruluk tablosuyla kolayca doğrulanır: sol taraf yalnızca “ p_1 ya da p_2 doğru ve q yanlış” iken yanlıştır; sağ taraf da tam olarak o zaman yanlıştır.

⚠ İspat olmayan şeyler

Aşağıdakiler ispat **değildir**:

1. **Şekil ya da diyagram çizmek.** Şekiller problemi anlamak ve bir yol haritası çıkarmak için çok yararlıdır; ama tek başlarına asla ispatın yerini tutmazlar, kesin bir mantıksal akıl yürütme sunmazlar.
2. **Örnek vermek.** Örnek, iddiayı anlamaya yardım eder; iddianın kendisini ispatlamaz (karşıt örnek ise yalnızca *çürütür*).
3. **Atlama, ihmâl, eksik bırakma.** “Buradan kolayca görülür” denip geçilen adımlar çoğu zaman ispatın en zor yeridir.
4. **İddiayı küçümsemek ya da apaçık göstermek.** “İspat aşikârdır” cümlesi bir ispat değildir.
5. **Süslü dil, karmaşık formüller, ilgisiz sözcükler.** Anlaşılmaz olmak sağlam olmak demek değildir (bulanıklaştırma ile ispat).
6. **Birinin ya da bir otoritenin söylediğine güvenmek.** “Hocam öyle demişti” bir gerekçe değildir (otoriteye başvurma).
7. **Doğru gerekçelerle, makul görünen ama yanlış gerekçeleri karıştırmak.** Kulağa doğru gelen her adım geçerli değildir; her adımın hangi tanıma, aksiyoma ya da teoreme dayandığı söylenebilmelidir.

2.6 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Niceleyiciler ve İspat Yöntemleri Alıştırmaları).

a) Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini belirleyiniz, olumsuzlamalarını sembolle yazınız ve olumsuzlamanın doğruluk değerini kontrol ediniz.

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.
- (ii) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$.

b) Aşağıdaki sözel ifadeleri niceleyicilerle yazınız.

- (i) “Her pozitif reel sayının pozitif bir karekökü vardır.”
- (ii) “Her doğal sayıdan büyük bir asal sayı vardır.”
- (iii) “ A kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu sınırlıdır” ifadesi $\exists M > 0, \forall x \in A, |f(x)| \leq M$ demektir. “ f sınırlı değildir” ifadesini niceleyicilerle yazınız.

c) m ve n tam sayılar olsun. “ mn çift ise m çifttir veya n çifttir.” önermesini karşıt tersle ispatlayınız.

d) Önce “her n tam sayısı için, n^2 üçe bölünüyorsa n üçe bölünür” önermesini karşıt ters ve durumlara ayırma yöntemleriyle ispatlayınız. Sonra bunu kullanarak $\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu olmayana ergi ile ispatlayınız.

e) Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu karşıt örnekle gösteriniz.

(i) “Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n + 1$ asaldır.”

(ii) “Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 \geq 2n$.”

(iii) “Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq x$.”

Çözüm.

a) (i) Doğrudur: x verilince $y = x + 1$ alınırsa $y > x$ olur; y 'nin x 'e bağlı olması Durum 1'e uygundur. Olumsuzlaması (Sonuç 2.1): $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x$; “bütün reel sayılardan büyük ya da onlara eşit bir reel sayı vardır”, yani “ $\mathbb{R}$ 'nin en büyük elemanı vardır”. Bu yanlıştır; özgün önermenin doğru olmasıyla tutarlı.

(ii) Yanlıştır: hangi y seçilirse seçilsin $x = y$ (ya da $x = y + 1$) için $y > x$ sağlanmaz. Olumsuzlaması: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \leq x$; “her reel sayıdan büyük ya da ona eşit bir reel sayı vardır” ki doğrudur ($x = y$). (i) ile (ii) yalnızca niceleyici sırasıyla ayrılır ve doğruluk değerleri farklıdır.

(iii) Yanlıştır: $x = 0$ için hiçbir y ile $0 \cdot y = 1$ sağlanmaz. Olumsuzlaması: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$; doğrudur, $x = 0$ tanğıdır. ($x \neq 0$ olan her x için $y = 1/x$ işe yarardı; tümel önermeyi tek istisna yanlış yapar.)

b) (i) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, (y > 0 \wedge y^2 = x))$; kısaca $\forall x > 0, \exists y > 0, y^2 = x$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, (p \text{ asal} \wedge p > n)$. Örnek 2.8 bunun doğru olduğunu gösterir: önerme yanlış olsaydı, kendisinden büyük asal bulunmayan bir n olurdu; o zaman bütün asallar $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinde kalır ve sonlu çoklukta olurdu, bu ise Örnek 2.8 ile çelişir.

(iii) Sınırlılık tanımını Sonuç 2.1 ile olumsuzlayalım: $\forall M > 0, \exists x \in A, |f(x)| > M$. Sözle: hangi M pozitif sayısı verilirse verilsin, A 'da $|f(x)|$ 'in M 'yi aştığı bir x vardır. Evren değişmedi: M yine pozitif, x yine A 'da.

c) Karşıt ters: “ m çift değil ve n çift değil ise mn çift değildir.” Burada “ m çift veya n çift” sonucunun olumsuzlaması De Morgan (Teorem 1.1 (6)) ile “ m çift değil ve n çift değil”dir; tam sayılar için de “çift değil” demek “tek” demektir. Yani ispatlanacak olan: m tek ve n tek ise mn tektir. Bu tam olarak Örnek 2.3'dir. Karşıt ters doğru olduğundan özgün önerme doğrudur.

d) Yardımcı önerme: $3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$. Karşıt tersini ispatlayalım: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$. n üçe bölünmüyorsa, bir k tam sayısı için $n = 3k + 1$ ya da $n = 3k + 2$ 'dir (üçe bölümden kalan 1 ya da 2'dir; bölme algoritması Teorem 12.4). İki durum:

- $n = 3k + 1$ ise $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$; kalan 1, yani $3 \nmid n^2$.
- $n = 3k + 2$ ise $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$; kalan yine 1, yani $3 \nmid n^2$.

Her iki durumda da n^2 üçe bölünmez; karşıt ters, dolayısıyla yardımcı önerme ispatlanmıştır.

$\sqrt{3}$ irrasyoneldir: $\sqrt{3}$ 'ün rasyonel olduğunu varsayalım: a, b tam sayılar, $b \neq 0$, kesir sadeleştirilmiş (a ve b 'nin 1'den başka ortak pozitif böleni yok) olmak üzere $\sqrt{3} = a/b$. Karesini alınca $a^2 = 3b^2$; demek ki $3 \mid a^2$ ve yardımcı önerme gereği $3 \mid a$. $a = 3k$ yazıp yerine koyalım: $9k^2 = 3b^2$, yani $b^2 = 3k^2$. O hâlde $3 \mid b^2$ ve yine yardımcı önerme gereği $3 \mid b$. Böylece 3, hem a 'yı hem b 'yi böler; bu, kesrin sadeleştirilmiş olmasıyla çelişir. Demek ki varsayım yanlıştır: $\sqrt{3}$ irrasyoneldir.

e) (i) $n = 3$: $2^3 + 1 = 9 = 3 \cdot 3$ asal değildir. ($n = 1, 2$ için 3 ve 5 asaldır; ilk iki örnek yanıltıcıdır.)

(ii) $n = 1$: $1^2 = 1$ ama $2 \cdot 1 = 2$ ve $1 \geq 2$ yanlıştır. ($n \geq 2$ için önerme doğrudur; ama “her n ” iddiasını tek istisna yıkar.)

(iii) $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ yanlıştır. Genel olarak $0 < x < 1$ olan her x karşıt örnektir; Örnek 2.1 (1) zaten böyle bir x 'in var olduğunu göstermişti.

■

Mantık ve ispat dilimiz tamamlandı. Bundan sonra bu dili, matematiğin bütün nesnelerinin kurulduğu temel yapıya, kümelere uygulayacağız: **Kümeler ve Küme İşlemleri**.

3. Kümeler ve Küme İşlemleri

Önceki iki bölümde önermeleri, niceleyicileri ve ispat yöntemlerini öğrendik. Bu bölümde bu araçları matematiğin en temel yapı taşına, **küme** kavramına uyguluyoruz. Önce kümeleri yazmayı, alt küme ve eşitliği; sonra kesişim, birleşim, fark, tümleyen, simetrik fark ve kartezyen çarpım işlemlerini göreceğiz. Ardından bu işlemlerin uyduğu kuralları ispatlayacak, en sonunda da sonsuz çoklukta kümeyle bir arada çalışmayı sağlayan **indisli aileleri** ve onlara ait genel dağılma ve De Morgan yasalarını inceleyeceğiz. Buradaki her ispat aslında bir mantık alıştırmasıdır: “ $x \in A \cap B$ ” gibi bir ifade, iki önermenin “ve” bağlacıyla birleşmesinden başka bir şey değildir. Bu yüzden [Teorem 1.1](#) ve [Teorem 2.1](#) bu bölümde sık sık karşımıza çıkacak.

3.1 Küme Kavramı

Bir **küme** (set), iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin bir topluluğudur; bu nesnelere kümenin **elemanları** (elements) denir. x nesnesi A kümesinin elemanıysa $x \in A$, değilse $x \notin A$ yazarız. “İyi tanımlanmış” sözü şunu ister: verilen herhangi bir nesnenin kümeye ait olup olmadığı kesin olarak belli olmalıdır. “Büyük sayılar” bir küme belirtmez; “100’den büyük doğal sayılar” belirtir.

Bir kümeyi yazmanın iki temel yolu vardır.

1. **Liste yöntemi:** Kümenin bütün elemanları, her biri yalnız bir kez yazılmak üzere, küme parantezi $\{ \}$ içinde sıralanır. Elemanların yazılış sırası önemli değildir.
 - İngilizce alfabedeki ünlü harflerin kümesi $A = \{a, e, i, o, u\}$ ’dur.
 - $\{b, c, a\}$ ile $\{a, b, c\}$ aynı kümedir.
2. **Özellik yöntemi (küme kurucu gösterim):** Elemanların sağlaması gereken ortak bir özellik verilir. $p(x)$, x ’e bağlı bir açık önerme ise

$$A = \{x : p(x)\}$$

yazılır ve “ $p(x)$ önermesini doğru yapan bütün x ’lerin kümesi” diye okunur. İki nokta yerine düşey çizgi de kullanılır: $\{x \mid p(x)\}$.

- Çift doğal sayıların kümesi $E = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ ’dir.
- $x^2 - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ ’dir.

Bu kitapta sık kullanacağımız sayı kümeleri şunlardır: doğal sayılar $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, tam sayılar $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$ ve reel sayılar $\mathbb{R}$. Şimdilik bunları okuldan bildiğimiz gibi kullanıyoruz; kitabın ikinci kısmında hepsi aksiyomlardan yola çıkılarak kesin biçimde kurulacak.

i Her özellik bir küme tanımlar mı?

Hayır. Bertrand Russell’in 1901’de fark ettiği gibi, “kendisinin elemanı olmayan bütün kümelerin kümesi” $R = \{x : x \notin x\}$ diye bir küme olamaz: $R \in R$ dersek tanım gereği $R \notin R$ çıkar, $R \notin R$ dersek $R \in R$ çıkar. Bu çelişki, “her özellik bir küme belirler” düşüncesinin fazla iyimser olduğunu gösterir. Modern küme kuramı bu tuzaktan, özellik yöntemini hep **var olan bir kümenin içinde** kullanarak kurtulur: $\{x \in X : p(x)\}$. Bu kitapta hep böyle yapacağız; X çoğu zaman $\mathbb{R}$ olacak.

3.2 Alt Küme, Öz Alt Küme ve Küme Eşitliği

Bir kümenin başka bir kümenin “içinde” olması, sezgisel olarak, birinin bütün elemanlarının ötekinde de bulunması demektir. Bunu bir önerme olarak yazalım.

Tanım 3.1 (Alt Küme, Öz Alt Küme ve Küme Eşitliği). A ve B iki küme olsun.

- A ’nın her elemanı B ’nin de elemanıysa A ’ya B ’nin bir **alt kümesi** (subset) denir ve $A \subseteq B$ yazılır:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- $A \subseteq B$ ise ve B 'de A 'ya ait olmayan en az bir eleman varsa A 'ya B 'nin bir **öz alt kümesi** (proper subset) denir ve $A \subset B$ (bazen $A \subsetneq B$) yazılır:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ve } \exists y \in B, y \notin A).$$

- A ve B tam olarak aynı elemanlardan oluşuyorsa A ile B **eşittir** ve $A = B$ yazılır. Bu, iki yönlü kapsamaya denktir:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A).$$

Alt küme olmamak ne demektir? $A \subseteq B$ önermesi bir tümel niceleyiciyle başladığından, **Teorem 2.1** gereği olumsuzlaması bir varlıksal niceleyiciyle başlar:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ ve } x \notin B).$$

Yani A 'nın B 'nin alt kümesi olmadığını göstermek için A 'da olup B 'de olmayan **tek bir** eleman bulmak yeter; bu bir karşıt örnektir.

💡 Çift kapsama yöntemi

İki kümenin eşit olduğunu göstermenin standart yolu, tanımdaki denkliği kullanmaktır: önce keyfi bir $x \in A$ alıp $x \in B$ olduğunu, sonra keyfi bir $y \in B$ alıp $y \in A$ olduğunu gösteririz. Bu bölümdeki eşitlik ispatlarının neredeyse hepsi bu iki adımdan oluşur.

Örnek 3.1 (Çift Kapsama ile Eşitlik). $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ ve $B = \{-1, 1\}$ ise $A = B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$A \subseteq B$: Keyfi bir $y \in A$ alalım. Tanım gereği $y^2 - 1 = 0$, yani $(y - 1)(y + 1) = 0$ 'dır. Bir çarpımın sıfır olması için çarpanlardan birinin sıfır olması gerektiğinden (bkz. **Önerme 6.13**) $y = 1$ ya da $y = -1$ 'dir. Her iki durumda da $y \in \{-1, 1\} = B$.

$B \subseteq A$: B 'nin yalnız iki elemanı vardır; ikisini de doğrudan sınavalım. $1^2 - 1 = 0$ ve $(-1)^2 - 1 = 0$ olduğundan $1 \in A$ ve $-1 \in A$ 'dır. Dolayısıyla $B \subseteq A$.

İki kapsama birlikte **Tanım 3.1** gereği $A = B$ verir.

■

Alt küme bağıntısının iki basit ama sürekli kullanılacak özelliğini kaydedelim.

Önerme 3.1 (Alt Küme Bağıntısının Temel Özellikleri). A, B, C kümeler olsun.

1. $A \subseteq A$.
2. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$.

İspat.

(1) $x \in A \Rightarrow x \in A$ önermesi her x için doğrudur (özdeşlik ilkesi); tanım gereği $A \subseteq A$.

(2) Keyfi bir $x \in A$ alalım. $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B$; $B \subseteq C$ olduğundan da $x \in C$. Böylece A 'nın her elemanı C 'dedir, yani $A \subseteq C$. (Bu, **Teorem 1.1**'ndaki geçişlilik yasasının kümelerle yansımasıdır.)

■

⚠ Eleman olmak ile alt küme olmak farklıdır

$1 \in \{1, 2\}$ doğrudur, $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ doğrudur; ama " $1 \subseteq \{1, 2\}$ " anlamsızdır, " $\{1\} \in \{1, 2\}$ " ise yanlıştır. $\in$ sembolü bir nesneyle bir küme arasında, $\subseteq$ sembolü iki küme arasında kullanılır.

3.2.1 Boş Küme ve Evrensel Küme

Küme işlemlerinde iki uç durum sürekli karşımıza çıkar: hiç elemanı olmayan küme ve “her şeyi” içeren küme. İkisine de ad verelim.

Tanım 3.2 (Boş Küme ve Evrensel Küme).

- Hiç elemanı olmayan kümeye **boş küme** (empty set) denir ve $\emptyset$ ya da $\{\}$ ile gösterilir.
- Belirli bir bağlamda ele alınan bütün nesneleri içeren kümeye **evrensel küme** (universal set) denir; genellikle X ya da U ile gösterilir. Örneğin sayılarla çalışırken evrensel küme çoğu zaman $\mathbb{R}$ 'dir.

Önerme 3.2 (Boş Küme Her Kümenin Alt Kümesidir). Her A kümesi için $\emptyset \subseteq A$ 'dır. Ayrıca boş küme tektir.

İspat.

$\emptyset \subseteq A$ demek, her x için “ $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ ” demektir. $x \in \emptyset$ önermesi hiçbir x için doğru değildir; hipotezi yanlış olan bir koşullu önerme ise her zaman doğrudur. Böylece gerektirme her x için doğrudur ve $\emptyset \subseteq A$ olur. (Hipotezi hiçbir zaman sağlanmayan böyle bir önermeye, [niceleyiciler bölümünde](#) olduğu gibi, **boşlukla doğru** denir.)

Teklik için $\emptyset_1$ ve $\emptyset_2$ iki boş küme olsun. Az önce gösterilenle $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ ve $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$; [Tanım 3.1](#) gereği $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

■

Örnek 3.2 (Bir Kümenin Boş Olduğunu Göstermek). $\{x \in \mathbb{R} : x = x + 1\}$ kümesinin boş olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Kümeye bir x elemanı olduğunu varsayalım. O zaman $x = x + 1$ 'dir; iki taraftan x çıkarınca $0 = 1$ elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Demek ki eşitliği sağlayan hiçbir reel sayı yoktur ve küme boştur.

■

3.2.2 Kuvvet Kümesi

Bir kümenin bütün alt kümelerini bir araya toplamak sık gereken bir işlemdir; örneğin bir sonraki bölümde alt küme bağıntısını bu topluluk üzerinde inceleyeceğiz.

Tanım 3.3 (Kuvvet Kümesi). X bir küme olsun. X 'in bütün alt kümelerinin kümesine X 'in **kuvvet kümesi** (power set) denir ve

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

ile gösterilir.

[Önerme 3.2](#) ve [Önerme 3.1](#) gereği her zaman $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ ve $X \in \mathcal{P}(X)$ 'dir. Örneğin

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

n elemanlı bir kümenin 2^n alt kümesi vardır; her eleman için “al / alma” biçiminde iki seçenek olduğundan böyledir. (Bu sayma savını tümevarımla ispatlamak iyi bir alıştırmadır; bkz. [Doğal Sayılar ve Tümevarım](#).)

3.3 Küme İşlemleri

Elimizdeki kümelerden yeni kümeler üretmenin birkaç temel yolu vardır. Aşağıda A ve B iki küme, X ise bir evrensel kümedir.

Tanım 3.4 (Kesişim ve Birleşim).

- Hem A 'ya hem B 'ye ait elemanların kümesine A ile B 'nin **kesişimi** (intersection) denir:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}.$$

$A \cap B = \emptyset$ ise A ile B 'ye **ayrık** (disjoint) kümeler denir.

- A 'ya ya da B 'ye (ya da her ikisine) ait elemanların kümesine A ile B 'nin **birleşimi** (union) denir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}.$$

Buradaki “veya”, mantıktaki gibi kapsayıcıdır: x her iki kümede de olabilir. Kesişim ile birleşim arasındaki en basit ilişki şudur.

Önerme 3.3 (Kesişim, Birleşimin İçindedir). Her A, B kümesi için

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \quad \text{ve} \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

İspat.

$x \in A \cap B$ olsun. Kesişimin tanımı gereği $x \in A$ ve $x \in B$ 'dir; özellikle $x \in A$. Bu, $A \cap B \subseteq A$ verir. Şimdi $x \in A$ olsun. O zaman “ $x \in A$ veya $x \in B$ ” önermesi doğrudur (ilk bileşeni doğru), yani $x \in A \cup B$. Bu da $A \subseteq A \cup B$ verir. B için aynı akıl yürütme geçerlidir.

■

Bir kümeden başka bir kümenin elemanlarını “çıkarmak” da yeni bir küme verir; evrensel kümeden çıkarmak ise “olmayanları” toplar.

Tanım 3.5 (Fark ve Tümleyen).

- A 'ya ait olup B 'ye ait olmayan elemanların kümesine A ile B 'nin **farkı** (difference) denir:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}.$$

Benzer biçimde $B \setminus A = \{x : x \in B \text{ ve } x \notin A\}$ 'dir.

- X evrensel küme ve $A \subseteq X$ olsun. $X \setminus A = \{x : x \in X \text{ ve } x \notin A\}$ kümesine A 'nın (X 'e göre) **tümleyeni** (complement) denir; A' ya da A^c ile de gösterilir.
- $B \subseteq A$ ise $A \setminus B$ kümesine B 'nin A 'ya göre **görelî tümleyeni** denir.

Evrensel kümenin elemanları için tümleyen, “ait olmamak” ile aynı şeydir:

$$x \in X \setminus A \Leftrightarrow x \notin A \quad \text{ve} \quad x \in A \Leftrightarrow x \notin X \setminus A \quad (x \in X).$$

Genel olarak $A \setminus B \neq B \setminus A$ 'dır: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ için $A \setminus B = \{1\}$ ama $B \setminus A = \{3\}$ 'tür.

Fark yön seçer; iki yöndeki farkların birleşimi ise yön seçmeyen bir küme verir: “ya yalnız birinde ya yalnız ötekinde” olanlar.

Tanım 3.6 (Simetrik Fark). İki kümeden yalnız birine ait olan elemanların kümesine A ile B 'nin **simetrik farkı** (symmetric difference) denir:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Önerme 3.4 (Simetrik Farkın İkinci Biçimi). Her A, B kümesi için $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

İspat.

$\subseteq$: $x \in A \triangle B$ olsun. O zaman $x \in A \setminus B$ ya da $x \in B \setminus A$ 'dır. İlk durumda $x \in A$ ve $x \notin B$: $x \in A$ olduğundan $x \in A \cup B$; $x \notin B$ olduğundan $x \notin A \cap B$. Böylece $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. İkinci durum A ile B 'nin rolleri değiştirilerek aynıdır.

$\supseteq$: $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olsun; $x \in A \cup B$ ve $x \notin A \cap B$ 'dir. $x \in A$ ise, $x \notin A \cap B$ olduğundan $x \notin B$ olmak zorundadır (aksi hâlde x her ikisinde olurdu); yani $x \in A \setminus B$. $x \notin A$ ise, $x \in A \cup B$ olduğundan $x \in B$; yani $x \in B \setminus A$. Her iki durumda da $x \in A \triangle B$.

■

Şimdiye kadarki işlemler iki kümenin elemanlarını karıştırıyordu. Son işlem farklıdır: elemanları **eşleştirir**.

Tanım 3.7 (Kartezyen Çarpım). İlk bileşeni A 'dan, ikinci bileşeni B 'den alınan bütün **sıralı ikililerin** (ordered pairs) kümesine A ile B 'nin **kartezyen çarpımı** (Cartesian product) denir:

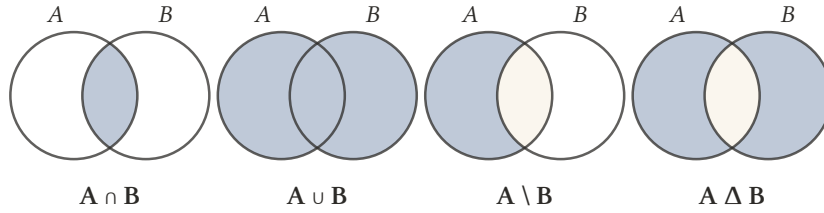
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}.$$

Sıralı ikililerde sıra önemlidir: $(a, b) = (c, d)$ olması için $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır. $A \times A$ yerine A^2 yazılır.

Örneğin $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ için

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

altı elemanlıdır; genel olarak m ve n elemanlı kümelerin çarpımı mn elemanlıdır. $B \times A$ 'nın elemanları ise $(a, 1)$ gibi ikililerdir; demek ki genellikle $A \times B \neq B \times A$. En tanınık örnek $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, yani koordinat düzlemidir. Kartezyen çarpım, sonraki iki bölümdeki bağıntı ve fonksiyon kavramlarının temelidir. Kesişim, birleşim, fark ve simetrik fark, Venn şemasıyla en iyi görülür.



Şekil 3.1: İki kümenin Venn şemasında dört işlem: kesişim $A \cap B$ (ikisinde de olanlar), birleşim $A \cup B$ (en az birinde olanlar), fark $A \setminus B$ (A 'da olup B 'de olmayanlar) ve simetrik fark $A \Delta B$ (yalnızca birinde olanlar).

Örnek 3.3 (Somut Kümelerle İşlem). $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ evrensel kümesinde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{4, 5, 6, 7\}$ olsun. $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $X \setminus A$, $A \Delta B$ kümelerini ve $\{4, 5\} \times \{6, 7\}$ çarpımını bulunuz.

Çözüm.

Tanımları tek tek uygulayalım.

- $A \cap B$: her iki kümede de olan elemanlar 4 ve 5'tir: $A \cap B = \{4, 5\}$.
- $A \cup B$: en az birinde olanlar: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- $A \setminus B$: A 'da olup B 'de olmayanlar: $\{1, 2, 3\}$. $B \setminus A = \{6, 7\}$.
- $X \setminus A$: X 'te olup A 'da olmayanlar: $\{6, 7, 8\}$.
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$. Aynı sonucu **Önerme 3.4** ile de bulabiliriz: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, \dots, 7\} \setminus \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.
- $\{4, 5\} \times \{6, 7\} = \{(4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7)\}$.

Kontrol: $A \cap B \subseteq A \cup B$ (**Önerme 3.3**) ve $A \setminus B$ ile $B \setminus A$ ayrık; her ikisi de sağlanıyor.

■

3.4 Küme İşlemlerinin Özellikleri

Küme işlemleri, tıpkı sayılarda toplama ve çarpma gibi, belirli kurallara uyar. Aşağıdaki teorem en çok kullanılanları toplar. İspatlarda hep aynı şeyi yapacağız: $x \in \dots$ ifadelerini önermelere çevirip **Teorem 1.1**'ni kullanacağız.

Teorem 3.1 (Küme İşlemlerinin Temel Özellikleri). A, B, C bir X evrensel kümesinin alt kümeleri olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

1. $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$.

2. $A \cup (X \setminus A) = X$ ve $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.
3. **Dağılma yasaları:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. **De Morgan yasaları (fark için):** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ve $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5. $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.
6. $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B$ ve $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$.
7. $B \subseteq A \Leftrightarrow (X \setminus A) \subseteq (X \setminus B)$.

İspat.

(1) $x \in A \cup \emptyset$ olması, “ $x \in A$ veya $x \in \emptyset$ ” demektir. $x \in \emptyset$ her zaman yanlış olduğundan bu, “ $x \in A$ veya (yanlış)” yani $x \in A$ ’ya denktir: “veya”nın bir bileşeni yanlışsa sonuç öteki bileşenin değeridir, $p \vee Y \equiv p$ (Tanım 1.6 tablosundan). Böylece $A \cup \emptyset = A$. İkincisi için: $x \in A \cap \emptyset$ olsa $x \in \emptyset$ olurdu; öyle x yoktur, dolayısıyla $A \cap \emptyset$ boştur.

(2) $A \subseteq X$ ve $X \setminus A \subseteq X$ olduğundan $A \cup (X \setminus A) \subseteq X$ ’tir. Tersine $x \in X$ olsun. Üçüncü hâlin olmazlığı ilkesiyle ya $x \in A$ ya da $x \notin A$ ’dır; ikinci durumda $x \in X$ ve $x \notin A$, yani $x \in X \setminus A$. Her iki durumda $x \in A \cup (X \setminus A)$. Kesişim için: bir x hem A ’da hem $X \setminus A$ ’da olsa hem $x \in A$ hem $x \notin A$ olurdu; çelişki. Demek ki $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

(3) Birinci eşitlik: $x \in A \cap (B \cup C)$ olması

$$x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)$$

demektir. Mantıktaki dağılma yasası $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ile bu,

$$(x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)$$

önermesine, yani $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ’ye denktir. Her adım bir denklik olduğundan iki küme aynı elemanlara sahiptir. İkinci eşitlik, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ yasasıyla tıpatıp aynı biçimde çıkar:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

(4) Birinci eşitlik için çift kapsama yapalım. $x \in A \setminus (B \cup C)$ olsun: $x \in A$ ve $x \notin B \cup C$. İkincisi, “ $x \in B$ veya $x \in C$ ” önermesinin olumsuzudur; mantıktaki De Morgan yasasıyla $x \notin B$ ve $x \notin C$. Böylece hem $(x \in A \text{ ve } x \notin B)$ hem $(x \in A \text{ ve } x \notin C)$, yani $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Tersine $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ olsun: $x \in A$, $x \notin B$ ve $x \notin C$. Son ikisi De Morgan ile $x \notin B \cup C$ verir; $x \in A$ ile birlikte $x \in A \setminus (B \cup C)$.

İkinci eşitlik: $x \in A \setminus (B \cap C)$ olsun: $x \in A$ ve $x \notin B \cap C$; De Morgan ile $x \notin B$ veya $x \notin C$. İlk durumda $x \in A \setminus B$, ikincisinde $x \in A \setminus C$; her hâlde $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Tersine $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ise $x \in A$ ’dır ve ya $x \notin B$ ya $x \notin C$ ’dir; dolayısıyla x her ikisinde birden olamaz, $x \notin B \cap C$, yani $x \in A \setminus (B \cap C)$.

(5) $x \in A \setminus B$ olması “ $x \in A$ ve $x \notin B$ ” demektir. $A \subseteq X$ olduğundan $x \in A$ iken zaten $x \in X$ ’tir; bu yüzden “ $x \notin B$ ” ile “ $x \in X \setminus B$ ” aynı şeydir. Böylece $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in X \setminus B \Leftrightarrow x \in A \cap (X \setminus B)$.

(6) Önce $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B$ denkliğini iki yönde gösterelim.

($\Rightarrow$ yönü) $B \subseteq A$ olsun. $A \cap B = B$ için iki kapsama gerekir. $A \cap B \subseteq B$: $x \in A \cap B$ ise tanım gereği $x \in A$ ve $x \in B$; özellikle $x \in B$. $B \subseteq A \cap B$: $y \in B$ olsun. Varsayım $B \subseteq A$ olduğundan $y \in A$ ’dır. Hem $y \in A$ hem $y \in B$ olduğundan $y \in A \cap B$. İki kapsama $A \cap B = B$ verir.

($\Leftarrow$ yönü) $A \cap B = B$ olsun. $x \in B$ alalım. Varsayımla $B = A \cap B$ olduğundan $x \in A \cap B$, yani $x \in A$ ve $x \in B$; özellikle $x \in A$. Keyfi bir $x \in B$ için $x \in A$ bulduk: $B \subseteq A$.

İkinci denklik $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$ benzerdir. ($\Rightarrow$) $B \subseteq A$ olsun. **Önerme 3.3** ile $A \subseteq A \cup B$. Tersine $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ ya da $x \in B$ ’dir; ikinci durumda $B \subseteq A$ ile yine $x \in A$. Demek ki $A \cup B \subseteq A$ ve eşitlik sağlanır. ($\Leftarrow$) $A \cup B = A$ olsun. $x \in B$ ise **Önerme 3.3** ile $x \in A \cup B = A$; yani $B \subseteq A$.

(7) $B \subseteq A$ önermesi, her $x \in X$ için “ $x \in B \Rightarrow x \in A$ ” demektir. Bu gerektirmenin karşıt tersi “ $x \notin A \Rightarrow x \notin B$ ”, yani “ $x \in X \setminus A \Rightarrow x \in X \setminus B$ ”’dir. **Teorem 1.1** (7) gereği bir gerektirme karşıt tersine denk olduğundan, her $x \in X$ için ilk önerme doğrudur ancak ve ancak ikincisi doğruysa. İkincisinin her $x \in X$ için doğru olması ise tam olarak $(X \setminus A) \subseteq (X \setminus B)$ demektir.

■

Bu teorem küme eşitliklerini, elemanlara inmeden, cebirsel biçimde türetmemizi sağlar. Madde (5) özellikle önemlidir: farkı kesişime çevirdiğinden, fark içeren her özdeşliği kesişim–tümleyen diline taşıyabiliriz. Aşağıdaki örnekte hem mantık yasalarıyla hem teoremle çalışıyoruz.

Örnek 3.4 (Farkın Farkı). Her A, B kümesi için $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x \in A \setminus (A \setminus B)$ önermesini adım adım açalım; her satır bir öncekine denktir.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \setminus B) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) && \text{(farkın tanımı, iki kez)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) && \text{(De Morgan ve çift olumsuzlama)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) && \text{(dağılma)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B && (p \wedge \neg p \text{ çelişkidir; } Y \vee q \equiv q) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B. && \text{(kesişimin tanımı)} \end{aligned}$$

De Morgan ve dağılma [Teorem 1.1](#)'nda, çift olumsuzlama [Önerme 1.1](#)'dadır; son adımdaki $Y \vee q \equiv q$ denkliği ise doğrudan [Tanım 1.6](#) tablosundan görülür. Demek ki iki küme aynı elemanlardan oluşur. ■

3.5 İndisli Aileler

Analizde iki kümeyle değil, çoğu zaman sonsuz çoklukta kümeyle çalışırız: $(-1, 1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, ... gibi. Bunları tek tek adlandırmak yerine bir **indisli** etiketleriz.

Tanım 3.8 (İndisli Aile, Genel Kesişim ve Genel Birleşim). I boş olmayan bir küme olsun ve her $i \in I$ için bir A_i kümesi verilsin. $\{A_i : i \in I\}$ (kısaca $\{A_i\}_{i \in I}$ ya da $(A_i)_{i \in I}$ topluluğuna bir **indisli küme ailesi** (indexed family of sets), I kümesine de **indis kümesi** (index set) denir.

- Ailenin **genel kesişimi**, bütün A_i 'lerde ortak olan elemanların kümesidir:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}, \quad \text{yani} \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i.$$

- Ailenin **genel birleşimi**, en az bir A_i 'ye ait olan elemanların kümesidir:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}\}, \quad \text{yani} \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}.$$

Kesişim bir tümel, birleşim bir varlıksal niceleyiciyle tanımlandığından [Teorem 2.1](#) olumsuzlamalarını hemen verir:

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i_0 \in I, x \notin A_{i_0} \quad \text{ve} \quad x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin A_i.$$

Sözle: kesişimde olmamak için tek bir kümeyi kaçırmak yeter; birleşimde olmamak için bütün kümeleri kaçırmak gerekir.

i Gösterim

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ ise $\bigcup_{i=1}^n A_i$, $I = \mathbb{N}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ya da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ yazılır; kesişim için de aynı. Özel olarak $I = \{1, 2\}$ alınırsa

$$\bigcup_{i=1}^2 A_i = A_1 \cup A_2 \quad \text{ve} \quad \bigcap_{i=1}^2 A_i = A_1 \cap A_2$$

olur: tanımdaki “ $\exists i_0 \in \{1, 2\}$ ” tam olarak “ $x \in A_1$ veya $x \in A_2$ ”, “ $\forall i \in \{1, 2\}$ ” ise “ $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ ” demektir. Yani genel işlemler, iki kümeli işlemleri kapsar.

Örnek 3.5 (İki İndisli Aile).

- a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ve $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ kümelerini bulunuz.
- b) Her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i = \{-i, i\}$ olsun. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ve $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.

a) Birleşimin $\mathbb{N}$ olduğunu iddia ediyoruz. Her $A_n \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan birleşim $\mathbb{N}$ 'nin içindedir. Tersine $k \in \mathbb{N}$ verilsin; $k \in \{1, \dots, k\} = A_k$ olduğundan k birleşimdedir. Demek ki $\bigcup A_n = \mathbb{N}$.
Kesişim için: 1 her A_n 'dedir, dolayısıyla $1 \in \bigcap A_n$. $k \geq 2$ bir doğal sayıysa $k \notin \{1\} = A_1$, dolayısıyla k kesişimde değildir (tek bir kümeyi kaçırmak yeter). Böylece $\bigcap A_n = \{1\}$.

b) Birleşim, 0 dışındaki bütün tam sayılardır: her $B_i \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; tersine $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ise $|m| \in \mathbb{N}$ ve $m \in \{-|m|, |m|\} = B_{|m|}$. Kesişim boşdur: $B_1 \cap B_2 = \{-1, 1\} \cap \{-2, 2\} = \emptyset$ olduğundan hiçbir eleman bütün B_i 'lerde olamaz.

■

Genel birleşim, aileyi kapsayan **en küçük**, genel kesişim ise aile tarafından kapsanan **en büyük** kümedir. Aşağıdaki teorem bunu kesinleştirir.

Teorem 3.2 (İndisli Ailelerde Alt Küme Sonuçları). $\{A_i\}_{i \in I}$ bir küme ailesi ve B bir küme olsun.

1. Her $j \in I$ için $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.
2. Her $i \in I$ için $A_i \subseteq B$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$.
3. Her $i \in I$ için $B \subseteq A_i$ ise $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

İspat.

- (1) $x \in \bigcap A_i$ ise her $i \in I$ için $x \in A_i$; özel olarak $i = j$ için $x \in A_j$. $x \in A_j$ ise " $\exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}$ " önermesi $i_0 = j$ ile sağlanır; yani $x \in \bigcup A_i$.
- (2) $x \in \bigcup A_i$ olsun. Tanım gereği $x \in A_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. Hipotez her i için geçerli olduğundan özellikle $A_{i_0} \subseteq B$ 'dir; dolayısıyla $x \in B$.
- (3) $x \in B$ olsun. Keyfi bir $i \in I$ alalım; hipotezle $B \subseteq A_i$ olduğundan $x \in A_i$. i keyfi olduğundan her $i \in I$ için $x \in A_i$, yani $x \in \bigcap A_i$.

■

Şimdi Teorem 3.1'ndeki dağılma ve De Morgan yasalarını keyfi ailelere genelleştiriyoruz. Dağılma için iki aile gerekir ve sonuçta indis kümesi $I \times J$ olan bir aile çıkar.

Önerme 3.5 (Genel Dağılma Yasaları). $\{A_i\}_{i \in I}$ ve $\{B_j\}_{j \in J}$ iki küme ailesi olsun.

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$.
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$.

Özel olarak tek bir A kümesi için

$$A \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j) \quad \text{ve} \quad A \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} (A \cup B_j).$$

İspat.

(1) Çift kapsama yapalım. $x \in \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right)$ olsun. O zaman $x \in \bigcup_i A_i$ ve $x \in \bigcup_j B_j$ 'dir. Birleşimin tanımı gereği $x \in A_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ ve $x \in B_{j_0}$ olacak biçimde bir $j_0 \in J$ vardır. Bu, $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$ demektir. $(i_0, j_0) \in I \times J$ olduğundan $x \in \bigcup_{(i,j)} (A_i \cap B_j)$. Böylece sol taraf sağ tarafın içindedir.

Tersine $x \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$ olsun. O zaman $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$ olacak biçimde bir $(i_0, j_0) \in I \times J$ vardır; yani $x \in A_{i_0}$ ve $x \in B_{j_0}$. $x \in A_{i_0}$ olduğundan $x \in \bigcup_i A_i$; $x \in B_{j_0}$ olduğundan $x \in \bigcup_j B_j$. Dolayısıyla x bu iki kümenin kesişimindedir. Sağ taraf da sol tarafın içindedir; eşitlik sağlanır.

(2) $x \in \left(\bigcap_i A_i \right) \cup \left(\bigcap_j B_j \right)$ olsun; $x \in \bigcap_i A_i$ ya da $x \in \bigcap_j B_j$ 'dir. İlk durumda her i için $x \in A_i$; o zaman her $(i, j) \in I \times J$ için $x \in A_i \subseteq A_i \cup B_j$, yani $x \in \bigcap_{(i,j)} (A_i \cup B_j)$. İkinci durum simetriktir: her j için $x \in B_j \subseteq A_i \cup B_j$. Sol taraf sağın içindedir.

Tersine $x \in \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$ olsun; yani her $i \in I$ ve her $j \in J$ için $x \in A_i \cup B_j$. Durumlara ayıralım. $x \in \bigcap_i A_i$ ise işimiz bitti: x soldaki birleşimdedir. Değilse, olumsuzlama kuralıyla $x \notin A_{i_0}$ olan bir $i_0 \in I$ vardır. Şimdi keyfi bir $j \in J$ alalım: $x \in A_{i_0} \cup B_j$ ve $x \notin A_{i_0}$ olduğundan $x \in B_j$ olmak zorundadır. j keyfi olduğundan her $j \in J$ için $x \in B_j$, yani $x \in \bigcap_j B_j$; dolayısıyla x yine soldaki birleşimdedir. Özel durum, $I = \{i_0\}$ tek elemanlı ve $A_{i_0} = A$ alınmasıyla elde edilir: o zaman $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i = A$ ve $I \times J = \{(i_0, j) : j \in J\}$ olduğundan $(i, j) \in I \times J$ üzerinden alınan birleşim ve kesişim, $j \in J$ üzerinden alınanlarla aynıdır. ■

Özel durumda $J = \{1, 2\}$ alınırsa $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ ve $A \cup (B_1 \cap B_2) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$, yani Teorem 3.1'nin (3) maddesi geri gelir.

Teorem 3.3 (De Morgan Yasaları). $\{A_i\}_{i \in I}$, bir X evrensel kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun.

1. $X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
2. $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$.

Sözle: birleşimin tümleyeni tümleyenlerin kesişimi, kesişimin tümleyeni tümleyenlerin birleşimidir.

İspat.

(1) $x \in X \setminus \left(\bigcup_i A_i \right)$ olsun. Bu, $x \in X$ ve $x \notin \bigcup_i A_i$ demektir. Birleşimin olumsuzlamasından her $i \in I$ için $x \notin A_i$; $x \in X$ ile birlikte her i için $x \in X \setminus A_i$. Yani $x \in \bigcap_i (X \setminus A_i)$. Böylece $X \setminus \left(\bigcup_i A_i \right) \subseteq \bigcap_i (X \setminus A_i)$.

Tersine $x \in \bigcap_i (X \setminus A_i)$ olsun. Kesişimin tanımından her $i \in I$ için $x \in X \setminus A_i$, yani $x \in X$ ve $x \notin A_i$. Her i için $x \notin A_i$ olduğundan $x \notin \bigcup_i A_i$; $x \in X$ ile birlikte $x \in X \setminus \left(\bigcup_i A_i \right)$. Böylece $\bigcap_i (X \setminus A_i) \subseteq X \setminus \left(\bigcup_i A_i \right)$. İki kapsama eşitliği verir.

(2) $x \in X \setminus \left(\bigcap_i A_i \right)$ olsun: $x \in X$ ve $x \notin \bigcap_i A_i$. Kesişimin olumsuzlamasından $x \notin A_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. $x \in X$ olduğundan $x \in X \setminus A_{i_0}$ ve dolayısıyla $x \in \bigcup_i (X \setminus A_i)$.

Tersine $x \in \bigcup_i (X \setminus A_i)$ olsun. $x \in X \setminus A_{i_0}$ olacak biçimde bir i_0 vardır; yani $x \in X$ ve $x \notin A_{i_0}$. Bir kümeyi kaçırın eleman kesişimde olamayacağından $x \notin \bigcap_i A_i$; $x \in X$ ile birlikte $x \in X \setminus \left(\bigcap_i A_i \right)$. İki kapsama eşitliği verir. ■

$I = \{1, 2\}$ alınırsa tanıdık iki kümeli biçim çıkar:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Bu da Teorem 3.1'nin (4) maddesinde A yerine X alınmış hâlidir. De Morgan yasalarını, topolojide açık ve kapalı kümeler arasında gidip gelirken sürekli kullanacağız: bkz. [Kapalı Kümeler](#).

3.6 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Küme İşlemleri Alıştırmaları).

- a) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ evrensel kümesinde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ve $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ olsun. $A \triangle B$, $X \setminus A$, $A \cap (B \cup C)$ ve $X \setminus (B \cup C)$ kümelerini bulunuz; son ikisini Teorem 3.1 ile doğrulayınız.
- b) A, B, C kümeleri için $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ olduğunu, Teorem 3.1'ni kullanarak (elemanlara inmeden) gösteriniz.
- c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$ ve $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] = (0, 1]$ olduğunu gösteriniz.
- d) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.
- e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$ ve $B \setminus A = \{7, 8\}$ olduğundan $A \triangle B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$. $X \setminus A = \{7, 8, 9, 10\}$. $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, dolayısıyla $A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5, 6\}$. Dağılma yasasıyla kontrol: $A \cap B = \{4, 5, 6\}$, $A \cap C = \{2, 4, 6\}$ ve $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4, 5, 6\}$; aynı sonuç.

$X \setminus (B \cup C) = \{1, 3, 9\}$. De Morgan ile kontrol: $X \setminus B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$, $X \setminus C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve kesişimleri $\{1, 3, 9\}$; aynı sonuç.

b) $X = A \cup B \cup C$ alalım; böylece üç küme de X 'in alt kümesidir. Teorem 3.1'nin (5) maddesi, sonra (3) maddesi, sonra yine (5) maddesiyle

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap (X \setminus C) = (A \cap (X \setminus C)) \cup (B \cap (X \setminus C)) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

c) Birincisi: her n için $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ olduğundan 0 bütün aralıklardadır; $\{0\} \subseteq \bigcap_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Tersine x kesişimde ve $x \neq 0$ olsun. O zaman $|x| > 0$ 'dır. Sonuç 12.2 gereği (her pozitif sayının altına inen bir $\frac{1}{n}$ vardır; Arşimet özelliğine dayanan bu sonucu ileride ispatlayacağız, burada bilinen bir olgu olarak kullanıyoruz) $\frac{1}{n_0} < |x|$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, $x \notin (-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0})$ demektir; oysa x kesişimdeydi. Çelişki. Demek ki kesişimin 0 'dan başka elemanı yoktur.

İkincisi: her n için $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan $[\frac{1}{n}, 1] \subseteq (0, 1]$ 'dir; Teorem 3.2 (2) ile birleşim $(0, 1]$ 'in içindedir. Tersine $x \in (0, 1]$ olsun. $x > 0$ olduğundan yine Sonuç 12.2 ile $\frac{1}{n_0} < x$ olan bir n_0 vardır; $x \leq 1$ ile birlikte $x \in [\frac{1}{n_0}, 1]$, yani x birleşimdedir.

Bu iki eşitlik, bir sonsuz kesişimin uçları “kapatabildiğini”, bir sonsuz birleşimin ise uçları “açabildiğini” gösterir; topolojide bu olgunun önemi büyüktür.

d) $(\Rightarrow) A \subseteq B$ olsun ve $A \setminus B$ 'de bir x bulunduğunu varsayalım. O zaman $x \in A$ ve $x \notin B$ 'dir; ama $A \subseteq B$ ile $x \in A$ 'dan $x \in B$ çıkar. Çelişki. Demek ki $A \setminus B$ 'nin elemanı yoktur. $(\Leftarrow) A \setminus B = \emptyset$ olsun ve $x \in A$ alalım. $x \notin B$ olsaydı $x \in A \setminus B = \emptyset$ olurdu; olanaksız. Dolayısıyla $x \in B$ ve $A \subseteq B$.

e) Her iki tarafın elemanları sıralı ikililerdir. (a, y) bir ikili olsun. O zaman

$$(a, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow (a \in A \wedge y \in B) \vee (a \in A \wedge y \in C),$$

ikinci adım mantıktaki dağılma yasasıdır. Son önerme “ $(a, y) \in A \times B$ veya $(a, y) \in A \times C$ ”, yani $(a, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ demektir. Bütün adımlar denklik olduğundan iki küme eşittir.

■

Kümeler ve işlemleri elimizde; şimdi kartezyen çarpımın alt kümelerini inceleyerek iki nesne arasındaki “ilişki” fikrini kesinleştiriyoruz: [Bağıntılar](#).

4. Bağıntılar

“ x , y ’nin annesidir”, “ $x < y$ ”, “ $A \subseteq B$ ”, “3 sayısı 12’yi böler” — bunların hepsi iki nesne arasındaki bir **ilişkiyi** söyler. Matematik bu fikri şaşırtıcı derecede basit bir yolla kesinleştirir: bir bağıntı, ilişkili olan çiftlerin kümesinden başka bir şey değildir. Önceki bölümde tanımladığımız kartezyen çarpım (Tanım 3.7) tam da bu yüzden gerekliydi.

Bu bölümde bağıntı kavramını ve temel özelliklerini (yansımali, simetrik, ters simetrik, geçişli) öğreneceğiz; sonra iki özel bağıntı türünü inceleyeceğiz: bir kümeyi “aynı türden” parçalara bölen **denklik bağıntıları** ve elemanları “küçükten büyüğe” dizgen **sıralama bağıntıları**. İkisi de kitabın geri kalanında sürekli karşımıza çıkacak; fonksiyon kavramı da bir sonraki bölümde özel bir bağıntı olarak tanımlanacak.

4.1 Bağıntı Kavramı

Bir X kümesindeki bazı elemanları bir Y kümesindeki bazı elemanlarla “eşlemek” istiyoruz. Hangi x ’in hangi y ile eşlendiğini söylemenin en ekonomik yolu, eşlenen (x, y) çiftlerini listelemektir.

Tanım 4.1 (Bağıntı). X ve Y boş olmayan kümeler olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımının her R alt kümesine X ’ten Y ’ye bir **bağıntı** (relation) denir.

- $(x, y) \in R$ ise x ile y ’nin R bağıntısıyla ilişkili olduğu söylenir ve xRy yazılır. $(x, y) \notin R$ ise x ile y ilişkili değildir.
- $X = Y$ ise $R \subseteq X \times X$ bağıntısına X **üzerinde bir bağıntı** denir.

Tanımın gücü genelliğindedir: $X \times Y$ ’nin **her** alt kümesi bir bağıntıdır; bir “kural” ya da “formül” olması gerekmez. Boş küme $\emptyset$ da $X \times Y$ ’nin kendisi de bağıntıdır (birincisinde hiçbir çift ilişkili değildir, ikincisinde hepsi ilişkilidir). Bilinen örnekler:

- $\mathbb{R}$ üzerinde “küçüktür” bağıntısı: $R_{<} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$. $2R_{<}5$ doğrudur, $5R_{<}2$ yanlıştır.
- $\mathcal{P}(X)$ üzerinde alt küme bağıntısı: $\{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$ (bkz. Tanım 3.3).
- $\mathbb{N}$ üzerinde bölünebilirlik. $a \mid b$ yazılan bu bağıntı şu kümedir:

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = ak \text{ olacak biçimde bir } k \in \mathbb{N} \text{ vardır}\}$$

Bir bağıntıyı iki biçimde çizebiliriz: X ve Y ’nin elemanlarını iki sütuna yazıp ilişkili çiftler arasına ok koyarak (ok şeması) ya da X ve Y sayı kümeleriye (x, y) noktalarını koordinat düzlemine işaretleyerek (grafik). $R_{<}$ bağıntısının grafiği, $y = x$ doğrusunun üst tarafındaki açık yarı düzlemdir.

Bir ilişkinin yönünü çevirmek (“annesidir” yerine “çocuğudur” demek) yeni bir ilişki verir; bunu da bir bağıntı olarak yazalım.

Tanım 4.2 (Ters Bağıntı). $R \subseteq X \times Y$ bir bağıntı olsun. R ’nin bütün ikililerinin bileşenleri yer değiştirilerek elde edilen

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subseteq Y \times X$$

bağıntısına R ’nin **ters bağıntısı** (inverse relation) denir.

Yani $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$. Örneğin $R_{<}^{-1}$ ’nin tersi “büyüktür” bağıntısıdır: $(y, x) \in R_{<}^{-1} \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow y > x$. Bir bağıntıda X ’in her elemanının bir eşi olmak zorunda değildir; gerçekten “kullanılan” elemanları ayırmak yararlıdır.

Tanım 4.3 (Bağıntının Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi). $R \subseteq X \times Y$ bir bağıntı olsun.

- R ’de ilk bileşen olarak geçen elemanların kümesine R ’nin **tanım kümesi** (domain) denir:

$$T_R = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

- R 'de ikinci bileşen olarak geçen elemanların kümesine R 'nin **görüntü kümesi** (range) denir:

$$G_R = \{y \in Y : \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Tanım gereği $T_R \subseteq X$ ve $G_R \subseteq Y$ 'dir; ama eşitlik gerekmez. Tersi alındığında tanım kümesiyle görüntü kümesi yer değiştirir.

Önerme 4.1 (Ters Bağntının Özellikleri). $R \subseteq X \times Y$ bir bağntı olsun. O zaman

1. $(R^{-1})^{-1} = R$,
2. $T_{R^{-1}} = G_R$ ve $G_{R^{-1}} = T_R$.

İspat.

(1) $(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$; her iki adım ters bağntının tanımıdır. Aynı elemanlara sahip olduklarından kümeler eşittir.

(2) $y \in T_{R^{-1}}$ olması, $(y, x) \in R^{-1}$ olacak biçimde bir $x \in X$ bulunması demektir; bu da $(x, y) \in R$ olacak biçimde bir x bulunmasına, yani $y \in G_R$ 'ye denktir. İkinci eşitlik, bu sonucun R yerine R^{-1} 'e uygulanıp (1)'in kullanılmasıyla çıkar: $G_{R^{-1}} = T_{(R^{-1})^{-1}} = T_R$.

■

Örnek 4.1 (Sonlu Bir Bağntı). $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b\}$ olsun. $R = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ bağntısının tersini, tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.

$R \subseteq X \times Y$ olduğundan gerçekten X 'ten Y 'ye bir bağntıdır. Her ikilinin bileşenlerini yer değiştirerek

$$R^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3)\} \subseteq Y \times X$$

buluruz. İlk bileşenler 1, 2, 3 olduğundan $T_R = \{1, 2, 3\} = X$; ikinci bileşenler a ve b olduğundan $G_R = \{a, b\} = Y$. **Önerme 4.1** ile uyumlu olarak $T_{R^{-1}} = \{a, b\} = G_R$ 'dir.

■

Örnek 4.2 (Toplamı Beş Olan Çiftler). $\mathbb{N}$ üzerinde $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 5\}$ bağntısını liste yöntemiyle yazınız; tersini, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.

$x, y \geq 1$ ve $x + y = 5$ olduğundan $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $y = 5 - x$ 'tir:

$$R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Bileşenleri yer değiştirince $R^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\} = R$ çıkar; yani bu bağntı kendi tersine eşittir. Bunun nedeni $x + y = 5$ koşulunun x ile y 'de simetrik olmasıdır. $T_R = G_R = \{1, 2, 3, 4\}$; ikisi de $\mathbb{N}$ 'nin öz alt kümesidir.

■

4.2 Bağntıların Özellikleri

Bir küme üzerindeki bağntıların en sık sorulan dört özelliği vardır. Her biri, kümenin **bütün** elemanları için geçerli olması gereken bir koşul söyler; bu yüzden hepsi tümel niceleyiciyle yazılır.

Tanım 4.4 (Yansılmalı, Simetrik, Ters Simetrik ve Geçişli Bağntılar). R , bir X kümesi üzerinde bir bağntı olsun.

1. Her $x \in X$ için $(x, x) \in R$ ise R **yansılalıdır** (reflexive): her eleman kendisiyle ilişkilidir.

$$\forall x \in X, xRx.$$

2. $(x, y) \in R$ olduğunda $(y, x) \in R$ de oluyorsa R **simetriktir** (symmetric): ilişki yön seçmez.

$$\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx.$$

3. $(x, y) \in R$ ve $(y, x) \in R$ olduğunda $x = y$ olmak zorundaysa R **ters simetrik** (anti-symmetric): farklı iki eleman arasında çift yönlü ilişki olamaz.

$$\forall x, y \in X, (xRy \text{ ve } yRx) \Rightarrow x = y.$$

4. $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olduğunda $(x, z) \in R$ de oluyorsa R **geçişli** (transitive): ilişki zincirleme aktarılır.

$$\forall x, y, z \in X, (xRy \text{ ve } yRz) \Rightarrow xRz.$$

Bir bağıntının bu özelliklerden birine **sahip olmadığını** göstermek için **Teorem 2.1**'yi uygulayınız: tümel niceleyicinin olumsuzu bir karşıt örnektir.

- Yansımali değil: $(x, x) \notin R$ olan **bir** x vardır.
- Simetrik değil: $(x, y) \in R$ ama $(y, x) \notin R$ olan **bir** çift vardır.
- Ters simetrik değil: $x \neq y$ olduğu hâlde hem (x, y) hem (y, x) R 'de olan **bir** çift vardır.
- Geçişli değil: $(x, y), (y, z) \in R$ ama $(x, z) \notin R$ olan **bir** üçlü vardır.

⚠ Simetrik ile ters simetrik birbirinin zıddı değildir

İki özellik birbirini dışlamaz, birinin yokluğu ötekinin varlığı anlamına gelmez. X üzerindeki eşitlik bağıntısı $\{(x, x) : x \in X\}$ hem simetrik hem ters simetiktir. $\{1, 2, 3\}$ üzerinde $\{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ ise ne simetiktir ($(1, 3) \in R$ ama $(3, 1) \notin R$) ne ters simetiktir ($(1, 2), (2, 1) \in R$ ama $1 \neq 2$).

Örnek 4.3 (Sonlu Bir Bağıntının Özellikleri). $X = \{1, 2, 3\}$ üzerinde $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ bağıntısının yansımali, simetrik, ters simetrik ve geçişli olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

Yansımali: $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ üçü de R 'dedir; evet.

Simetrik: R 'deki her (x, y) için (y, x) 'i arayalım. (x, x) biçimindeki çiftler kendi tersleridir; $(1, 2)$ 'nin tersi $(2, 1) \in R$ ve $(2, 1)$ 'in tersi $(1, 2) \in R$. Evet.

Ters simetrik: $(1, 2) \in R$ ve $(2, 1) \in R$ olduğu hâlde $1 \neq 2$. Bu bir karşıt örnektir; hayır.

Geçişli: $(x, y), (y, z) \in R$ olan her üçlüyü denetlemeliyiz. İçinde (x, x) geçen zincirler otomatik sağlanır (örneğin $(1, 1), (1, 2) \rightarrow (1, 2)$). Geriye $(1, 2), (2, 1) \rightarrow (1, 1) \in R$ ve $(2, 1), (1, 2) \rightarrow (2, 2) \in R$ kalır. Evet.

Sonuç: R yansımali, simetrik ve geçişlidir, ters simetrik değildir. Birazdan göreceğimiz dille R bir denklik bağıntısıdır; 1 ile 2'yi "aynı", 3'ü ayrı bir sınıfa koyar.

■

Örnek 4.4 (Reel Sayılar Üzerinde Üç Bağıntı). $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq, <$ ve "yakınlık" bağıntısı $xYy \Leftrightarrow |x - y| < 1$ için dört özelliği inceleyiniz.

Çözüm.

$\leq$ bağıntısı. Yansımali: her x için $x \leq x$. Simetrik değil: $1 \leq 2$ ama $2 \leq 1$ değil. Ters simetrik: $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$. Geçişli: $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$. (Bu gerçekler Bölüm 7.1'ndeki sıralama aksiyomlarından çıkar; şimdilik bilinen özellikler olarak kullanıyoruz.)

$<$ bağıntısı. Yansımali değil: $1 < 1$ yanlıştır. Simetrik değil: $1 < 2$ ama $2 < 1$ değil. Geçişli: $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$. Ters simetrik: burada ince bir nokta var. " $x < y$ ve $y < x$ " önermesi hiçbir x, y çifti için doğru değildir; hipotezi yanlış olan gerektirme doğru olduğundan ters simetriklik koşulu (boşluktan) sağlanır. Evet, $<$ ters simetiktir.

Y bağıntısı. Yansımali: $|x - x| = 0 < 1$. Simetrik: $|x - y| = |y - x|$. Ters simetrik değil: $|0 - 0,5| < 1$ ve $|0,5 - 0| < 1$ ama $0 \neq 0,5$. Geçişli değil: $0Y0,7$ ve $0,7Y1,4$ ($|0 - 0,7| = 0,7 < 1$, $|0,7 - 1,4| = 0,7 < 1$) ama $|0 - 1,4| = 1,4 \geq 1$, yani $0Y1,4$ değil.

Bağıntı	Yansımalı	Simetrik	Ters simetrik	Geçişli
$\leq$	evet	hayır	evet	evet
$<$	hayır	hayır	evet	evet
Y	evet	evet	hayır	hayır

■

Yakınlık örneği öğreticidir: “yakın olmak” günlük dilde geçişli gibi görünür ama küçük adımlar birikerek büyük fark yaratır. Analizde ε - δ argümanlarının dikkat gerektirmesinin bir nedeni de budur.

4.3 Denklik Bağıntıları

“Aynı yaşta olmak”, “aynı takımda oynamak”, “3’e bölündüğünde aynı kalanı vermek”: bu ilişkilerin ortak yanı, bir kümeyi birbirine karışmayan “aynı türden” gruplara ayırmalarıdır. Bunu sağlayan tam olarak üç özelliştir.

Tanım 4.5 (Denklik Bağıntısı ve Denklik Sınıfı). X üzerinde bir R bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişliyse R ’ye bir **denklik bağıntısı** (equivalence relation) denir. Denklik bağıntıları çoğu zaman $\sim$ ile gösterilir: $x \sim y$.

R bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olsun. x ile ilişkili bütün elemanların kümesine x ’in **denklik sınıfı** (equivalence class) denir:

$$[x] = \{y \in X : xRy\}.$$

Bütün denklik sınıflarının kümesine X ’in R ’ye göre **bölüm kümesi** (quotient set) denir ve $X/R = \{[x] : x \in X\}$ ile gösterilir.

Simetri sayesinde $[x] = \{y \in X : yRx\}$ de yazılabilir; “ x ’in ilişkili olduğu” ile “ x ile ilişkili olan” elemanlar aynıdır. En basit denklik bağıntısı eşitlik: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$; her sınıf tek elemanlıdır, $[x] = \{x\}$. En kaba denklik bağıntısı $X \times X$ ’tir: herkes herkese denktir ve tek bir sınıf vardır, $[x] = X$. İlginç olanlar bu iki uç arasındadır.

Örnek 4.5 (Üç Bölümden Kalan). $\mathbb{Z}$ üzerinde $xRy \Leftrightarrow “x - y$ sayısı 3’e bölünür” bağıntısını tanımlayalım; yani xRy demek, $x - y = 3k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ bulunması demektir (bölünebilme kavramı Tanım 11.3’de kesin olarak ele alınacak). R ’nin bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve denklik sınıflarını bulunuz.

Çözüm.

Yansımalı: her $x \in \mathbb{Z}$ için $x - x = 0 = 3 \cdot 0$, yani xRx .

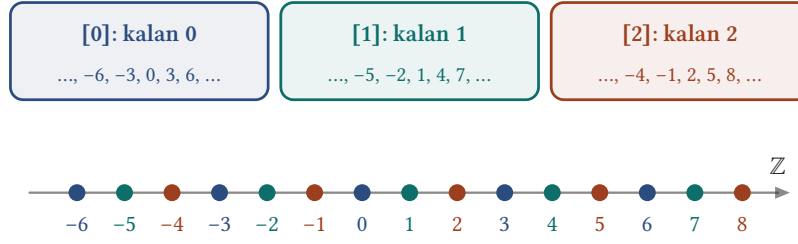
Simetrik: xRy olsun; $x - y = 3k$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. O zaman $y - x = 3(-k)$ ve $-k \in \mathbb{Z}$; yani yRx .

Geçişli: xRy ve yRz olsun; $x - y = 3k$ ve $y - z = 3m$ olan $k, m \in \mathbb{Z}$ vardır. Taraf tarafa toplayınca $x - z = 3k + 3m = 3(k + m)$ ve $k + m \in \mathbb{Z}$; yani xRz .

Üç özellik sağlandığından R bir denklik bağıntısıdır.

Sınıflar: $[0] = \{y \in \mathbb{Z} : y = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$, yani 3’ün katları. $[1] = \{y : y - 1 = 3k\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$, yani 3’e bölündüğünde 1 kalanını verenler. $[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$, yani 2 kalanını verenler.

Başka sınıf var mı? Her $y \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere $y = 3q + r$ biçiminde yazılabilir (bölme algoritması, Teorem 12.4). O zaman $y - r = 3q$, yani yRr ve dolayısıyla $y \in [r]$. Demek ki her tam sayı bu üç sınıftan birindedir. Üç sınıf ikiye ikiye ayrıktır: $r, s \in \{0, 1, 2\}$ ve $y \in [r] \cap [s]$ olsa $y - r = 3k$ ve $y - s = 3m$ olurdu; çıkarınca $r - s = 3(m - k)$, yani $r - s$ sayısı 3’ün bir katı olurdu. Oysa $|r - s| \leq 2$; 3’ün bu aralıktaki tek katı 0’dır, dolayısıyla $r = s$. Örneğin $[4] = [1]$ ve $[-3] = [0]$ ’dır; bir sınıf, elemanlarından herhangi biriyle adlandırılabilir.



Şekil 4.1: Mod 3 denkliği $\mathbb{Z}$ 'yi üç sınıfa böler: 3'e bölündüğünde 0, 1 ve 2 kalanını verenler. Her tam sayı tam olarak bir sınıfa düşer; sınıflar ayrıktır ve birleşimleri $\mathbb{Z}$ 'dir.

Sonuç: $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2]\}$ ve $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$, birleşim ayrıktır. Bu bağıntıya “mod 3 denkliği” denir ve $x \equiv y \pmod{3}$ yazılır.

Örnekte gördüğümüz olgu (sınıfların bütün kümeyi ayrık parçalara bölmesi) rastlantı değildir; her denklik bağıntısı için geçerlidir.

Teorem 4.1 (Denklik Sınıflarının Özellikleri). R, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y \in X$ için

1. $x \in [x]$; özellikle hiçbir denklik sınıfı boş değildir.
2. $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$.
3. Ya $[x] = [y]$ ya da $[x] \cap [y] = \emptyset$; iki denklik sınıfı ya aynıdır ya ayrıktır.
4. $\bigcup_{x \in X} [x] = X$.

İspat.

(1) R yansımali olduğundan xRx , yani tanım gereği $x \in [x]$.

(2) $(\Rightarrow) xRy$ olsun. Önce $[y] \subseteq [x]$: $z \in [y]$ alalım, yani yRz . xRy ve yRz olduğundan geçişlilikle xRz , yani $z \in [x]$. Şimdi $[x] \subseteq [y]$: simetri ile yRx 'tir; az önceki akıl yürütmeyi x ile y 'nin rolleri değişmiş olarak tekrarlırsak $[x] \subseteq [y]$ çıkar. İki kapsama $[x] = [y]$ verir.

$(\Leftarrow) [x] = [y]$ olsun. (1) ile $y \in [y] = [x]$; tanım gereği xRy .

(3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ olsun; ortak bir z alalım: xRz ve yRz . Simetri ile zRy ; xRz ve zRy 'den geçişlilikle xRy . (2) gereği $[x] = [y]$. Demek ki kesişim boş değilse sınıflar eşittir; bu da istenen ikilemdir.

(4) Her $[x] \subseteq X$ olduğundan Teorem 3.2 (2) ile birleşim X 'in içindedir. Tersine $x \in X$ ise (1) ile $x \in [x]$ ve dolayısıyla x birleşimdedir.

Bu teoremin söylediği şeyin bir adı vardır.

Tanım 4.6 (Bölüntü). X boş olmayan bir küme olsun. X 'in boş olmayan alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{B}$ topluluğu,

1. $\mathcal{B}$ 'deki farklı iki küme ayrık ve
2. $\mathcal{B}$ 'deki kümelerin birleşimi X ise

X 'in bir **bölüntüsü** (partition) diye adlandırılır. $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarına bölüntünün **parçaları** denir.

Sonuç 4.1 (Denklik Bağıntısı Bölüntü Verir). R, X üzerinde bir denklik bağıntısıysa bölüm kümesi X/R , X 'in bir bölüntüsüdür.

İspat.

Teorem 4.1'nin (1) maddesi sınıfların boş olmadığını, (3) maddesi farklı sınıfların ayrık olduğunu, (4) maddesi birleşimlerinin X olduğunu söyler; bunlar tam olarak bölüntü tanımındaki koşullardır.

Karşıt yön de doğrudur: her bölüntü bir denklik bağıntısından gelir.

Önerme 4.2 (Bölüntü Denklik Bağıntısı Verir). $\mathcal{B}$, X 'in bir bölüntüsü olsun. $xRy \Leftrightarrow$ “ x ile y aynı parçadadır” biçiminde tanımlanan R , X üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve denklik sınıfları tam olarak $\mathcal{B}$ 'nin parçalarıdır.

İspat.

Her $x \in X$ bir parçadadır (birleşim X 'tir) ve yalnız bir parçadadır (parçalar ayrıktır); x 'i içeren parçaya P_x diyelim. O zaman $xRy \Leftrightarrow P_x = P_y$ 'dir.

Yansımali: $P_x = P_x$. Simetrik: $P_x = P_y$ ise $P_y = P_x$. Geçişli: $P_x = P_y$ ve $P_y = P_z$ ise $P_x = P_z$. Demek ki R bir denklik bağıntısıdır; eşitliğin özelliklerini devralmıştır.

x 'in sınıfı $[x] = \{y : P_y = P_x\}$ 'tir. $y \in P_x$ ise y 'nin bulunduğu tek parça P_x olduğundan $P_y = P_x$, yani $y \in [x]$; tersine $y \in [x]$ ise $y \in P_x$. Böylece $[x] = P_x$.

Denklik bağıntısı ile bölüntü, aynı şeyin iki dilidir: “hangi elemanlar birbirine denk” demekle “küme hangi parçalara ayrılıyor” demek aynı bilgiyi taşır.

Örnek 4.6 (Kareleri Eşit Sayılar). $\mathbb{R}$ üzerinde $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve sınıflarını bulunuz.

Çözüm.

Yansımali: $x^2 = x^2$. Simetrik: $x^2 = y^2$ ise $y^2 = x^2$. Geçişli: $x^2 = y^2$ ve $y^2 = z^2$ ise $x^2 = z^2$. Üç özellik de sayıların eşitliğinden devralınır; $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

$x \in \mathbb{R}$ için $[x] = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = x^2\}$. $y^2 = x^2$ eşitliği $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0$ 'a denktir; bir çarpım sıfırda çarpanlardan biri sıfırdır (Önerme 6.13), dolayısıyla $y = x$ ya da $y = -x$. Böylece

$$[x] = \{x, -x\}, \quad \text{özel olarak} \quad [0] = \{0\}.$$

Sınıflar: $\{0\}$ ve her $a > 0$ için $\{a, -a\}$ çiftleri. Bölüm kümesi $\mathbb{R}/\sim$, negatif olmayan reel sayılarla birebir eşleşir: her sınıf, negatif olmayan tek temsilcisi $|x|$ ile adlandırılabilir.

4.4 Sıralama Bağıntıları

Denklik bağıntısı “aynı” olmayı yakalar; sıralama bağıntısı ise “önce gelmeyi”. Sayılardaki $\leq$ 'yi örnek alırsak, yansımali, ters simetrik (iki yönlü $\leq$ eşitlik demektir) ve geçişlidir. Bu üç özelliği soyutlarız.

Tanım 4.7 (Kısmi Sıralama ve Tam Sıralama). X üzerinde bir R bağıntısı yansımali, ters simetrik ve geçişliyse R 'ye X üzerinde bir **kısmi sıralama bağıntısı** (partial order) denir; (X, R) ikilisine **kısmen sıralı küme** denir. Kısmi sıralamalar çoğu zaman $\preceq$ ile gösterilir.

$x \preceq y$ ya da $y \preceq x$ oluyorsa x ile y 'ye **karşılaştırılabilir** (comparable) denir. Bir kısmi sıralama, X 'in her x, y çifti karşılaştırılabilir oluyorsa, yani

$$\forall x, y \in X, x \preceq y \text{ veya } y \preceq x$$

sağlanıyorsa, **tam sıralama** (total order, linear order) diye adlandırılır; $(X, \preceq)$ o zaman **tam sıralı kümedir**.

“Kısmi” sözü, bazı çiftlerin karşılaştırılamayabileceğini vurgular; tam sıralamada herkes herkesle karşılaştırılır.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ üzerindeki $\leq$ bağıntısı tam sıralamanın temel örneğidir: Örnek 4.4’nde üç özelliği gördük; karşılaştırılabilirlik ise her a, b için $a \leq b$ ya da $b \leq a$ olmasıdır (üçlem yasası, Bölüm 7.1).
- Sözlük sıralaması (alfabetik sıra) sözcükler kümesi üzerinde bir tam sıralamadır: farklı iki sözcükten biri sözlükte ötekenden önce gelir.

i Kesin sıralama

$<$ bağıntısı yansımali olmadığından tanımımıza göre kısmi sıralama **değildir**; ona **kesin sıralama** (strict order) denir. İkişii birbirinden türetilir: $x < y \Leftrightarrow (x \prec y \text{ ve } x \neq y)$ ve $x \prec y \Leftrightarrow (x < y \text{ veya } x = y)$. Hangisiyle çalışıldığı bağlamdan anlaşılır.

Örnek 4.7 (Alt Küme Bağıntısı Kısmi Sıralamadır). X bir küme olsun. $\mathcal{P}(X)$ üzerinde alt küme bağıntısı $\subseteq$ 'nin bir kısmi sıralama olduğunu, X 'in en az iki elemanı varsa tam sıralama olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Yansımali: her $A \subseteq X$ için $A \subseteq A$ (Önerme 3.1). Ters simetrik: $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise Tanım 3.1'deki eşitlik tanımı gereği $A = B$. Geçişli: $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ (Önerme 3.1). Demek ki $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

X 'te $a \neq b$ iki eleman olsun. $\{a\} \subseteq \{b\}$ yanlıştır ($a \notin \{b\}$) ve $\{b\} \subseteq \{a\}$ yanlıştır ($b \notin \{a\}$). $\{a\}$ ile $\{b\}$ karşılaştırılmaz; sıralama tam değildir.

■

Örnek 4.8 (Bölünebilirlik Kısmi Sıralamadır). $\mathbb{N}$ üzerinde $a \mid b \Leftrightarrow "b = ak \text{ olacak biçimde bir } k \in \mathbb{N} \text{ vardır}"$ bağıntısının bir kısmi sıralama olduğunu, ama tam sıralama olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Yansımali: $a = a \cdot 1$ olduğundan $a \mid a$.

Ters simetrik: $a \mid b$ ve $b \mid a$ olsun; $b = ak$ ve $a = bm$ olan $k, m \in \mathbb{N}$ vardır. Birincisini ikincisine koyunca $a = ak m$, $a \neq 0$ ile sadeleştirince $km = 1$ çıkar. $k, m \geq 1$ doğal sayılardır; $k \geq 2$ olsaydı $km \geq 2m \geq 2$ olurdu. Demek ki $k = 1$ ve benzer biçimde $m = 1$; dolayısıyla $b = a$.

Geçişli: $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun; $b = ak$ ve $c = bm$. O zaman $c = (ak)m = a(km)$ ve $km \in \mathbb{N}$; yani $a \mid c$.

Tam değil: 3 ile 5'i ele alalım. $3 \mid 5$ olsaydı $5 = 3k$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ olurdu; $k = 1$ için 3, $k \geq 2$ için $3k \geq 6$ elde edilir, hiçbirisi 5 değildir. Aynı biçimde $5 \mid 3$ de yanlıştır ($5k \geq 5 > 3$). Demek ki 3 ile 5 karşılaştırılmaz.

■

Bölünebilirlik, "sıralama" sözcüğünün sayı doğrusundaki resimden ne kadar uzaklaşabileceğini gösterir: 1 herkesin altındadır ama 3 ile 5 yan yana durur, ne biri ötekinden önce gelir.

Kısmen sıralı kümelerde "en küçük eleman", "üst sınır", "en küçük üst sınır" gibi kavramlar tanımlanabilir. Bu kitapta bunları $(\mathbb{R}, \leq)$ için ayrıntılı inceleyeceğiz; reel sayıların en önemli özelliği olan tamlık tam da bu dille söylenir: **Üst Sınır, Supremum ve Tamlık Aksiyomu**.

4.5 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Bağıntı Alıştırmaları).

- $X = \{1, 2, 3, 4\}$ üzerinde $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$ bağıntısının dört özelliğini belirleyiniz. R bir kısmi sıralama mıdır, tam sıralama mıdır?
- $\mathbb{Z}$ üzerinde $xRy \Leftrightarrow x + y$ çift bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve sınıflarını bulunuz.
- $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a = c$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz; (a, b) 'nin sınıfını geometrik olarak betimleyiniz.
- Bölünebilirlik bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde ($k \in \mathbb{Z}$ alınarak) tanımlanırsa ters simetrik olmadığını gösteriniz.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde $(a, b) \prec (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ ve } b \leq d$ bağıntısının bir kısmi sıralama olduğunu, ama tam sıralama olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) Yansımali: $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ hepsi R 'dedir; evet. Simetrik değil: $(1, 2) \in R$ ama $(2, 1) \notin R$. Ters simetrik: R 'de hem (x, y) hem (y, x) bulunan çiftler yalnız $x = y$ olanlardır (köşegen dışındaki $(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)$ 'ün tersleri R 'de yoktur); evet. Geçişli: köşegen çiftleri içeren zincirler otomatik sağlanır; geriye $(1, 2), (2, 3) \rightarrow (1, 3) \in R$ kalır, başka zincir yoktur ($(2, 3)$ 'ten sonra yalnız $(3, 3), (1, 3)$ ve $(1, 4)$ 'ten sonra yalnız köşegen gelir). Evet.

Yansımali, ters simetrik ve geçişli olduğundan R bir kısmi sıralamadır. Tam değildir: $(2, 4) \notin R$ ve $(4, 2) \notin R$, yani 2 ile 4 karşılaştırılmaz (aynı biçimde 3 ile 4).

b) Yansımali: $x + x = 2x$ çifttir. Simetrik: $x + y = y + x$. Geçişli: $x + y = 2k$ ve $y + z = 2m$ olsun $(k, m \in \mathbb{Z})$. Taraf tarafa toplayıp $2y$ çıkarınca $x + z = 2k + 2m - 2y = 2(k + m - y)$, çift; yani xRz . R bir denklik bağıntısıdır.

Sınıflar: $[0] = \{y : y \text{ çift}\}$, çünkü $0 + y = y$. $[1] = \{y : 1 + y \text{ çift}\} = \{y : y \text{ tek}\}$. Her tam sayı ya çift ya tek olduğundan $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$ ve başka sınıf yoktur. Bu, mod 2 denkliğidir: $x + y$ 'nin çift olması, $x - y = (x + y) - 2y$ 'nin çift olmasına denktir.

c) Yansımali: $a = a$. Simetrik: $a = c$ ise $c = a$. Geçişli: $a = c$ ve $c = e$ ise $a = e$. Özellikler, birinci bileşenlerin eşitliğinden devralınır. (a, b) 'nin sınıfı

$$[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 : c = a\} = \{(a, d) : d \in \mathbb{R}\},$$

yani $x = a$ düşey doğrusudur. Bölüm kümesi, düzlemdeki bütün düşey doğruların kümesidir; her doğru x -eksenini kestiği a noktasıyla adlandırılabilir, dolayısıyla bölüm kümesi $\mathbb{R}$ ile birebir eşleşir.

d) $\mathbb{Z}$ üzerinde $a \mid b \Leftrightarrow b = ak$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. $-2 = 2 \cdot (-1)$ olduğundan $2 \mid -2$; $2 = (-2) \cdot (-1)$ olduğundan $-2 \mid 2$. Ama $2 \neq -2$. Bu karşıt örnek ters simetrikliği bozar. (Yansımali ve geçişlilik hâlâ geçerlidir; yansımali ve geçişli olan bağıntılara **ön sıralama** (preorder) denir.) $\mathbb{N}$ 'de sorun çıkmamasının nedeni, orada $km = 1$ denkleminin tek çözümünün $k = m = 1$ olmasıdır; $\mathbb{Z}$ 'de $k = m = -1$ de çözümdür.

e) Yansımali: $a \leq a$ ve $b \leq b$ olduğundan $(a, b) \preceq (a, b)$. Ters simetrik: $(a, b) \preceq (c, d)$ ve $(c, d) \preceq (a, b)$ ise $a \leq c$, $c \leq a$, $b \leq d$, $d \leq b$; $\leq$ 'nin ters simetrikliğiyle $a = c$ ve $b = d$, yani $(a, b) = (c, d)$. Geçişli: $(a, b) \preceq (c, d)$ ve $(c, d) \preceq (e, f)$ ise $a \leq c \leq e$ ve $b \leq d \leq f$; $\leq$ 'nin geçişliliğiyle $a \leq e$ ve $b \leq f$, yani $(a, b) \preceq (e, f)$. Her özellik bileşen bileşen $\leq$ 'den gelir; $\preceq$ bir kısmi sıralamadır.

Tam değil: $(1, 2)$ ile $(2, 1)$ 'i ele alalım. $(1, 2) \preceq (2, 1)$ için $2 \leq 1$ gerekirdi; yanlış. $(2, 1) \preceq (1, 2)$ için $2 \leq 1$ gerekirdi; yine yanlış. İki ikili karşılaştırılmaz. (Düzlemde $(a, b) \preceq (c, d)$, " (c, d) noktası (a, b) 'nin sağ üst çeyreğindedir" demektir; sol üst ya da sağ alt çeyrekteki noktalar karşılaştırılmaz.)

■

Bağıntıların en özel türü, her elemanı tam olarak bir elemanla eşleyenlerdir; bunlara fonksiyon diyoruz: **Fonksiyonlar**.

5. Fonksiyonlar

Önceki bölümde bağıntıları inceledik: bir bağıntı, iki kümenin elemanlarından oluşan sıralı ikililerin herhangi bir kümesiydi; bir kurala dayanması gerekmiyordu. Matematik'in her yerinde karşımıza çıkan **fonksiyon**, bağıntının çok özel bir türüdür: tanım kümesindeki her elemanı **tam olarak bir** elemana gönderir. Bu bölümde fonksiyonu bağıntı diliyle kesin olarak tanımlayacak, bir kümenin görüntüsü ile ters görüntüsünün küme işlemleriyle nasıl uyduğunu (ve nerede uyuşmadığını) göreceğiz. Ardından birebir, örten ve birebir-örten fonksiyonları, bileşkeyi ve ters fonksiyonu ele alacağız. Buradaki sonuçlar kitabın geri kalanında sürekli kullanılacak: diziler $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlardır, kümelerin “büyüklüğü” birebir-örten fonksiyonlarla karşılaştırılır, açık kümelerin ters görüntüsü ise sürekliliğin başka bir yüzüdür.

5.1 Fonksiyon Kavramı

Bir bağıntı, X 'in bir elemanını Y 'nin hiçbir elemanı ile eşlemeyebilir ya da birden çok elemanı ile eşleyebilir. Fonksiyon dediğimiz şeyde bu iki serbestlik yoktur: her girdi için **bir** çıktı vardır ve bu çıktı **tektir**. Tanım tam olarak bu iki koşulu söyler.

Tanım 5.1 (Fonksiyon). X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Bir $f \subseteq X \times Y$ bağıntısı (Tanım 4.1) aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa f 'ye X 'ten Y 'ye bir **fonksiyon** denir:

1. **Varlık koşulu:** Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak biçimde en az bir $y \in Y$ vardır. (Tanım kümesinde “açıkta kalan” eleman yoktur; her eleman bir yere gönderilir.)
2. **Teklik koşulu:** Her $x \in X$ için, $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f$ ise $y_1 = y_2$ 'dir. (Bir eleman aynı anda iki farklı yere gönderilemez.)

İki koşul birlikte şöyle özetlenir: Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olan bir ve yalnız bir $y \in Y$ vardır. Sembolle,

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in f.$$

Bu tek y elemanı $f(x)$ ile gösterilir ve $y = f(x)$ yazılır.

Gösterim ve terimler:

- X 'ten Y 'ye bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ biçiminde yazılır.
- X kümesine fonksiyonun **tanım kümesi** (domain), Y kümesine **değer kümesi** (codomain) denir.
- $y = f(x)$ yazımında x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişkendir**. y elemanına x 'in f altındaki **görüntüsü** (ya da f 'nin x 'teki **değeri**) denir.
- Fonksiyonu vermek demek üç şeyi vermek demektir: tanım kümesi, değer kümesi ve kural. Bunlardan biri değişirse fonksiyon da değişir.

$f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun **grafiği**, $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ sıralı ikili kümesidir. Dikkat edilirse bu küme, bağıntı olarak f 'nin ta kendisidir; yani tanımımızda fonksiyon ile grafiği aynı nesnedir. X ve Y reel sayı kümeleri olduğunda grafik, kartezyen düzlemde bir eğri çizer.

i Düşey doğru testi

Düzlemdeki bir eğrinin bir fonksiyonun grafiği olup olmadığı şöyle anlaşılır: düzlemde çizilen **her** düşey doğru eğriyi **en çok bir** noktada kesiyorsa eğri bir fonksiyon grafiğidir. Bir düşey doğru $x = x_0$ doğrusudur; eğriyi iki noktada kesmesi, x_0 'ın iki farklı görüntüsü olması, yani teklik koşulunun bozulması demektir. Tanım kümesi bütün $\mathbb{R}$ ise ayrıca her düşey doğrunun eğriyi **en az bir** noktada kesmesi gerekir (varlık koşulu).

Örnek 5.1 (Fonksiyon Olan ve Olmayan Bağıntılar). $\mathbb{R}$ üzerinde $y = x^2 + 1$ ve $y^2 = x + 1$ denklemleriyle verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm.

$y = x^2 + 1$ bir fonksiyondur. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1$ sayısı tanımlıdır ve tek bir değerdir; dolayısıyla hem varlık hem teklik koşulu sağlanır. Bağntı olarak yazarsak $f = \{(x, x^2 + 1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.

$y^2 = x + 1$ bir fonksiyon değildir. $x = 8$ alalım: $y^2 = 9$ olur ve bu denklemi $y = 3$ ile $y = -3$ sağlar. Yani $(8, 3)$ ve $(8, -3)$ ikililerinin ikisi de bağıntıdadır; teklik koşulu bozulur. Üstelik $x = -2$ için $y^2 = -1$ denkleminin reel çözümü yoktur; varlık koşulu da bozulur. Geometrik olarak $x = 8$ düşey doğrusu eğriyi iki noktada keser, $x = -2$ doğrusu ise hiç kesmez.

■

Bir kural verilen tanım kümesinde fonksiyon olmayabilir ama tanım kümesi uygun biçimde daraltılınca fonksiyon olabilir.

Örnek 5.2 (Tanım Kümesini Daraltmak). $f(x) = \frac{1}{x^2}$ kuralı $\mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyon tanımlar mı? Tanımlamıyorsa uygun bir tanım kümesi bulalım.

Çözüm.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ bir fonksiyon değildir; çünkü $x = 0$ için $1/0^2$ tanımsızdır, yani 0 elemanının görüntüsü yoktur. Varlık koşulu bozulur.

Buna karşılık $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^2$ bir fonksiyondur: sıfırdan farklı her x için $x^2 \neq 0$ olduğundan $1/x^2$ tanımlı ve tek bir reel sayıdır.

■

5.2 Görüntü ve Ters Görüntü

Bir fonksiyon tek tek elemanları taşır; ama çoğu zaman bir **kümenin** nereye gittiğini ya da bir kümeye **nereden** geldiğini bilmek isteriz. Örneğin “hangi x ’ler için $f(x)$ aralığın içinde kalır?” sorusu, ileride süreklilik ve limit konularının kalbindedir.

Tanım 5.2 (Görüntü ve Ters Görüntü). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

1. $A \subseteq X$ için A ’nın f altındaki **görüntüsü**

$$f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A, y = f(a)\} = \{f(a) : a \in A\}$$

kümesidir; yani A ’nın elemanlarının görüntülerinin kümesi.

2. $A = X$ alındığında elde edilen $f(X)$ kümesine f ’nin **görüntü kümesi** (range) denir. Her zaman $f(X) \subseteq Y$ ’dir; ama bu iki küme eşit olmak zorunda değildir.
3. $B \subseteq Y$ için B ’nin f altındaki **ters görüntüsü**

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

kümesidir; yani görüntüsü B ’ye düşen tanım kümesi elemanlarının kümesi.

⚠ Ters görüntüdeki üs -1 ters fonksiyon değildir

$f^{-1}(B)$ yazımındaki f^{-1} , f ’nin ters fonksiyonu olduğu anlamına **gelmez**. Ters görüntü **her** fonksiyon için tanımlıdır; f ’nin tersi olsun ya da olmasın. $B = \{y\}$ tek elemanlı bir kümeye $f^{-1}(\{y\})$ yerine kısaca $f^{-1}(y)$ yazılır; bu, y ’ye giden **bütün** x ’lerin kümesidir (boş, tek elemanlı ya da çok elemanlı olabilir). Ters fonksiyonu bölümün sonunda ayrıca tanımlayacağız.

Örnek 5.3 (Kare Fonksiyonunda Görüntü ve Ters Görüntü). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulalım.

- a) $A = [-2, 3]$ için $f(A)$ ve görüntü kümesi $f(\mathbb{R})$.
- b) $B = [4, 9]$, $C = \{25\}$ ve $D = [-4, -1]$ için $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$.

Çözüm.

a) $x \in [-2, 3]$ ise $|x| \leq 3$, dolayısıyla $0 \leq x^2 \leq 9$; yani $f(A) \subseteq [0, 9]$. Tersine, $0 \leq y \leq 9$ verildiğinde $x = \sqrt{y} \in [0, 3] \subseteq A$ için $f(x) = y$ olur; yani $[0, 9] \subseteq f(A)$. Dolayısıyla

$$f(A) = f([-2, 3]) = [0, 9].$$

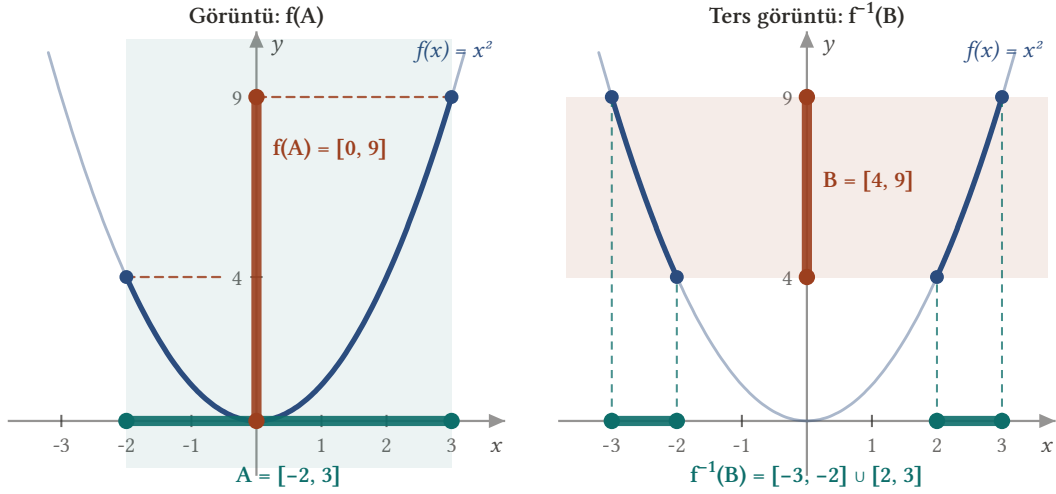
Görüntü kümesi için: her reel sayının karesi negatif değildir, dolayısıyla $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, \infty)$; tersine her $y \geq 0$ için $f(\sqrt{y}) = y$ olduğundan $[0, \infty) \subseteq f(\mathbb{R})$. Böylece $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$. Değer kümesi $\mathbb{R}$ iken görüntü kümesi yalnızca negatif olmayan reel sayılardır; iki küme farklıdır.

b) $f^{-1}(B) = \{x : 4 \leq x^2 \leq 9\}$. $x^2 \leq 9$ eşitsizliği $|x| \leq 3$, $x^2 \geq 4$ eşitsizliği $|x| \geq 2$ demektir; ikisi birlikte $2 \leq |x| \leq 3$ verir. Böylece

$$f^{-1}([4, 9]) = [-3, -2] \cup [2, 3].$$

$$f^{-1}(C) = \{x : x^2 = 25\} = \{-5, 5\}.$$

$$f^{-1}(D) = \{x : -4 \leq x^2 \leq -1\} = \emptyset; \text{çünkü bir reel sayının karesi negatif olamaz.}$$



Şekil 5.1: Solda $A = [-2, 3]$ aralığının görüntüsü: grafiğin A üzerindeki parçası y eksenine $[0, 9]$ olarak yansır. Sağda $B = [4, 9]$ şeridinin ters görüntüsü: grafiğin şeride düşen iki parçası x eksenine $[-3, -2] \cup [2, 3]$ olarak iner.

Grafik, x ekseninde $A = [-2, 3]$ aralığının y eksenine $[0, 9]$ olarak yansıdığını, ikinci panelde ise y eksenindeki $[4, 9]$ aralığının x eksenine iki parça hâlinde geri döndüğünü gösteriyor: ters görüntü, grafiğin o şeride düşen parçalarının x eksenine izdüşümüdür.

■

5.3 Görüntü, Ters Görüntü ve Küme İşlemleri

Görüntü ve ters görüntü, birleşim, kesişim ve fark işlemleriyle nasıl ilişkilidir? Aşağıdaki teorem bunun tam listesidir. Dikkat edilecek nokta şudur: **ters görüntü** bütün küme işlemlerine kusursuz uyar (hep eşitlik vardır), **görüntü** ise yalnızca birleşimle tam uyur; kesişim ve farkta yalnızca bir yönde kapsama elde edilir.

Teorem 5.1 (Görüntü ve Ters Görüntünün Özellikleri). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon; $A, A_1, A_2 \subseteq X$ ve $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

1. $A_1 \subseteq A_2$ ise $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
4. $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$.

5. $f(X \setminus A)$ ile $Y \setminus f(A)$ eşit olmak zorunda değildir; yani $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ eşitliği genel olarak yanlıştır.
6. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
7. $f^{-1}(Y \setminus B_1) = X \setminus f^{-1}(B_1)$.
8. $B_1 \subseteq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
9. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
10. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
11. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
12. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

İspat.

Bütün ispatlar aynı iki tanıma dayanır: $y \in f(A)$ demek “ $y = f(a)$ olan bir $a \in A$ vardır” demek; $x \in f^{-1}(B)$ demek ise “ $f(x) \in B$ ” demektir. (4), (6) ve (10) maddelerinin ispatı bölüm sonundaki [Alıştırma 5.1](#) alıştırmasının (a) şıkında verilmiştir.

(1) $y \in f(A_1)$ olsun. O hâlde $y = f(a)$ olan bir $a \in A_1$ vardır. $A_1 \subseteq A_2$ olduğundan $a \in A_2$ ’dir; dolayısıyla $y = f(a) \in f(A_2)$.

(2) $y \in f(A_1 \cap A_2)$ keyfi olsun. Görüntü tanımından $y = f(x)$ olan bir $x \in A_1 \cap A_2$ vardır. $x \in A_1$ olduğundan $f(x) \in f(A_1)$; $x \in A_2$ olduğundan $f(x) \in f(A_2)$. Böylece $y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$ bulunur. y keyfi olduğundan $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ ’dir.

(3) Denkliklerle ilerleyelim:

$$\begin{aligned}
 y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2, y = f(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists x, [(x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)] \\
 &\Leftrightarrow \exists x, [(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))] \\
 &\Leftrightarrow (\exists x \in A_1, y = f(x)) \vee (\exists x \in A_2, y = f(x)) \\
 &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).
 \end{aligned}$$

Zincirdeki $\Leftrightarrow$ adımlarını yukarıdan aşağıya sayarsak üçüncü adımda dağılma yasası ([Teorem 1.1](#)), dördüncü adımda “varlıksal niceleyici $\vee$ üzerine dağılır” kuralı kullanıldı.

(5) Tek bir karşı örnek yeter. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve $A = [0, \infty)$ olsun. $X \setminus A = (-\infty, 0)$ ve negatif sayıların kareleri bütün pozitif sayıları verir: $f(X \setminus A) = (0, \infty)$. Öte yandan $f(A) = [0, \infty)$ olduğundan $Y \setminus f(A) = (-\infty, 0)$. İki küme farklıdır; hatta kesişimleri bile boştur.

(7) Her $x \in X$ için $f(x) \in Y$ olduğundan “ $f(x) \in Y \setminus B_1$ ” ile “ $f(x) \notin B_1$ ” aynı şeydir. O hâlde

$$x \in f^{-1}(Y \setminus B_1) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus B_1 \Leftrightarrow f(x) \notin B_1 \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B_1).$$

(8) $x \in f^{-1}(B_1)$ olsun; yani $f(x) \in B_1$. $B_1 \subseteq B_2$ olduğundan $f(x) \in B_2$, yani $x \in f^{-1}(B_2)$.

(9) Yine denkliklerle:

$$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

(11) $a \in A$ olsun. Görüntü tanımından $f(a) \in f(A)$ ’dır. Ters görüntü tanımına göre bu, tam olarak $a \in f^{-1}(f(A))$ demektir.

(12) $y \in f(f^{-1}(B))$ olsun. O hâlde $y = f(x)$ olan bir $x \in f^{-1}(B)$ vardır. $x \in f^{-1}(B)$ olması $f(x) \in B$ demektir; yani $y = f(x) \in B$.

■

Teoremin en çok kullanılan yüzü şudur: ters görüntü, kesişim, birleşim, fark ve tümleyenle **yer değiştirir**; görüntü ise yalnızca birleşimle yer değiştirir. Bu yüzden ileride açık kümeler ve süreklilik gibi konularda ifadeler görüntü yerine ters görüntüyle kurulur.

⚠ Görüntüde kesişim eşitliği genel olarak yanlıştır

(2) maddesindeki kapsama genel olarak eşitliğe dönüşmez; yani $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ her fonksiyon için doğru değildir. Aynı şekilde (11) ve (12)’deki kapsamalar da eşitlik olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek üçünü birden gösteriyor.

Örnek 5.4 (Kesişimin Görüntüsü Görüntülerin Kesişimi Değildir). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun.

- a) $A_1 = [-2, 0]$ ve $A_2 = [0, 2]$ için $f(A_1 \cap A_2)$ ile $f(A_1) \cap f(A_2)$ kümelerini karşılaştıralım.
 b) $A = [0, 1]$ için $f^{-1}(f(A))$ 'yi, $B = [-1, 1]$ için $f(f^{-1}(B))$ 'yi hesaplayalım.

Çözüm.

a) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ olduğundan $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. Öte yandan $f(A_1) = f([-2, 0]) = [0, 4]$ ve $f(A_2) = f([0, 2]) = [0, 4]$; dolayısıyla $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4]$. Açıkça $\{0\} \subseteq [0, 4]$ ama iki küme eşit değildir. Sorunun kaynağı, f 'nin -2 ile 2 gibi farklı noktaları aynı yere göndermesidir; birazdan bu durumun tam adını (birebir olmamak) vereceğiz.
 b) $f(A) = f([0, 1]) = [0, 1]$ ve $f^{-1}([0, 1]) = \{x : 0 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$. Yani $A = [0, 1] \subsetneq [-1, 1] = f^{-1}(f(A))$.
 $f^{-1}(B) = \{x : -1 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$ ve $f([-1, 1]) = [0, 1]$. Yani $f(f^{-1}(B)) = [0, 1] \subsetneq [-1, 1] = B$; B 'nin negatif kısmına hiçbir x gönderilmediği için o kısım geri alınamaz.

■

Birleşim ve kesişim özellikleri, iki kümeden herhangi bir indisli aileye (Tanım 3.8) genişler.

Teorem 5.2 (İndisli Ailelerde Görüntü ve Ters Görüntü). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $(A_i)_{i \in I}$, X 'in alt kümelerinden oluşan bir indisli aile (her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$) ve $(B_j)_{j \in J}$, Y 'nin alt kümelerinden oluşan bir indisli aile olsun. O zaman:

1. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.
3. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

İspat.

(1) maddesini ispatlayalım; (2), (3) ve (4) aynı kalıpla gider ve [Alıştırma 5.1](#) alıştırmasının (b) şıkında çözülmüştür.

(1) $y \in Y$ keyfi olsun. Genel birleşimin tanımını $(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i)$ ve görüntü tanımını art arda uygulayalım:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i, y = f(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \exists i \in I, [x \in A_i \wedge y = f(x)] \\
 &\Leftrightarrow \exists i \in I \exists x \in A_i, y = f(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists i \in I, y \in f(A_i) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i).
 \end{aligned}$$

Zincirdeki $\Leftrightarrow$ adımlarını yukarıdan aşağıya sayarsak üçüncü adımda iki varlıksal niceleyicinin yerinin değiştirilebildiğini kullandık ($\exists x \exists i$ ile $\exists i \exists x$ aynı şeyi söyler; sıra yalnızca $\forall$ ile $\exists$ karıştığında önemlidir).

■

Bu genel biçim, ileride sonsuz çoklukta kümeyle çalışırken gerekecek: örneğin sayılabilir çoklukta aralığın ters görüntüsünü, aralıkların ters görüntülerinin birleşimi ya da kesişimi olarak hesaplayabileceğiz.

5.4 Bazı Özel Fonksiyonlar

Sık karşılaştığımız birkaç fonksiyona ad verelim.

Tanım 5.3 (Birim Fonksiyon ve Sabit Fonksiyon).

1. X bir küme olsun. Her $x \in X$ için $I_X(x) = x$ ile tanımlanan $I_X : X \rightarrow X$ fonksiyonuna X üzerindeki **birim fonksiyon** (identity function) denir; her elemanı kendisine gönderir.
2. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için, her $x \in X$ 'te $f(x) = c$ olacak biçimde tek bir $c \in Y$ varsa f 'ye **sabit fonksiyon** denir.

Tanım 5.4 (Karakteristik Fonksiyon). X bir evrensel küme ve $A \subseteq X$ olsun. A 'nın **karakteristik fonksiyonu** $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanır. Bu fonksiyon, bir elemanın A 'ya ait olup olmadığını “işaretler”.

Örneğin $X = \mathbb{R}$ ve $A = \mathbb{Q}$ için $\chi_{\mathbb{Q}}$, rasyonellerde 1, irrasyonellerde 0 değerini alan **Dirichlet fonksiyonu**dur; limit ve süreklilik konularında en önemli karşı örneklerden biri olacaktır (bkz. [Örnek 28.3](#)). $\chi_{[0,1]}$ fonksiyonunun grafiği ise $[0, 1]$ üzerinde 1 yüksekliğinde bir basamak, dışarıda x eksenidir.

İki fonksiyon ne zaman “aynı”dır? Fonksiyon bir sıralı ikili kümesi olduğundan yanıt bellidir: aynı girdilere aynı çıktılar veriyorsa.

Tanım 5.5 (Fonksiyonların Eşitliği). $f : X \rightarrow Y$ ve $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına **eşit** denir ve $f = g$ yazılır.

Eşitlik için tanım kümelerinin ve değer kümelerinin aynı olması, üstelik kuralların her noktada aynı değeri vermesi gerekir. Bağıntı diliyle bu, f ve g sıralı ikili kümelerinin eşit olmasından başka bir şey değildir. Bazen bir fonksiyonu yalnızca tanım kümesinin bir parçası üzerinde incelemek isteriz; bazen de küçük bir kümede verilmiş bir fonksiyonu daha büyük bir kümeye “uzatmak” isteriz. Bu iki işlemin adı vardır.

Tanım 5.6 (Kısıtlama ve Genişleme). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. Her $a \in A$ için $f|_A(a) = f(a)$ kuralıyla tanımlanan $f|_A : A \rightarrow Y$ fonksiyonuna f 'nin A 'ya **kısıtlaması** (restriction) denir. Tersine, $g : A \rightarrow Y$ verilmişken $f|_A = g$ olacak biçimde bir $f : X \rightarrow Y$ bulunmuşsa f 'ye g 'nin X 'e bir **genişlemesi** (extension) denir.

Örnek 5.5 (Eşit Görünen Ama Eşit Olmayan Fonksiyonlar). $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$ olsun. $f = g$ midir? f ile g arasındaki ilişki nedir?

Çözüm.

$x \neq 1$ için $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ olduğundan $f(x) = x + 1 = g(x)$ 'tir; yani iki fonksiyon ortak tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ üzerinde aynı değerleri alır. Ancak tanım kümeleri farklıdır: g , $x = 1$ 'de tanımlıdır ($g(1) = 2$), f ise değildir. Dolayısıyla $f \neq g$.

Doğru ifade şudur: $g|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} = f$, yani f , g 'nin kısıtlamasıdır; g de f 'nin $\mathbb{R}$ 'ye bir genişlemesidir. Başka genişlemeler de vardır: $x \neq 1$ 'de $x + 1$, $x = 1$ 'de 7 değerini alan fonksiyon da f 'nin bir genişlemesidir. Genişleme tek değildir, kısıtlama ise tektir.

■

5.5 Birebir, Örten ve Birebir-Örten Fonksiyonlar

Bir fonksiyonu “ne kadar iyi” bir eşleme olduğuna göre sınıflandıralım. İki soru sorarız: Farklı girdiler hep farklı çıktılara mı gider? Değer kümesindeki her elemana ulaşıyor mu?

Tanım 5.7 (Birebir, Örten, Birebir-Örten). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

1. f , tanım kümesinin farklı elemanlarını değer kümesinin farklı elemanlarına gönderiyorsa f 'ye **birebir** (injektif, one-to-one) denir:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

İspatlarda hemen her zaman bunun karşıtı tersi kullanılır:

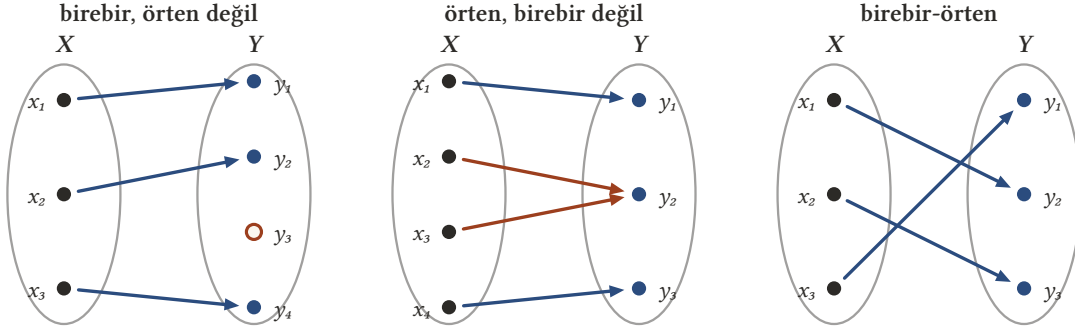
$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2. Değer kümesinin her elemanı tanım kümesinden en az bir elemanın görüntüsüye f 'ye **örten** (sürjektif, onto) denir:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

Bu, görüntü kümesinin değer kümesine eşit olması demektir: $f(X) = Y$.

3. f hem birebir hem örtense f 'ye **birebir-örten** (bijektif) denir.



Şekil 5.2: Solda farklı x 'ler farklı y 'lere gider ama y_3 'e hiç ok gelmez (birebir, örten değil). Ortada her y 'ye ok gelir ama y_2 'ye iki ok gelir (örten, birebir değil). Sağda her y 'ye tam bir ok gelir: birebir-örten.

Birebir-örten bir fonksiyon, X ile Y 'nin elemanlarını hiçbirini dışarıda bırakmadan ve hiçbirini iki kez kullanmadan eşler. Bu yüzden iki kümenin "aynı sayıda" elemanı olduğunu söylemenin kesin yolu, aralarında birebir-örten bir fonksiyon bulmaktır; sonsuz kümeleri karşılaştırırken bu fikri temel alacağız (Tanım 14.1).

🔍 Birebir ya da örten olmadığını göstermek

Tanımların olumsuzlamaları (Teorem 2.1) şöyledir:

- f birebir **değildir** $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ olduğu hâlde $f(x_1) = f(x_2)$ olan $x_1, x_2 \in X$ vardır. Yani tek bir "çakışma" bulmak yeter.
- f örten **değildir** $\Leftrightarrow$ hiçbir $x \in X$ için $f(x) = y$ olmayan bir $y \in Y$ vardır. Yani "ulaşılamayan" tek bir y bulmak yeter.

Birebir olduğunu göstermek için ise $f(x_1) = f(x_2)$ varsayıp $x_1 = x_2$ çıkarılır; örten olduğunu göstermek için keyfi y verilip $f(x) = y$ denklemi x için çözülür.

Örnek 5.6 (Birebir ve Örten Fonksiyon Örnekleri). Aşağıdaki fonksiyonların birebir ve örten olup olmadığını belirleyelim.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$; ardından aynı kuralla $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ve $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

Çözüm.

a) Birebir: $f(x_1) = f(x_2)$ olsun; $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ eşitliğinin iki yanından 1 çıkarıp 2'ye bölersek $x_1 = x_2$ bulunur. **Örten:** $y \in \mathbb{R}$ verilsin; $x = \frac{y-1}{2}$ alınırsa $f(x) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y$ olur. Dolayısıyla f birebir-örtendir.

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ birebir değildir: $-2 \neq 2$ olduğu hâlde $f(-2) = 4 = f(2)$. **Örten de değildir:** $y = -1$ için $x^2 = -1$ denkleminin reel çözümü yoktur; hiçbir x , -1 'e gitmez.

Değer kümesini $[0, \infty)$ olarak daraltırsak $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ **örten olur:** $y = 0$ için $x = 0$ alınır; $y > 0$ verildiğinde ise $x = \sqrt{y}$ için $f(x) = y$ 'dir (pozitif sayının karekökünün varlığı için bkz. Teorem 13.2). Ama hâlâ birebir değildir.

Tanım kümesini de $[0, \infty)$ olarak daraltırsak $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, yani $f|_{[0, \infty)}$ kısıtlamasının değer kümesi de $[0, \infty)$ alınmış hâli, **birebir-örten olur:** $x_1, x_2 \geq 0$ ve $x_1^2 = x_2^2$ ise $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$; $x_1 + x_2 = 0$ ancak $x_1 = x_2 = 0$ iken olabilir, aksi hâlde $x_1 - x_2 = 0$ 'dır. Her iki

durumda $x_1 = x_2$. Bu örnek, birebirlik ve örtenliğin yalnızca kurala değil tanım ve değer kümesine de bağlı olduğunu gösterir.

c) *Birebir*: $x_1^3 = x_2^3$ olsun. Çarpınlara ayırma ile

$$0 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right].$$

Köşeli parantezdeki ifade kareler toplamıdır; sıfır olması için $x_2 = 0$ ve $x_1 = 0$ gerekir, bu durumda zaten $x_1 = x_2$. Aksi hâlde köşeli parantez pozitifdir ve çarpımın sıfır olması $x_1 - x_2 = 0$ gerektirir (Önerme 6.13). Her durumda $x_1 = x_2$.

Örten: $y \in \mathbb{R}$ verilsin. $y = 0$ ise $x = 0$ işi görür. $y > 0$ ise Teorem 13.2 gereği $x^3 = y$ olan bir $x > 0$ vardır. $y < 0$ ise $-y > 0$ için $t^3 = -y$ olan bir $t > 0$ vardır; $x = -t$ alınırsa $x^3 = (-t)^3 = -t^3 = y$ olur. Dolayısıyla $f(x) = x^3$ birebir-örtendir.

■

Birebir ve örten fonksiyonlar için Teorem 5.1’deki “tek yönlü” kapsamalar eşitliğe dönüşür.

Teorem 5.3 (Birebir ve Örten Fonksiyonlarda Görüntü). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon; $A, A_1, A_2 \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olsun.

1. f birebir ise $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. f birebir ise $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.
3. f birebir ise $f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$.

İspat.

Her maddede bir yön Teorem 5.1’nden zaten bilinmektedir; yalnızca eksik kalan kapsamayı göstereceğiz.

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ kapsaması Teorem 5.1 (2)’dir. Ters için $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ keyfi olsun. $y \in f(A_1)$ olduğundan $y = f(a_1)$ olan bir $a_1 \in A_1$, $y \in f(A_2)$ olduğundan $y = f(a_2)$ olan bir $a_2 \in A_2$ vardır. Böylece $f(a_1) = y = f(a_2)$; f birebir olduğundan $a_1 = a_2$. Bu ortak eleman hem A_1 ’de hem A_2 ’dedir, yani $a_1 \in A_1 \cap A_2$; dolayısıyla $y = f(a_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. İki kapsamadan eşitlik çıkar.

(2) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$ kapsaması Teorem 5.1 (4)’tür (her fonksiyon için doğrudur). Ters için $y \in f(A_1 \setminus A_2)$ olsun; $y = f(a)$ olan bir $a \in A_1 \setminus A_2$ vardır. $a \in A_1$ olduğundan $y \in f(A_1)$. Geriye $y \notin f(A_2)$ kalır. Olmayana ergi ile: $y \in f(A_2)$ olsa, $y = f(a')$ olan bir $a' \in A_2$ bulunurdu; $f(a) = f(a')$ ve f birebir olduğundan $a = a' \in A_2$ olurdu ki bu $a \notin A_2$ ile çelişir. O hâlde $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(3) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ kapsaması Teorem 5.1 (11)’dir. Ters için $x \in f^{-1}(f(A))$ olsun; yani $f(x) \in f(A)$. Görüntü tanımından $f(x) = f(a)$ olan bir $a \in A$ vardır. f birebir olduğundan $x = a$, dolayısıyla $x \in A$.

(4) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ kapsaması Teorem 5.1 (12)’dir. Ters için $y \in B$ olsun. f örten olduğundan $f(x) = y$ olan bir $x \in X$ vardır. $f(x) = y \in B$ olması $x \in f^{-1}(B)$ demektir; dolayısıyla $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

■

Teorem, Örnek 5.4’de gördüğümüz bozuklukların tek sorumlusunun birebir olmamak (ya da örten olmamak) olduğunu söyler. Aslında ilişki iki yönlüdür:

İ Karşıtları da doğrudur

- Her $A \subseteq X$ için $f^{-1}(f(A)) = A$ ise f birebirdir. Gerçekten, $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. $A = \{x_1\}$ alındığında $f(x_2) = f(x_1) \in f(\{x_1\})$ olduğundan $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$, yani $x_2 = x_1$.
- Her $B \subseteq Y$ için $f(f^{-1}(B)) = B$ ise f örtendir. Gerçekten, $B = Y$ alındığında $f^{-1}(Y) = X$ olduğundan $f(X) = f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Yani (3) birebirliğin, (4) örtenliğin tam bir karakterizasyonudur.

5.6 Bileşke

İki fonksiyonu art arda uygulamak yeni bir fonksiyon verir: önce f ’yi, sonra g ’yi uygulamak. Bunun anlamlı olması için f ’nin ürettiği çıktıların g ’nin kabul ettiği girdiler olması gerekir.

Tanım 5.8 (Bileşke Fonksiyon). $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Z \rightarrow W$ iki fonksiyon olsun. $f(X) \subseteq Z$ ise, her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

kuralıyla tanımlanan $g \circ f : X \rightarrow W$ fonksiyonuna f ile g 'nin **bileşkesi** denir ve “ g bileşke f ” diye okunur. Önce f , sonra g uygulanır.

i Bileşkenin tanımlı olma koşulu

$g \circ f$ 'nin tanımlı olması için içteki fonksiyon f 'nin görüntü kümesi, dıştaki fonksiyon g 'nin tanım kümesinin alt kümesi olmalıdır. En sık karşılaşılan durum $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ olmasıdır; o zaman $f(X) \subseteq Y$ otomatik olarak sağlanır ve $g \circ f : X \rightarrow Z$ her zaman tanımlıdır. Bu bölümün teoremlerinde hep bu durumu ele alacağız.

$g \circ f$ gerçekten bir fonksiyondur: her $x \in X$ için $f(x)$ tek bir elemandır, $f(x) \in Z$ olduğundan $g(f(x))$ de tanımlı ve tektir. Yani varlık ve teklik koşulları f ve g 'den miras alınır.

Örnek 5.7 (Bileşke Değişmeli Değildir). $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = x^2$ olsun. $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulalım ve karşılaştıralım.

Çözüm.

Her iki bileşke de tanımlıdır, çünkü tanım ve değer kümelerinin hepsi $\mathbb{R}$ 'dir.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1.$$

Örneğin $x = 1$ 'de $(g \circ f)(1) = 9$ ama $(f \circ g)(1) = 3$. Demek ki genel olarak $g \circ f \neq f \circ g$: bileşke **değişmeli değildir**. Sıra önemlidir; $g \circ f$ yazımında sağdaki fonksiyon önce uygulanır.

■

Bileşke değişmeli olmasa da birleşmelidir; bu, üç ve daha çok fonksiyonu parantezsiz art arda uygulamamıza izin verir.

Önerme 5.1 (Bileşke Birleşmelidir). $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ ve $h : Z \rightarrow W$ fonksiyonlar olsun. O zaman

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

İspat.

Her iki taraf da X 'ten W 'ye bir fonksiyondur: $g \circ f : X \rightarrow Z$ olduğundan $h \circ (g \circ f) : X \rightarrow W$; $h \circ g : Y \rightarrow W$ olduğundan $(h \circ g) \circ f : X \rightarrow W$. **Tanım 5.5** gereği her $x \in X$ 'te aynı değeri aldıklarını göstermek yeter. Bileşke tanımını iki kez uygulayarak

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

ve

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

bulunur. Değerler eşittir; dolayısıyla fonksiyonlar eşittir. Bundan böyle parantezleri atıp $h \circ g \circ f$ yazacağız.

■

Birim fonksiyonun bileşkedeki rolü sayılarda 1'in çarpmadaki rolü gibidir: $f : X \rightarrow Y$ için her $x \in X$ 'te $(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$ ve $(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$ olduğundan

$$f \circ I_X = f, \quad I_Y \circ f = f.$$

Birebirlik ve örtenlik bileşkeyle nasıl aktarılır? Aşağıdaki teorem hem “ileri” hem “geri” yönü verir.

Teorem 5.4 (Bileşkenin Birebirlik ve Örtenlik Özellikleri). $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonlar olsun.

1. f ve g birebir ise $g \circ f$ birebirdir.
2. f ve g örten ise $g \circ f$ örtendir.
3. $g \circ f$ birebir ise f birebirdir (ama g birebir olmak zorunda değildir).
4. $g \circ f$ örten ise g örtendir (ama f örten olmak zorunda değildir).

İspat.

(1) $x_1, x_2 \in X$ ve $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ olsun; yani $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. g birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$; f birebir olduğundan $x_1 = x_2$. Dolayısıyla $g \circ f$ birebirdir.

(2) $z \in Z$ keyfi olsun. g örten olduğundan $g(y) = z$ olan bir $y \in Y$ vardır. f örten olduğundan bu y için $f(x) = y$ olan bir $x \in X$ vardır. O hâlde $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Her z 'ye ulaşıldığından $g \circ f$ örtendir.

(3) $x_1, x_2 \in X$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eşit elemanlara g uygulanınca eşit sonuç çıkar: $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, yani $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. $g \circ f$ birebir olduğundan $x_1 = x_2$. Dolayısıyla f birebirdir.

(4) $z \in Z$ keyfi olsun. $g \circ f$ örten olduğundan $(g \circ f)(x) = z$ olan bir $x \in X$ vardır. $y = f(x) \in Y$ alalım; $g(y) = g(f(x)) = z$. Her z için böyle bir y bulunduğundan g örtendir.

Parantez içindeki uyarılar için tek bir örnek yeter. $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $Z = \{1\}$; $f(1) = 1$ ve $g(1) = g(2) = 1$ olsun. $g \circ f : \{1\} \rightarrow \{1\}$, $1 \mapsto 1$ fonksiyonu hem birebir hem örtendir. Ama g birebir değildir ($g(1) = g(2)$, oysa $1 \neq 2$) ve f örten değildir ($2 \in Y$ hiçbir elemanın görüntüsü değildir).

■

Teoremin (1) ve (2) maddeleri birlikte, birebir-örten fonksiyonların bileşkesinin birebir-örten olduğunu söyler; bunu ters fonksiyon konusunda kullanacağız.

5.7 Ters Fonksiyon

Bir fonksiyon x 'i $y = f(x)$ 'e taşıyorsa, y 'den x 'e “geri dönen” bir fonksiyon var mıdır? Geri dönüşün anlamlı olması için önce her y 'nin bir yerden gelmiş olması (örtenlik), sonra da geldiği yerin tek olması (birebirlik) gerekir. Önce “geri dönmeyen” ne demek olduğunu kesinleştirelim.

Tanım 5.9 (Ters Fonksiyon). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bir $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu

$$g \circ f = I_X \quad \text{ve} \quad f \circ g = I_Y$$

koşullarının ikisini birden sağlıyorsa g 'ye f 'nin **ters fonksiyonu** denir ve $g = f^{-1}$ yazılır. Açık biçimde: her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$ ve her $y \in Y$ için $f(g(y)) = y$.

⚠ Tek koşul yetmez

Tanımdaki iki koşul birbirinden bağımsızdır; biri sağlanırken öteki sağlanmayabilir. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$ ve $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(1) = 1$, $n \geq 2$ için $g(n) = n - 1$ olsun. Her n için $g(f(n)) = g(n + 1) = n$, yani $g \circ f = I_{\mathbb{N}}$. Ama $f(g(1)) = f(1) = 2 \neq 1$, yani $f \circ g \neq I_{\mathbb{N}}$. Dolayısıyla g , f 'nin tersi değildir; zaten f örten olmadığından (hiçbir n için $n + 1 = 1$ olmaz) birazdan göreceğimiz teorem gereği f 'nin tersi yoktur.

Örnek 5.8 (Bir Ters Fonksiyonu Doğrulamak). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun tersinin $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{y-1}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

İki koşulu ayrı ayrı denetleriz. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

her $y \in \mathbb{R}$ için

$$(f \circ g)(y) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

Dolayısıyla $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ ve $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$; $g = f^{-1}$ 'dir. g 'nin kuralı, $y = 2x + 1$ denkleminin x için çözülmesiyle bulunmuştu: $x = (y-1)/2$. Ters fonksiyon bulmanın genel yolu budur; ama bulunan kuralın gerçekten iki koşulu da sağladığı her zaman denetlenmelidir.

■

Şimdi ana soruyu yanıtlayalım: hangi fonksiyonların tersi vardır?

Teorem 5.5 (Ters Fonksiyonun Varlığı). $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun bir ters fonksiyonu $f^{-1} : Y \rightarrow X$ vardır **ancak ve ancak** f birebir-örtense.

İspat.

İki yönü ayrı ayrı ispatlayacağız.

($\Rightarrow$ yönü: **tersi varsa birebir-örtendir.**) f 'nin bir tersi olsun; ona $g : Y \rightarrow X$ diyelim. Tanım gereği

$$(i) \text{ her } x \in X \text{ için } g(f(x)) = x, \quad (ii) \text{ her } y \in Y \text{ için } f(g(y)) = y.$$

Birebirlik: $x_1, x_2 \in X$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eşit elemanlara g uygulayalım: $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. (i) gereği sol taraf x_1 , sağ taraf x_2 'dir; yani $x_1 = x_2$. Dolayısıyla f birebirdir.

Örtenlik: $y \in Y$ keyfi olsun. $f(x) = y$ olan bir $x \in X$ aramalıyız. Aday olarak $x = g(y)$ alalım; g 'nin değer kümesi X olduğundan gerçekten $x \in X$ 'tir. (ii) gereği $f(x) = f(g(y)) = y$. Her y için böyle bir x bulunduğundan f örtendir.

($\Leftarrow$ yönü: **birebir-örtense tersi vardır.**) f birebir-örten olsun. Bir $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu kurup tersin iki koşulunu sağladığını göstereceğiz.

g 'nin tanımı. $y \in Y$ keyfi olsun. f örten olduğundan $f(x) = y$ olan **en az bir** $x \in X$ vardır. f birebir olduğundan bu x **tek**tir: $f(x_1) = y = f(x_2)$ olsaydı birebirlik $x_1 = x_2$ verirdi. Demek ki her $y \in Y$ 'ye karşılık $f(x) = y$ koşulunu sağlayan bir ve yalnız bir $x \in X$ vardır. Bu tek elemanı $g(y)$ olarak adlandıralım:

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Her y 'ye tam bir x karşılık geldiğinden (varlık ve teklik) $g : Y \rightarrow X$ gerçekten bir fonksiyondur (Tanım 5.1).

$g \circ f = I_X$ denetimi. $x \in X$ olsun ve $y = f(x)$ diyelim. $g(y)$, tanımı gereği f tarafından y 'ye gönderilen tek elemandır. $f(x) = y$ olduğundan bu tek eleman x 'in kendisidir: $g(f(x)) = g(y) = x$.

$f \circ g = I_Y$ denetimi. $y \in Y$ olsun. $g(y)$, $f(g(y)) = y$ koşulunu sağlayan (tek) elemandır; bu zaten istenen eşitliktir: $f(g(y)) = y$.

İki koşul da sağlandığından g , f 'nin ters fonksiyonudur.

■

Teorem şunu söyler: “tersi var mı?” sorusu, “birebir ve örten mi?” sorusuna indirgenir. Uygulamada $y = f(x)$ denklemini x için çözmeye çalışırız; her y için tam bir çözüm çıkıyorsa hem tersi bulmuş hem birebir-örten olduğunu göstermiş oluruz.

Önerme 5.2 (Tersin Tekliği). Bir fonksiyonun tersi varsa tektir.

İspat.

g_1 ve g_2 , $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun iki tersi olsun. O zaman $f \circ g_2 = I_Y$ ve $g_1 \circ f = I_X$ 'tir. Birim fonksiyonun bileşkedeki etkisizliği ve Önerme 5.1 ile

$$g_1 = g_1 \circ I_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_X \circ g_2 = g_2.$$

Dolayısıyla $g_1 = g_2$. Bu teklik sayesinde “ f 'nin tersi” deyip f^{-1} yazmak anlamlıdır.

■

Sonuç 5.1 (Ters Fonksiyon da Birebir-Örtendir). $f : X \rightarrow Y$ birebir-örtlen ise tersi $f^{-1} : Y \rightarrow X$ de birebir-örtendir. Ayrıca

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad f^{-1} \circ f = I_X, \quad f \circ f^{-1} = I_Y.$$

İspat.

Son iki eşitlik, f^{-1} 'in ters fonksiyon tanımını sağlamasından ibarettir. Şimdi bu iki eşitliğe $f^{-1} : Y \rightarrow X$ fonksiyonunun gözüyle bakalım: $f \circ f^{-1} = I_Y$ ve $f^{-1} \circ f = I_X$ eşitlikleri, tam olarak " f, f^{-1} 'in tersidir" demektir (Tanım 5.9'da f yerine f^{-1} , g yerine f konmuştur). Demek ki f^{-1} 'in bir tersi vardır; Teorem 5.5 gereği f^{-1} birebir-örtendir ve Önerme 5.2 gereği tersi tektir, yani $(f^{-1})^{-1} = f$.

i İki f üstü eksi bir gösterimi uzlaştır

f birebir-örtlen olduğunda ters görüntü ile ters fonksiyon çelişmez: $y \in Y$ için ters görüntü $f^{-1}(\{y\})$, $f(x) = y$ olan x 'lerin kümesidir ve bu küme tek elemanlıdır: $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$. Genel olarak da $B \subseteq Y$ için B 'nin f altındaki ters görüntüsü, B 'nin f^{-1} fonksiyonu altındaki görüntüsüne eşittir.

Teorem 5.6 (Bileşkenin Tersisi). $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ birebir-örtlen fonksiyonlar ise bileşkeleri $g \circ f : X \rightarrow Z$ de birebir-örtendir ve tersi

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ile verilir.

İspat.

İspat iki parçadan oluşur: önce $g \circ f$ 'nin birebir-örtlen olduğunu, sonra $f^{-1} \circ g^{-1}$ 'in gerçekten $g \circ f$ 'nin tersi olduğunu göstereceğiz.

Birinci parça: $g \circ f$ birebir-örtendir. f ve g birebir olduğundan Teorem 5.4 (1) gereği $g \circ f$ birebirdir; f ve g örtlen olduğundan Teorem 5.4 (2) gereği $g \circ f$ örtendir. Dolayısıyla $g \circ f$ birebir-örtendir ve Teorem 5.5 ile Önerme 5.2 gereği tek bir tersi vardır.

İkinci parça: tersin formülü. f ve g birebir-örtlen olduğundan $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ve $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ vardır; dolayısıyla $f^{-1} \circ g^{-1} : Z \rightarrow X$ tanımlıdır. Tersin tanımındaki iki bileşkeyi hesaplayalım. Önerme 5.1 sayesinde parantezleri istediğimiz gibi yerleştirebiliriz.

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \quad (\text{birleşme}) \\ &= f^{-1} \circ I_Y \circ f \quad (g^{-1} \text{ tersin tanımı}) \\ &= f^{-1} \circ f \quad (\text{birim fonksiyon etkisiz}) \\ &= I_X \quad (f^{-1} \text{ tersin tanımı}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \quad (\text{birleşme}) \\ &= g \circ I_X \circ g^{-1} \quad (f^{-1} \text{ tersin tanımı}) \\ &= g \circ g^{-1} \quad (\text{birim fonksiyon etkisiz}) \\ &= I_Z \quad (g^{-1} \text{ tersin tanımı}). \end{aligned}$$

Her iki sırada da birim fonksiyon elde edildiğinden $f^{-1} \circ g^{-1}$, $g \circ f$ 'nin tersidir; teklik gereği $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Formüldeki sıra değişimine dikkat: önce f sonra g uygulanan bir işlemi geri almak için önce g 'yi sonra f 'yi geri almak gerekir; tıpkı önce çorabı sonra ayakkabıyı giyen birinin önce ayakkabıyı sonra çorabı çıkarması gibi.

Örnek 5.9 (Bir Rasyonel Fonksiyonun Tersisi). $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ fonksiyonunun birebir-örten olduğunu gösterip tersini bulalım.

Çözüm.

Önce f 'nin gerçekten $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ 'ye gittiğini görelim: $f(x) = 2$ olsaydı $2x + 1 = 2x - 2$, yani $1 = -2$ olurdu; imkânsız. Dolayısıyla $f(x) \neq 2$.

$y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ verilsin ve $f(x) = y$ denklemini $x \neq 1$ için çözelim:

$$\frac{2x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow 2x+1 = yx-y \Leftrightarrow y+1 = x(y-2) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-2}.$$

$y \neq 2$ olduğundan bölme yapılabilir; ayrıca bulunan x , 1'e eşit değildir: $\frac{y+1}{y-2} = 1$ olsaydı $y+1 = y-2$, yani $1 = -2$ olurdu. Demek ki her $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ için $f(x) = y$ denkleminin $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ içinde **tam bir** çözümü vardır: varlık f 'nin örten, teklik ise birebir olduğunu söyler. **Teorem 5.5** gereği f 'nin tersi vardır ve

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}.$$

Denetleyelim: $x \neq 1$ için

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 2} = \frac{\frac{2x+1+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{3x}{3} = x.$$

Benzer hesapla $f(f^{-1}(y)) = y$ bulunur.

■

5.8 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Fonksiyon Alıştırmaları).

- Teorem 5.1**'nin (4), (6) ve (10) maddelerini ispatlayınız.
- Teorem 5.2**'nin (2), (3) ve (4) maddelerini ispatlayınız.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ olsun. $f([0, 3])$, $f^{-1}([-1, 0])$, $f^{-1}(\{8\})$ ve $f^{-1}((-\infty, -2))$ kümelerini bulunuz.
- Aşağıdaki fonksiyonların birebir ve örten olup olmadığını belirleyiniz. (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$; (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$; (iii) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$; (iv) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$.
- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = x^3$ olsun. $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını yazınız; $(g \circ f)^{-1}$ 'i doğrudan bulup **Teorem 5.6**'ndeki $f^{-1} \circ g^{-1}$ formülüyle karşılaştırınız. $g^{-1} \circ f^{-1}$ ile aynı mıdır?

Çözüm.

a) (4) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ olsun; yani $y \in f(A_1)$ ve $y \notin f(A_2)$. $y = f(a)$ olan bir $a \in A_1$ vardır. $a \in A_2$ olsaydı $y = f(a) \in f(A_2)$ olurdu; bu $y \notin f(A_2)$ ile çelişir. O hâlde $a \notin A_2$, yani $a \in A_1 \setminus A_2$ ve $y = f(a) \in f(A_1 \setminus A_2)$.

(6) Denkliklerle:

$$x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

(10) Aynı kalıpla:

$$x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

b) (2) $x \in X$ için

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j \Leftrightarrow \exists j \in J, f(x) \in B_j \Leftrightarrow \exists j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

(3) $y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ olsun. $y = f(x)$ olan bir $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ vardır; yani her $i \in I$ için $x \in A_i$. O hâlde her $i \in I$ için $y = f(x) \in f(A_i)$, yani $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. (Ters kapsama genel olarak yanlıştır; **Örnek 5.4** iki kümelik bir karşı örnektir.)

(4) $x \in X$ için

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j \Leftrightarrow \forall j \in J, f(x) \in B_j \Leftrightarrow \forall j \in J, x \in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

c) Kareye tamamlayalım: $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.

$f([0, 3])$: $x \in [0, 3]$ iken $t = x - 1 \in [-1, 2]$ ve $t^2 \in [0, 4]$; üstelik t , $[0, 2]$ 'yi tararken t^2 , $[0, 4]$ 'ün her değerini alır ($0 \leq s \leq 4$ için $t = \sqrt{s} \in [0, 2]$). Dolayısıyla $f([0, 3]) = [0 - 1, 4 - 1] = [-1, 3]$.

$f^{-1}([-1, 0])$: Koşulu sağlayan x 'ler şu denklik zinciriyle bulunur:

$$\begin{aligned} -1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |x - 1| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Yani $f^{-1}([-1, 0]) = [0, 2]$.

$f^{-1}(\{8\})$: $x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$. Yani $f^{-1}(\{8\}) = \{-2, 4\}$.

$f^{-1}((-\infty, -2))$: Her x için $f(x) = (x - 1)^2 - 1 \geq -1 > -2$ olduğundan hiçbir x 'in görüntüsü -2 'den küçük değildir: $f^{-1}((-\infty, -2)) = \emptyset$.

d) (i) $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, birebir. Her y için $x = (y + 2)/3$ alınınca $f(x) = y$, örten. Birebir-örten.

(ii) $f(1) = f(-1) = 2$ ve $1 \neq -1$; birebir değil. Her x için $x^2 + 1 \geq 1$ olduğundan $y = 0$ hiçbir görüntü değildir; örten değil.

(iii) $n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$, birebir. Örten değil: $n + 1 = 1$ olması $n = 0$ gerektirir, ama $0 \notin \mathbb{N}$ (**Önerme 9.3** gereği 1, $\mathbb{N}$ 'nin en küçük elemanıdır); $1 \in \mathbb{N}$ ulaşamaz.

(iv) $1/x_1 = 1/x_2$ eşitliğinin iki yanını $x_1 x_2$ ile çarpınca $x_2 = x_1$; birebir. Örten değil: $1/x = 0$ olsaydı iki yanı x ile çarparak $1 = 0$ elde edilirdi; $0 \in \mathbb{R}$ ulaşamaz. (Değer kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alınsaydı $y \neq 0$ için $x = 1/y$ ile örten, dolayısıyla birebir-örten olurdu.)

e) $(g \circ f)(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^3$ ve $(f \circ g)(x) = f(x^3) = 2x^3 + 1$.

Örnek 5.6 gereği f ve g birebir-örtendir; tersleri $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ ve $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ (her reel sayının tek bir reel küp kökü vardır; negatif y için $\sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{-y}$). $(g \circ f)^{-1}$ 'i doğrudan bulmak için $y = (2x + 1)^3$ denklemini çözelim: $2x + 1 = \sqrt[3]{y}$, yani

$$x = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{2}.$$

Formülle karşılaştıralım: $(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = f^{-1}(\sqrt[3]{y}) = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{2}$; **Teorem 5.6** ile tam uyuşur. Öte yandan

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(y) = g^{-1}\left(\frac{y-1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$$

farklı bir fonksiyondur; örneğin $y = 9$ 'da ilki $\frac{\sqrt[3]{9}-1}{2} \approx 0,54$, ikincisi $\sqrt[3]{4} \approx 1,59$ verir. Bileşkenin tersinde sıranın ters çevrilmesi zorunludur.

■

Mantık, kümeler, bağıntılar ve fonksiyonlarla analizin dili tamamlandı. Şimdi bu dili kullanarak analizin asıl sahnesini, reel sayıları, aksiyomlarından başlayarak kuracağız: **Reel Sayılar ve Cebirsel Aksiyomlar**.

6. Reel Sayılar ve Cebirsel Aksiyomlar

Analizin bütün yapısı reel sayılar üzerine kurulur: limitler, süreklilik, türev ve integral, hepsi $\mathbb{R}$ 'nin özelliklerine dayanır. Öyleyse ilk sorumuz şudur: reel sayılar tam olarak nedir? Lise yıllarından beri $\mathbb{R}$ ile hesap yapıyoruz, ama $(-1) \cdot (-1) = 1$ ya da $x \cdot 0 = 0$ gibi “herkesin bildiği” eşitliklerin **neden** doğru olduğunu hiç sormadık. Bu bölümde reel sayıları az sayıda temel kuralla (aksiyomla) tanımlayacak, ardından bu kurallardan alışık olduğumuz cebirsel özellikleri tek tek türeteceğiz.

Önceki bölümlerde geliştirdiğimiz mantık ve küme dili burada işe koşulacak: her ispat adımında hangi aksiyomu kullandığımızı açıkça yazacağız. Bu bölümün amacı yeni bir hesap tekniği öğretmek değil, **bildiğimiz hesapların hangi temel kurallara dayandığını** görmektir.

6.1 Reel Sayıları Nasıl Kuracağız?

Reel sayıları sağlam bir temele oturtmanın iki ana yolu vardır:

1. **İnşa yöntemi:** Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ 'dan yola çıkılır ve reel sayılar, örneğin *Dedekind kesitleri* ya da *Cauchy dizilerinin denklik sınıfları* yardımıyla adım adım inşa edilir. Bu yol somuttur ama uzun ve tekniktir.
2. **Aksiyomatik yöntem:** Reel sayılar kümesi, belirli bir özellik listesini (aksiyomları) sağlayan bir küme olarak *tanımlanır*. Bu yaklaşım daha kısa, temiz ve modernidir.

Bu derste aksiyomatik yöntemi izleyeceğiz. Buna göre reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, üç grup aksiyomu sağlayan bir kümedir:

- **Cebirsel aksiyomlar:** Toplama ve çarpma işlemlerinin kurallarını verir. Bu bölümün konusudur (Bölüm 6.2).
- **Sıralama aksiyomları:** Sayılar arasında “küçüktür / büyüktür” ilişkisini kurar (Bölüm 7.1).
- **Tamlık aksiyomu:** En önemli aksiyomdur; reel sayıları rasyonel sayılardan ayırır ve sayı doğrusunda “boşluk” kalmamasını sağlar (Bölüm 10.4).

i Neden aksiyomlarla uğraşıyoruz?

Aksiyomatik yöntemin üç büyük kazancı vardır.

- **Az kuraldan çok sonuç.** Dokuz cebirsel aksiyomdan, cebirde kullandığımız bütün özdeşlikler türetilir. Bir eşitliğin doğruluğunu “öyle olduğunu biliyoruz” diyerek değil, aksiyomlara dayanarak gösteririz.
- **Neyin neye bağlı olduğunu görürüz.** Örneğin $\mathbb{Q}$ cebirsel ve sıralama aksiyomlarını sağlar ama tamlık aksiyomunu sağlamaz. Demek ki $\sqrt{2}$ 'nin varlığı gibi sonuçlar cebirden ya da sıralamadan değil, yalnızca tamlıktan gelir.
- **Sonuçlar taşınabilir.** Aksiyomları sağlayan başka bir yapı bulduğumuzda, burada ispatladığımız her şey o yapıda da otomatik olarak doğrudur.

6.2 Cebirsel Aksiyomlar

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde **toplama** (+) ve **çarpma** ($\cdot$) adı verilen iki *ikili işlem* tanımlıdır. İkili işlem demek, her (x, y) reel sayı çiftine tek bir reel sayı karşılık getiren bir fonksiyon demektir ([Tanım 5.1](#)):

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Yani $x + y$ ve $x \cdot y$ her zaman vardır ve tektir; buna “toplama ve çarpma altında kapalılık” da denir. Bu iki işlem aşağıdaki aksiyomları sağlar.

! Toplama Aksiyomları

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için:

- **(A1) Değişme:** $x + y = y + x$.
- **(A2) Birleşme:** $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- **(A3) Toplama birimi (sıfır):** Öyle bir $0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır ki her $x \in \mathbb{R}$ için $x + 0 = x$ olur. (Dikkat: önce 0 seçilir, sonra her x için eşitlik sağlanır; 0 elemanı x 'e göre değişmez.)
- **(A4) Toplama tersi:** Her $x \in \mathbb{R}$ için $x + y = 0$ olacak biçimde bir $y \in \mathbb{R}$ elemanı vardır. Bu eleman $-x$ ile gösterilir.

Bu dört aksiyom, cebir dilinde “ $(\mathbb{R}, +)$ değişmeli (Abel) bir gruptur” demektir.

! Çarpma Aksiyomları

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için:

- **(M1) Değişme:** $x \cdot y = y \cdot x$.
- **(M2) Birleşme:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **(M3) Çarpma birimi (bir):** $1 \neq 0$ olan ve her $x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 1 = x$ sağlayan bir $1 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır.
- **(M4) Çarpma tersi:** Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot y = 1$ olacak biçimde bir $y \in \mathbb{R}$ elemanı vardır. Bu eleman x^{-1} ya da $\frac{1}{x}$ ile gösterilir.

Bu dört aksiyom da “ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ değişmeli bir gruptur” demektir. (Bunun için sıfırdan farklı iki sayının çarpımının sıfırdan farklı olması ve sıfırdan farklı bir sayının çarpma tersinin de sıfırdan farklı olması gerekir; ikisini de aksiyomlardan türeteceğiz: [Sonuç 6.3](#) ve [Önerme 6.10](#).) Toplama ile çarpmayı birbirine bağlayan tek bir aksiyom kalıyor:

! Dağılma Aksiyomu

- **(D) Dağılma:** Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Toplama ve çarpma birbirinden bağımsız iki işlem olsaydı aralarında hiçbir ilişki kuramazdık; (D) aksiyomu bu köprüyü kurar. Bütün “parantez açma” işlemleri ona dayanır.

Bu dokuz kuralı sağlayan her yapıya bir ad verelim; bu ad, reel sayıların “cebirsel kimliği”dir.

Tanım 6.1 (Cisim). Üzerinde toplama ve çarpma adlı iki ikili işlem tanımlı olan ve (A1)–(A4), (M1)–(M4), (D) aksiyomlarının dokuzunu da sağlayan bir F kümesine **cisim** (field) denir.

Böylece $\mathbb{R}$ bir cisimdir. Cebirsel aksiyomlar reel sayıları tek başına belirlemez; aynı dokuz kuralı sağlayan başka kümeler de vardır.

i Cisim olan ve olmayan sayı kümeleri

- $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi de bir cisimdir: iki rasyonel sayının toplamı ve çarpımı rasyoneldir, 0 ve 1 rasyoneldir, $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$ ve $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$ rasyoneldir; dokuz kural da sağlanır.
- $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi cisim **değildir**: (M4) bozulur. Örneğin $2 \cdot y = 1$ denklemini sağlayan bir tam sayı y yoktur ($\frac{1}{2}$ tam sayı değildir).
- Yalnızca iki elemanlı $\{0, 1\}$ kümesi, $1 + 1 = 0$ kuralıyla (öteki toplam ve çarpımlar bildiğimiz gibi) bir cisimdir. Demek ki dokuz aksiyom, elemanı sonlu bir küme tarafından bile sağlanabilir. Reel sayıları öteki cisimlerden ayıran şey cebirsel aksiyomlar değil, sonraki bölümlerde gelecek sıralama ve tamlık aksiyomlarıdır.

Yazım uzlaşmaları

Bundan sonra $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazacağız; çarpma toplamadan önce yapılır ($xy + z$ ifadesi $(xy) + z$ demektir). Birleşme aksiyomları sayesinde $x + y + z$ ve xyz yazımında parantez gerekmez. Ayrıca

$$x^2 = x \cdot x, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1$$

kısaltmalarını kullanacağız. Bunlar yeni aksiyom değil, yalnızca adlandırmadır.

6.3 Toplama Aksiyomlarının Sonuçları

(A3) aksiyomu “bir sıfır vardır” der; “yalnız bir tane vardır” demez. İlk işimiz, aksiyomların var dediği elemanların tek olduğunu göstermek. Bu, ileride $-x$ ve x^{-1} yazımlarının anlamlı olması için gereklidir: “tersi” diyebilmek için tersin tek olması gerekir.

Önerme 6.1 (Toplama Biriminin Tekliği). *Toplama birimi tektir. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $0 \in \mathbb{R}$ vardır:*

$$\exists! 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x.$$

İspat.

Varlık (A3) ile verilmiştir; tekliği gösterelim. $0'$ de aynı özelliği sağlayan bir eleman olsun: her $x \in \mathbb{R}$ için $x + 0' = x$. Bu eşitlik her x için geçerli olduğundan özel olarak $x = 0$ için de geçerlidir:

$$0 + 0' = 0. \quad (1)$$

Öte yandan (A3) aksiyomunu $x = 0'$ için yazarsak

$$0' + 0 = 0'. \quad (2)$$

(A1) gereği $0 + 0' = 0' + 0$ 'dır. Şimdi (1), (A1) ve (2) sırasıyla kullanılırsa

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

elde edilir. Yani $0' = 0$; toplama birimi tektir. ■

Aynı düşünce ters eleman için de işler.

Önerme 6.2 (Toplama Tersinin Tekliği). *Her $x \in \mathbb{R}$ için $x + y = 0$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $y \in \mathbb{R}$ vardır:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

İspat.

Varlık (A4) ile verilmiştir. x verilsin ve y , (A4)'ün var dediği eleman olsun: $x + y = 0$. Tekliği göstermek için $x + z = 0$ eşitliğini sağlayan bir $z \in \mathbb{R}$ daha olduğunu varsayalım ve $z = y$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} z &= z + 0 & (A3) \\ &= z + (x + y) & (\text{varsayım: } x + y = 0) \\ &= (z + x) + y & (A2) \\ &= (x + z) + y & (A1) \\ &= 0 + y & (\text{varsayım: } x + z = 0) \\ &= y + 0 & (A1) \\ &= y. & (A3) \end{aligned}$$

Böylece $z = y$; toplama tersi tektir. ■

Artık “ x ’in toplama tersi” ifadesi tek bir sayıyı gösterdiğinden $-x$ yazımı anlamlıdır. Bu da çıkarmayı tanımlamamıza izin verir: aksiyomlarda çıkarma diye bir işlem yoktur, çıkarma toplamının kısaltmasıdır.

Tanım 6.2 (Çıkarma). $x, y \in \mathbb{R}$ için $x - y$ ifadesi

$$x - y = x + (-y)$$

olarak tanımlanır. Bu işleme **çıkarma** denir.

Lise cebirinde “eşitliğin iki yanından aynı sayıyı atarız” deriz. Bunun gerekçesi şudur:

Önerme 6.3 (Sadeleştirme Kuralları). $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $x + z = y + z$ ise $x = y$ ’dir.
2. $z \neq 0$ ve $xz = yz$ ise $x = y$ ’dir.

İspat.

(1) $x + z = y + z$ olsun. İki yana da $-z$ ekleyip aksiyomları sırayla uygulayalım:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 & (A3) \\ &= x + (z + (-z)) & (A4) \\ &= (x + z) + (-z) & (A2) \\ &= (y + z) + (-z) & (\text{varsayım}) \\ &= y + (z + (-z)) & (A2) \\ &= y + 0 & (A4) \\ &= y. & (A3) \end{aligned}$$

(2) $z \neq 0$ olduğundan (M4) gereği z^{-1} vardır. Aynı düzeni çarpma aksiyomlarıyla kuralım:

$$\begin{aligned} x &= x \cdot 1 & (M3) \\ &= x(zz^{-1}) & (M4) \\ &= (xz)z^{-1} & (M2) \\ &= (yz)z^{-1} & (\text{varsayım}) \\ &= y(zz^{-1}) & (M2) \\ &= y \cdot 1 & (M4) \\ &= y. & (M3) \end{aligned}$$

■

Çarpmada $z \neq 0$ şartı vazgeçilmezdir: birazdan göreceğimiz gibi her x için $x \cdot 0 = 0$ ’dır, dolayısıyla $x \cdot 0 = y \cdot 0$ eşitliğinden $x = y$ çıkmaz.

Sadeleştirme ve teklik sonuçları elimizdeyken, işaretlerle ilgili tanıdık kuralları türetebiliriz.

Önerme 6.4 (Sıfırın Tersisi). $-0 = 0$. Yani sıfırın toplama tersi yine sıfırdır.

İspat.

(A3) aksiyomunu $x = 0$ için yazarsak $0 + 0 = 0$ olur. Bu eşitlik, 0 sayısının kendisinin bir toplama tersi olduğunu söyler. Önerme 6.2 gereği bir sayının toplama tersi tek olduğundan $-0 = 0$ ’dır.

■

Önerme 6.5 (Tersin Tersisi). Her $x \in \mathbb{R}$ için $-(-x) = x$ ’tir.

İspat.

(A4) gereği $x + (-x) = 0$, (A1) gereği de $(-x) + x = 0$ ’dır. Son eşitlik, x ’in $-x$ sayısının bir toplama tersi olduğunu söyler. Oysa $-x$ ’in toplama tersi, tanım gereği $-(-x)$ ile gösterilen ve Önerme 6.2 gereği tek olan sayıdır. O hâlde $-(-x) = x$.

💡 Teklik hilesi

Yukarıdaki iki ispatın ortak fikri, bu bölümde tekrar tekrar kullanacağımız bir kalıptır: **$-a = b$ olduğunu göstermek için $a + b = 0$ olduğunu göstermek yeter.** Çünkü $a + b = 0$ ise b , a 'nın bir toplama tersidir; ters tek olduğundan $b = -a$ 'dır. Aynı biçimde, $a \neq 0$ için $a^{-1} = b$ olduğunu göstermek için $ab = 1$ olduğunu göstermek yeter.

Önerme 6.6 (Toplamanın Tersisi). Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $-(x + y) = (-x) + (-y)$ 'dir.

İspat.

Teklik hilesini kullanacağız: $(x + y) + ((-x) + (-y)) = 0$ olduğunu göstermek yeter.

$$\begin{aligned}
 (x + y) + ((-x) + (-y)) &= ((x + y) + (-x)) + (-y) \quad (\text{A2}) \\
 &= ((y + x) + (-x)) + (-y) \quad (\text{A1}) \\
 &= (y + (x + (-x))) + (-y) \quad (\text{A2}) \\
 &= (y + 0) + (-y) \quad (\text{A4}) \\
 &= y + (-y) \quad (\text{A3}) \\
 &= 0. \quad (\text{A4})
 \end{aligned}$$

Demek ki $(-x) + (-y)$, $x + y$ 'nin bir toplama tersidir; **Önerme 6.2** gereği $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Çıkarma tanımıyla bu sonuç $-(x + y) = -x - y$ biçiminde de yazılır; “eksi parantez açarken işaretler değişir” kuralının aksiyomatik gerekçesi budur.

6.4 Çarpma Aksiyomlarının Sonuçları

Çarpma aksiyomları toplama aksiyomlarıyla aynı biçimde olduğundan, toplama için yaptığımız ilk ispatlar kelimesi kelimesine çarpmaya aktarılır: (A1)→(M1), (A2)→(M2), (A3)→(M3), (A4)→(M4). Tek fark, çarpmada 0'ın dışarıda bırakılmasıdır.

Önerme 6.7 (Çarpma Biriminin Tekliği). Çarpma birimi tektir: her $x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 1 = x$ sağlayan yalnız bir $1 \in \mathbb{R}$ vardır.

İspat.

$1'$ de aynı özelliği sağlasın: her x için $x \cdot 1' = x$. Özel olarak $x = 1$ alırsak $1 \cdot 1' = 1$ olur. (M3)'ü $x = 1'$ için yazarsak $1' \cdot 1 = 1'$ olur. (M1) gereği $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$ olduğundan

$$1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$$

bulunur. Çarpma birimi tektir.

Önerme 6.8 (Çarpma Tersinin Tekliği). Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ için $xy = 1$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $y \in \mathbb{R}$ vardır:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists! y \in \mathbb{R} \quad xy = 1.$$

İspat.

$x \neq 0$ olsun; (M4) gereği $xy = 1$ olan bir y vardır. $xz = 1$ olan bir z daha olduğunu varsayalım:

$$\begin{aligned}
z &= z \cdot 1 \quad (M3) \\
&= z(xy) \quad (\text{varsayım: } xy = 1) \\
&= (zx)y \quad (M2) \\
&= (xz)y \quad (M1) \\
&= 1 \cdot y \quad (\text{varsayım: } xz = 1) \\
&= y \cdot 1 \quad (M1) \\
&= y. \quad (M3)
\end{aligned}$$

Böylece $z = y$; çarpma tersi tektir.

■

Artık $x \neq 0$ için x^{-1} yazımı tek bir sayıyı gösterir. Bölme de çarpmanın kısaltmasıdır:

Tanım 6.3 (Bölme). $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\frac{x}{y}$ ifadesi

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

olarak tanımlanır. Bu işleme **bölme** denir. Özel olarak $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$ 'dir; yani (M4)'teki iki gösterim uyumludur.

Bölme tanımı, $y = 0$ için hiçbir anlam taşımaz; çünkü (M4) yalnızca $y \neq 0$ için ters eleman verir. Birazdan sıfırın tersinin olmayacağını da ispatlayacağız.

Şimdi toplama ile çarpmayı birleştiren ilk sonuç geliyor. "Sıfırla çarpım sıfırdır" cümlesi aksiyom değildir; dağılma aksiyomunun bir sonucudur.

Önerme 6.9 (Sıfırla Çarpım). Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot x = 0$ 'dır.

İspat.

(M3), (A3), (D) ve (M3) sırasıyla kullanılırsa

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

elde edilir. Öte yandan (A3) gereği $x = x + 0$ 'dır. Demek ki

$$x + x \cdot 0 = x + 0.$$

(A1) ile iki yanı da $x \cdot 0 + x = 0 + x$ biçiminde yazıp Önerme 6.3 (1) ile x 'i sadeleştirirsek $x \cdot 0 = 0$ bulunur. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ ise (M1)'den gelir.

■

⚠ Neden (M3) aksiyomunda bir, sıfırdan farklı alınır?

(M3)'teki $1 \neq 0$ koşulu gereksiz bir ayrıntı gibi görünebilir; değildir. $1 = 0$ olsaydı her $x \in \mathbb{R}$ için (M3), varsayım ve Önerme 6.9 sırasıyla

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$$

verirdi; yani her reel sayı 0 olurdu ve $\mathbb{R} = \{0\}$ tek elemanlı bir küme olurdu. Üzerinde çalışılacak bir sayı sistemi kalmazdı. Bu yüzden analizde pek çok ispat "... o hâlde $0 = 1$ olurdu, çelişki" cümlesiyle biter.

Sonuç 6.1 (Sıfırın Çarpma Tersi Yoktur). $0 \cdot y = 1$ eşitliğini sağlayan bir $y \in \mathbb{R}$ yoktur; yani 0^{-1} tanımsızdır ve $\frac{x}{0}$ ifadesi hiçbir x için anlamlı değildir.

İspat.

Olmayana ergi ile: $0 \cdot y = 1$ olan bir y olsaydı, **Önerme 6.9** gereği $0 \cdot y = 0$ olduğundan $0 = 1$ bulunurdu. Bu, (M3)'teki $1 \neq 0$ koşuluyla çelişir.

■

Sıfırla çarpım sonucu, ters elemanla ilgili küçük ama gerekli bir bilgiyi de verir: sıfırdan farklı bir sayının tersi de sıfırdan farklıdır. Bu sayede “tersin tersi”nden söz edebiliriz.

Önerme 6.10 (Çarpma Tersinin Tersi). Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ için $x^{-1} \neq 0$ ve $(x^{-1})^{-1} = x$ 'tir.

İspat.

Önce $x^{-1} \neq 0$: $x^{-1} = 0$ olsaydı **Önerme 6.9** gereği $xx^{-1} = x \cdot 0 = 0$ olurdu; oysa (M4) gereği $xx^{-1} = 1$ ve (M3) gereği $1 \neq 0$ 'dır. Çelişki. Demek ki $x^{-1} \neq 0$ ve (M4) ile $(x^{-1})^{-1}$ vardır. Şimdi (M4) gereği $xx^{-1} = 1$, (M1) gereği de $x^{-1}x = 1$ 'dir. Son eşitlik, x 'in x^{-1} sayısının bir çarpma tersi olduğunu söyler. **Önerme 6.8** gereği çarpma tersi tek olduğundan $(x^{-1})^{-1} = x$ 'tir.

■

Sıradaki sonuçlar “eksi” ile çarpmanın kurallarıdır. Hepsinin ortak aracı, teklik hilesi ile dağılma aksiyomudur.

Önerme 6.11 (Eksi Bir ile Çarpım). Her $x \in \mathbb{R}$ için $-x = (-1)x$ 'tir.

İspat.

(A4) gereği $1 + (-1) = 0$ 'dır. **Önerme 6.9**, bu eşitlik, (D) ve (M3) sırasıyla kullanılırsa

$$0 = x \cdot 0 = x (1 + (-1)) = x \cdot 1 + x(-1) = x + x(-1)$$

elde edilir. Demek ki $x(-1)$, x 'in bir toplama tersidir; **Önerme 6.2** gereği $x(-1) = -x$. (M1) ile $(-1)x = -x$ bulunur.

■

Önerme 6.12 (Çarpımda İşaret Kuralları). Her $x, y \in \mathbb{R}$ için:

1. $x(-y) = -(xy)$ ve $(-x)y = -(xy)$;
2. $(-x)(-y) = xy$.

İspat.

(1) Teklik hilesi: $xy + x(-y) = 0$ olduğunu gösterelim. (D), (A4) ve **Önerme 6.9** ile

$$xy + x(-y) = x (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0.$$

O hâlde $x(-y)$, xy 'nin toplama tersidir: $x(-y) = -(xy)$. İkinci eşitlik için (M1)'i iki kez kullanalım: $(-x)y = y(-x) = -(yx) = -(xy)$.

(2) Birinci maddeyi x yerine $-x$ ile uygulayalım: $(-x)(-y) = -((-x)y)$. Yine birinci madde ile $(-x)y = -(xy)$ olduğundan

$$(-x)(-y) = -(-(xy)) = xy$$

bulunur; son adımda **Önerme 6.5** kullanıldı.

■

Sonuç 6.2 (Karede İşaret). Her $x \in \mathbb{R}$ için $(-x)(-x) = xx = x^2$ 'dir; özel olarak $(-1)(-1) = 1$.

İspat.

Önerme 6.12 (2)'de $y = x$ alınırsa $(-x)(-x) = x^2$; $x = 1$ alınırsa (M3) ile $(-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$ bulunur.

■

“Eksi ile eksinin çarpımı artıdır” kuralı, görüldüğü gibi bir tercih ya da uzlaşım değil, dağılma aksiyonunun zorunlu sonucudur. Aksi tanımlansaydı (D) bozulurdu.

Şimdi denklem çözerken en çok kullandığımız kurala geliyoruz: bir çarpım sıfırsa çarpanlardan biri sıfırdır.

Önerme 6.13 (Sıfır Çarpım Özelliği). $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $xy = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ veya $y = 0$ olmasıdır:

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

İspat.

$(\Leftarrow)$ $x = 0$ ise **Önerme 6.9** gereği $xy = 0 \cdot y = 0$; $y = 0$ ise yine aynı önermeyle $xy = x \cdot 0 = 0$.

$(\Rightarrow)$ $xy = 0$ olsun. $x = 0$ ise iş bitmiştir. $x \neq 0$ olsun; $y = 0$ olduğunu göstereceğiz. $x \neq 0$ olduğundan (M4) gereği x^{-1} vardır ve

$$\begin{aligned} y &= 1 \cdot y && \text{(M3), (M1)} \\ &= (x^{-1}x)y && \text{(M4), (M1)} \\ &= x^{-1}(xy) && \text{(M2)} \\ &= x^{-1} \cdot 0 && \text{(varsayım: } xy = 0) \\ &= 0. && \text{(sıfırla çarpım)} \end{aligned}$$

Son adımda **Önerme 6.9** kullanıldı. Her iki durumda da $x = 0$ veya $y = 0$ 'dır.

■

Sonuç 6.3 (Sıfırdan Farklı Sayıların Çarpımı). $x, y \in \mathbb{R}$ için $xy \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmasıdır.

İspat.

Önerme 6.13'in iki yanını olumsuzlayalım: $xy \neq 0 \Leftrightarrow \neg(x = 0 \vee y = 0)$. De Morgan yasası (**Teorem 1.1 (6)**) ile $\neg(x = 0 \vee y = 0) \equiv (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ 'dır.

■

Sıfır çarpım özelliği, $(x-1)(x-2) = 0$ gibi bir denklemi “ya $x-1=0$ ya $x-2=0$ ” diye ikiye ayırmamızın gerekçesidir. Bu özellik her cisimde geçerlidir. Ama örneğin saat aritmetiğinde (12'ye göre kalanlarda) $3 \cdot 4 = 12 = 0$ olur; çarpanların ikisi de sıfır değildir. Demek ki bu yapı cisim değildir (3'ün çarpma tersi yoktur).

Bölümün son sonucu, çarpımın tersini verir.

Önerme 6.14 (Çarpımın Tersisi). $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ reel sayıları için $xy \neq 0$ ve $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ 'dir.

İspat.

Sonuç 6.3 gereği $xy \neq 0$ 'dır; dolayısıyla (M4) ile x^{-1} , y^{-1} ve $(xy)^{-1}$ vardır. Teklik hilesi: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x (y(y^{-1}x^{-1})) && \text{(M2)} \\ &= x ((yy^{-1})x^{-1}) && \text{(M2)} \\ &= x(1 \cdot x^{-1}) && \text{(M4)} \\ &= xx^{-1} && \text{(M3), (M1)} \\ &= 1. && \text{(M4)} \end{aligned}$$

O hâlde $y^{-1}x^{-1}$, xy 'nin bir çarpma tersidir; **Önerme 6.8** gereği $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. (M1) ile $y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ olduğu da açıktır.

■

Bu sonucun kesirlerle yazımı $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$ 'dir.

6.5 Örnekler

Aşağıdaki örnekler, türettiğimiz sonuçların lise cebirindeki tanıdık işlemleri nasıl gerekçelendirdiğini gösterir.

Örnek 6.1 (Birinci Dereceden Denklemin Çözümü). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olsun. $ax + b = 0$ denkleminin tam olarak bir çözümü vardır ve bu çözüm $x = -\frac{b}{a}$ 'dır.

Çözüm.

Varlık. $x_0 = -\frac{b}{a} = (-b)a^{-1}$ alalım (burada $-\frac{b}{a}$ ile $(-b)a^{-1}$ 'i kastediyoruz; iki olası okumanın eşit olduğu aşağıda görülecek). Denklemden yerine koyalım:

$$\begin{aligned} ax_0 + b &= a \left((-b)a^{-1} \right) + b \\ &= (aa^{-1})(-b) + b \quad (\text{M1}), (\text{M2}) \\ &= 1 \cdot (-b) + b \quad (\text{M4}) \\ &= (-b) + b \quad (\text{M3}), (\text{M1}) \\ &= 0. \quad (\text{A1}), (\text{A4}) \end{aligned}$$

Demek ki x_0 bir çözümdür.

Teklilik. x herhangi bir çözüm olsun: $ax + b = 0$. İki yana $-b$ ekleyelim; (A2), (A4), (A1), (A3) ile $ax = -b$ olur. Şimdi $a \neq 0$ olduğundan iki yanı a^{-1} ile çarpalım:

$$x = 1 \cdot x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}(-b) = (-b)a^{-1} = x_0.$$

Burada sırasıyla (M3)+(M1), (M4)+(M1), (M2), $ax = -b$ ve (M1) kullanıldı. O hâlde her çözüm x_0 'a eşittir.

Son olarak $-\frac{b}{a}$ yazımının iki okuması olan $(-b)a^{-1}$ ile $-(ba^{-1})$ eşittir: **Önerme 6.12** (1) ile $(-b)a^{-1} = -(ba^{-1})$. Bu yüzden yazımda parantez gerekmez.

■

Örnek 6.2 (Kesirlerle İşlem Kuralları). $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0, d \neq 0$ olsun. Aşağıdaki kesir kurallarını aksiyomlardan türetelim.

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Çözüm.

Önce $bd \neq 0$ olduğunu not edelim (**Sonuç 6.3**); böylece $\frac{ac}{bd}$ ve $\frac{ad+bc}{bd}$ anlamlıdır.

(1) Bölme tanımı (**Tanım 6.3**), (M1)–(M2) ile çarpanları yeniden sıralama ve **Önerme 6.14**:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

(2) Önce her kesri “paydayı bd yapacak” biçimde genişletelim. $dd^{-1} = 1$ olduğundan (M3), (M4), çarpanları yeniden sıralamak için (M1)–(M2) ve **Önerme 6.14** ile

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = ab^{-1}(dd^{-1}) = (ad)(b^{-1}d^{-1}) = (ad)(bd)^{-1};$$

benzer biçimde $\frac{c}{d} = (bc)(bd)^{-1}$. Şimdi (D) aksiyomu ile ortak çarpanı dışarı alalım:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Burada (D) aksiyomu $z(x + y) = zx + zy$ biçiminde (M1) ile birlikte kullanıldı.

(3) $(\Rightarrow) ab^{-1} = cd^{-1}$ olsun. İki yanı bd ile çarpalım. Sol yan:

$$(ab^{-1})(bd) = a(b^{-1}b)d = a \cdot 1 \cdot d = ad,$$

sağ yan benzer biçimde $(cd^{-1})(bd) = c(d^{-1}d)b = cb = bc$. Eşit sayıların bd ile çarpımları eşit olduğundan ($\cdot$ bir fonksiyondur) $ad = bc$.

($\Leftrightarrow$) $ad = bc$ olsun. İki yanı $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$ ile çarpalım:

$$(ad)(b^{-1}d^{-1}) = ab^{-1}(dd^{-1}) = ab^{-1} = \frac{a}{b}, \quad (bc)(b^{-1}d^{-1}) = cd^{-1}(bb^{-1}) = cd^{-1} = \frac{c}{d}.$$

Sol yanlar eşit olduğundan $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

■

6.6 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (Cebirsel Aksiyomlardan Türetmeler). Aşağıdaki eşitlikleri yalnızca aksiyomları ve bu bölümde ispatlanan sonuçları kullanarak gösteriniz. Her adımda hangi kuralı kullandığınızı belirtiniz. ($x, y \in \mathbb{R}$.)

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- $-(x - y) = y - x$.
- $x \neq 0$ ise $-x \neq 0$ ve $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.
- $y \neq 0$ olmak üzere $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

Çözüm.

a) (D) aksiyomunu iki kez uygulayalım; önce $(x + y)$ 'yi tek bir çarpan gibi görüp (M1) ile sola alalım:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x + y)(x + y) && (\text{tanım}) \\ &= (x + y)x + (x + y)y && (D) \\ &= x(x + y) + y(x + y) && (M1) \\ &= (xx + xy) + (yx + yy) && (D) \\ &= x^2 + (xy + xy) + y^2 && (M1), (A1), (A2) \\ &= x^2 + (1 + 1)(xy) + y^2 && (M3), (D) \\ &= x^2 + 2xy + y^2. && (2 = 1 + 1) \end{aligned}$$

Beşinci adımda $yx = xy$ (M1) ve toplamların yeniden gruplanması (A1, A2), altıncı adımda $xy + xy = 1 \cdot (xy) + 1 \cdot (xy) = (1 + 1)(xy)$ kullanıldı.

b) Çıkarma tanımı ile $x - y = x + (-y)$. **Önerme 6.6** ve **Önerme 6.5** ile

$$-(x - y) = -(x + (-y)) = (-x) + (-(-y)) = (-x) + y = y + (-x) = y - x;$$

son iki adımda (A1) ve çıkarma tanımı kullanıldı.

c) Önce $-x \neq 0$: $-x = 0$ olsaydı **Önerme 6.5** ve **Önerme 6.4** ile $x = -(-x) = -0 = 0$ olurdu; bu $x \neq 0$ ile çelişir. Demek ki $-x \neq 0$ ve (M4) gereği $(-x)^{-1}$ vardır. Şimdi teklik hilesi: $(-x)(-(x^{-1})) = 1$ olduğunu gösterelim. **Önerme 6.12** (2) ve (M4) ile

$$(-x)(-(x^{-1})) = xx^{-1} = 1.$$

Demek ki $-(x^{-1})$, $-x$ 'in bir çarpma tersidir; **Önerme 6.8** gereği $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

d) $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ ve $y^{-1} \neq 0$ (**Önerme 6.10**). **Önerme 6.13** gereği $xy^{-1} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ veya $y^{-1} = 0$ olmasıdır; ikincisi olanaksız olduğundan koşul $x = 0$ 'a indirgenir.

e) (D) ile açalım, sonra işaret kurallarını uygulayalım:

$$\begin{aligned}
(x-y)(x+y) &= (x-y)x + (x-y)y && (D) \\
&= x(x-y) + y(x-y) && (M1) \\
&= (x^2 + x(-y)) + (yx + y(-y)) && (D), \text{ çıkarma tanımı} \\
&= x^2 + (-xy) + xy + (-y^2) && (\text{işaret kuralları}), (M1) \\
&= x^2 + 0 + (-y^2) && (A1), (A2), (A4) \\
&= x^2 - y^2. && (A3), \text{ çıkarma tanımı}
\end{aligned}$$

Dördüncü adımda $x(-y) = -(xy)$ ve $y(-y) = -(yy) = -(y^2)$ için [Önerme 6.12](#) (1), beşinci adımda $-(xy) + xy = 0$ için (A1) ve (A4) kullanıldı.

■

Cebirsel aksiyomlar reel sayılarla nasıl hesap yapılacağını söyler; ama iki sayıdan hangisinin büyük olduğunu söylemez. Sayı doğrusundaki sıralamayı kuran aksiyomlar sıradaki bölümün konusudur: [Sıralama Aksiyomları ve Aralıklar](#).

7. Sıralama Aksiyomları ve Aralıklar

Önceki bölümdeki cebirsel (cisim) aksiyomları reel sayıların aritmetik yapısını, yani toplama ve çarpmanın kurallarını belirler. Ancak bu aksiyomlar iki sayıyı **karşılaştırmaya** yetmez: “3, 5’ten küçüktür” cümlesinin anlamı cebirsel aksiyomlarda yoktur. Nitekim sonlu cisim $\{0, 1\}$ üzerinde $1 + 1 = 0$ olduğundan orada “ $0 < 1$ ” demenin bile tutarlı bir yolu bulunamaz. Sayıları bir doğru üzerine dizebilmek için yeni bir aksiyom grubuna ihtiyacımız var: **sıralama aksiyomları**.

Bu bölümde dört sıralama aksiyomunu vereceğiz, ardından eşitsizliklerle çalışırken kullandığımız bütün kuralları (taraf değiştirme, negatifle çarpınca yön değişmesi, $0 < 1$, karelerin negatif olmaması, ...) bu dört aksiyomdan ve cebirsel aksiyomlardan türeteceğiz. Sonra sıralamanın doğal ürünleri olan aralıkları, maksimum, minimum ve işaret fonksiyonlarını tanımlayacağız. Mutlak değer, sıradaki bölümün konusudur.

7.1 Sıralama Aksiyomları

Reel sayılar kümesi üzerinde $<$ ile gösterilen ve “küçüktür” diye okunan bir bağıntı (Tanım 4.1) vardır. Bu bağıntı şu dört aksiyomu sağlar:

! Sıralama Aksiyomları

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için:

- (O1) **Üçlem yasaı (trichotomy)**: $x = y$, $x < y$, $y < x$ koşullarından **tam olarak biri** doğrudur.
- (O2) **Geçişlilik**: $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ ’dir.
- (O3) **Toplamayla uyum**: $x < y$ ise $x + z < y + z$ ’dir.
- (O4) **Pozitifle çarpmayla uyum**: $x < y$ ve $0 < z$ ise $xz < yz$ ’dir.

Aksiyomların anlamı üzerinde duralım. (O1), herhangi iki reel sayının her zaman karşılaştırılabildiğini ve bu karşılaştırmanın tek bir sonucu olduğunu söyler; özel olarak hiçbir x için $x < x$ olamaz (çünkü $x = x$ doğrudur ve üç koşuldan yalnız biri doğru olabilir). (O2), sıralamanın zincirlenebildiğini söyler. (O3) ve (O4) ise sıralamayı cebirsel işlemlere bağlar: bir eşitsizliğin iki yanına aynı sayıyı eklemek ya da iki yanı aynı **pozitif** sayıyla çarpmak eşitsizliğin yönünü değiştirmez. (O4)’te $0 < z$ koşulunun ne kadar önemli olduğunu birazdan göreceğiz: negatif bir sayıyla çarpmak yönü tersine çevirir.

Yalnızca $<$ bağıntısını aksiyom olarak aldık; ötekiler bunun kısaltmasıdır.

Tanım 7.1 (Öteki Sıralama Sembolleri). $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.

- **Büyüktür**: $x > y$ ifadesi $y < x$ demektir.
- **Küçük veya eşit**: $x \leq y$ ifadesi “ $x < y$ veya $x = y$ ” demektir.
- **Büyük veya eşit**: $x \geq y$ ifadesi “ $x > y$ veya $x = y$ ” demektir.
- **Zincir eşitsizlik**: $x < y < z$ ifadesi “ $x < y$ ve $y < z$ ” demektir. $x \leq y < z$, $x < y \leq z$ gibi karışık zincirler de aynı biçimde okunur.

Üçlem yasaının bir sonucu olarak $x \leq y$ ile $y < x$ birbirinin olumsuzlamasıdır: “ $x \leq y$ değil” demek “ $y < x$ ” demektir. Bu, eşitsizlik ispatlarında olmayana ergi yöntemini kullanmamızı çok kolaylaştırır. Ayrıca $\leq$ bağıntısı yansılmalı, ters simetrik ve geçişlidir ve herhangi iki reel sayı $\leq$ ile karşılaştırılabilir; yani $\leq$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tam sıralamadır (Tanım 4.7). Bunun ispatı bölüm sonundaki alıştırmalardadır.

Bir sayıyı sıfırla karşılaştırmak, onu pozitif ya da negatif olarak sınıflandırmamızı sağlar.

Tanım 7.2 (Pozitif ve Negatif Sayılar). Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısına

- $x > 0$ ise **pozitif**,
- $x < 0$ ise **negatif**,
- $x \geq 0$ ise **negatif olmayan**,
- $x \leq 0$ ise **pozitif olmayan**

denir. Pozitif ve negatif reel sayıların kümeleri

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

ile gösterilir.

Üçlem yasasının $y = 0$ için özel hâli şudur: her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \mathbb{R}^+$, $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^-$ koşullarından tam olarak biri doğrudur. Yani $\mathbb{R}$, birbirinden ayrık üç parçaya ayrılır: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$. Birazdan $x \in \mathbb{R}^-$ koşulunun $-x \in \mathbb{R}^+$ koşuluna denk olduğunu göstereceğiz; böylece üçlem “ya x pozitif, ya $x = 0$, ya da $-x$ pozitif” biçimini alır.

7.2 Sıralama Aksiyomlarının Sonuçları

Sıralama aksiyomları, cebirsel aksiyomlarla birlikte kullanıldığında eşitsizliklerle ilgili bütün tanıdık kuralları verir. Sırayla türetelim; her adımda kullanılan aksiyom ya da sonuç parantez içinde belirtilmiştir.

Önerme 7.1 (Eşitsizliklerin Toplanması). $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ ve $z \leq t$ ise $x + z < y + t$ ’dir. Özel olarak $x < y$ ve $z < t$ ise $x + z < y + t$ ’dir.

İspat.

$x < y$ olduğundan (O3) ile $x + z < y + z$ ’dir. Şimdi $z \leq t$ koşulunu iki duruma ayıralım.

- $z < t$ ise (O3) ile $z + y < t + y$, (A1) ile $y + z < y + t$ olur. $x + z < y + z$ ve $y + z < y + t$ olduğundan (O2) ile $x + z < y + t$.
- $z = t$ ise $y + z = y + t$ olur ve $x + z < y + z = y + t$ doğrudan istenendir.

Her iki durumda da $x + z < y + t$.

■

Eşitsizliklerin toplanabildiğini gördük; çıkarılamayacağını da not edelim: $1 < 2$ ve $0 < 5$ iken $1 - 0 < 2 - 5$ yanlıştır. Eşitsizlikler yalnızca aynı yönde toplanır.

Önerme 7.2 (Farkın İşareti). $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

$$x < y \Leftrightarrow x - y < 0 \Leftrightarrow 0 < y - x.$$

İspat.

Birinci denklik. $(\Rightarrow)$ $x < y$ olsun. (O3) ile iki yana $-y$ ekleyelim: $x + (-y) < y + (-y)$. Sol yan çıkarma tanımıyla $x - y$, sağ yan (A4) ile 0’dır: $x - y < 0$.

$(\Leftarrow)$ $x - y < 0$ olsun. (O3) ile iki yana y ekleyelim: $(x - y) + y < 0 + y$. Sol yan (A2), (A1), (A4), (A3) ile $x + ((-y) + y) = x + 0 = x$, sağ yan (A1), (A3) ile y ’dir: $x < y$.

İkinci denklik. $x - y < 0$ olsun. (O3) ile iki yana $-(x - y)$ ekleyelim: $(x - y) + (-(x - y)) < 0 + (-(x - y))$, yani (A4), (A1), (A3) ile $0 < -(x - y)$. Bölüm 6’nın alıştırmasında (Alıştırma 6.1 (b)) $-(x - y) = y - x$ gösterilmişti; o hâlde $0 < y - x$. Terside aynı yolla: $0 < y - x$ ise iki yana $-(y - x) = x - y$ ekleyince $x - y < 0$ çıkar.

■

Bu önerme, eşitsizlik çözerken “her şeyi bir yana topla” adımının gerekçesidir: $x < y$ eşitsizliği ile $x - y < 0$ eşitsizliği aynı çözüm kümesine sahiptir.

Önerme 7.3 (Eksi Alma Yönü Çevirir). $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ olması için gerek ve yeter koşul $-y < -x$ olmasıdır.

İspat.

$(\Rightarrow)$ $x < y$ olsun. (O3) ile iki yana $(-x) + (-y)$ ekleyelim:

$$x + ((-x) + (-y)) < y + ((-x) + (-y)).$$

Sol yan (A2), (A4), (A1), (A3) ile, sağ yan da (A1), (A2), (A4), (A3) ile sadeleşir:

$$(x + (-x)) + (-y) = 0 + (-y) = -y$$

$$y + ((-y) + (-x)) = (y + (-y)) + (-x) = 0 + (-x) = -x$$

O hâlde $-y < -x$.

($\Leftarrow$) $-y < -x$ olsun. Az önce ispatladığımız yönü bu eşitsizliğe uygulayalım (burada x yerine $-y$, y yerine $-x$ alıyoruz): $-(-x) < -(-y)$. **Önerme 6.5** gereği $-(-x) = x$ ve $-(-y) = y$ olduğundan $x < y$. ■

Önerme 7.4 (Bir Sayı ile Tersinin İşareti). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \quad \text{ve} \quad x < 0 \Leftrightarrow -x > 0.$$

Yani pozitif bir sayının toplama tersi negatif, negatif bir sayının toplama tersi pozitiftir.

İspat.

Önerme 7.3'de x yerine 0, y yerine x alalım: $0 < x \Leftrightarrow -x < -0$. **Önerme 6.4** gereği $-0 = 0$ olduğundan bu, $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ demektir. İkincisi için x aynı kalsın, y yerine 0 alalım: $x < 0 \Leftrightarrow -0 < -x$, yani $x < 0 \Leftrightarrow 0 < -x$. ■

Böylece söz verdiğimiz sonucu elde ettik: her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \mathbb{R}^+$, $x = 0$, $-x \in \mathbb{R}^+$ koşullarından tam olarak biri doğrudur.

Şimdi çarpmanın işaretle ilişkisine geçelim. (O4), pozitifle çarpmanın yönü koruduğunu söyler; önce bunun hemen çıkan sonuçlarını, sonra negatifle çarpmayı ele alalım.

Önerme 7.5 (Çarpımın İşareti). $x, y \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $x > 0$ ve $y > 0$ ise $xy > 0$.
2. $x > 0$ ve $y < 0$ ise $xy < 0$.

İspat.

(1) $0 < x$ eşitsizliğinin iki yanını pozitif y ile çarpalım (O4): $0 \cdot y < xy$. **Önerme 6.9** gereği $0 \cdot y = 0$; o hâlde $0 < xy$.

(2) $y < 0$ olduğundan **Önerme 7.4** ile $-y > 0$ 'dır. (1) ile $x(-y) > 0$. **Önerme 6.12** gereği $x(-y) = -(xy)$; yani $-(xy) > 0$. Yine **Önerme 7.4** ile (x yerine xy alarak) $xy < 0$. ■

Önerme 7.6 (Negatifle Çarpma Yönü Çevirir). $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ ve $z < 0$ ise $yz < xz$ 'dir.

İspat.

$z < 0$ olduğundan **Önerme 7.4** ile $0 < -z$ 'dir. $x < y$ eşitsizliğini pozitif $-z$ ile çarpalım (O4): $x(-z) < y(-z)$. **Önerme 6.12** (1) ile $x(-z) = -(xz)$ ve $y(-z) = -(yz)$; yani

$$-(xz) < -(yz).$$

Önerme 7.3'i bu eşitsizliğe uygularsak (x yerine yz , y yerine xz alarak: $-(xz) < -(yz) \Leftrightarrow yz < xz$) istenen $yz < xz$ elde edilir. ■

Bu önerme, eşitsizlik çözerken en sık yapılan hatanın kaynağını gösterir: bir eşitsizliği negatif bir sayıyla çarparken (ya da negatif bir sayıya bölerken) yön **mutlaka** değişir. İşareti bilinmeyen bir sayıyla çarpmak ise hiçbir şey söylemez; iki durumu ayrı ayrı incelemek gerekir.

Sonuç 7.1 (İki Negatifin Çarpımı). $x < 0$ ve $z < 0$ ise $xz > 0$ 'dır.

İspat.

Önerme 7.6'de $y = 0$ alalım: $x < 0$ ve $z < 0$ olduğundan $0 \cdot z < xz$, yani **Önerme 6.9** ile $0 < xz$.

İşaret kurallarını bir tabloda toplayalım ($x \neq 0, y \neq 0$):

x	y	xy	Gerekçe
+	+	+	Önerme 7.5 (1)
+	-	-	Önerme 7.5 (2)
-	+	-	Önerme 7.5 (2) ve (M1)
-	-	+	Sonuç 7.1

Tabloya göre iki sayının çarpımı pozitifse işaretleri aynı, negatifse işaretleri farklıdır. Bu gözlem, çarpım biçimindeki eşitsizlikleri çözerken kullanılacak.

Şimdi çok temel bir soruya geliyoruz: $0 < 1$ midir? Aksiyomlar bunu söylemez; (M3) yalnızca $1 \neq 0$ der. Ama sıralama aksiyomlarıyla birlikte bu, ispatlanabilir bir sonuçtur.

Önerme 7.7 (Sıfır Birden Küçüktür). $0 < 1$ 'dir. Dolayısıyla $-1 < 0$ 'dır.

İspat.

(O1) gereği $0 = 1, 0 < 1, 1 < 0$ koşullarından tam olarak biri doğrudur. (M3) gereği $0 = 1$ olamaz. $1 < 0$ olduğunu varsayalım. O zaman Sonuç 7.1'i $x = z = 1$ ile uygulayabiliriz: $1 \cdot 1 > 0$, yani (M3) ile $1 > 0$. Ama bu, $1 < 0$ varsayımıyla birlikte (O1)'e aykırıdır: $0 < 1$ ile $1 < 0$ aynı anda doğru olamaz. Çelişki. O hâlde geriye tek seçenek kalır: $0 < 1$.

$-1 < 0$ ise Önerme 7.4'ten gelir ($x = 1 > 0$ için $-1 < 0$).

Bu küçük sonuç, sayı doğrusunda “sağa doğru sonsuza kadar gidebileceğimizi” verir:

Önerme 7.8 (Her Sayıdan Büyük Bir Sayı Vardır). Her $x \in \mathbb{R}$ için $x - 1 < x < x + 1$ 'dir. Dolayısıyla en büyük ve en küçük reel sayı yoktur.

İspat.

Önerme 7.7 gereği $0 < 1$. (O3) ile iki yana x ekleyelim: $0 + x < 1 + x$, yani (A1), (A3) ile $x < x + 1$. Benzer biçimde $-1 < 0$ eşitsizliğine x eklersek $x - 1 < x$ bulunur.

Şimdi M en büyük reel sayı olsaydı $M + 1$ de bir reel sayı olur ve $M < M + 1$ sağlanırdı; bu, M 'nin en büyük olmasıyla çelişir. En küçük için $x - 1 < x$ aynı işi görür.

Bu önermeden $1 < 1 + 1 = 2$ ve $2 < 3, 3 < 4$ eşitsizlikleri de çıkar; (O2) ile $0 < 1 < 2 < 3 < 4$. Bu sayıların pozitif olduğunu ileride sürekli kullanacağız.

Önerme 7.9 (Pozitif Sayının Tersisi Pozitifdir). $x \in \mathbb{R}$ olsun.

- $0 < x$ ise $0 < x^{-1}$ 'dir.
- $x < 0$ ise $x^{-1} < 0$ 'dir.

Yani bir sayı ile çarpma tersi aynı işaretlidir.

İspat.

(1) $0 < x$ olsun. Önerme 6.10 gereği $x^{-1} \neq 0$ 'dir; o hâlde (O1) ile ya $x^{-1} > 0$ ya da $x^{-1} < 0$. $x^{-1} < 0$ olduğunu varsayalım. $x > 0$ ve $x^{-1} < 0$ olduğundan Önerme 7.5 (2) ile $xx^{-1} < 0$, yani (M4) ile $1 < 0$ olur. Bu, Önerme 7.7 ile çelişir. Demek ki $x^{-1} > 0$.

(2) $x < 0$ olsun. Yine $x^{-1} \neq 0$ 'dir. $x^{-1} > 0$ olduğunu varsayalım. $x^{-1} > 0$ ve $x < 0$ olduğundan Önerme 7.5 (2) ile (x yerine x^{-1} , y yerine x alarak) $x^{-1}x < 0$, yani $1 < 0$; çelişki. Demek ki $x^{-1} < 0$.

Önerme 7.10 (Tersler Sıralamayı Çevirir). $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 < x < y$ ise $0 < y^{-1} < x^{-1}$ 'dir. Kesir yazıyla:

$$0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

İspat.

$0 < x$ ve $x < y$ olduğundan (O2) ile $0 < y$ 'dir. **Önerme 7.9** gereği $x^{-1} > 0$ ve $y^{-1} > 0$; **Önerme 7.5** (1) ile $x^{-1}y^{-1} > 0$. Şimdi $x < y$ eşitsizliğinin iki yanını bu pozitif sayıyla çarpalım (O4):

$$x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}).$$

Sol yan (M2), (M4), (M3) ile $(xx^{-1})y^{-1} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$; sağ yan (M1), (M2), (M4), (M3) ile $(yy^{-1})x^{-1} = x^{-1}$. O hâlde $y^{-1} < x^{-1}$, ve zaten $0 < y^{-1}$. ■

Örneğin $0 < 2 < 3$ olduğundan $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ 'dir. Bu önerme yalnızca **pozitif** sayılar için yön çevirir; $-1 < 2$ iken $\frac{1}{2} < -1$ yanlıştır.

Sıradaki sonuç, reel sayıların “sık” olduğunu, yani iki sayı arasında her zaman bir üçüncüsünün bulunduğunu söyler.

Önerme 7.11 (İki Sayı Arasında Bir Sayı Vardır). $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ ise

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

olur. Dolayısıyla birbirinden farklı herhangi iki reel sayı arasında bir başka reel sayı vardır: $x < y$ ise $x < z < y$ olacak biçimde bir $z \in \mathbb{R}$ bulunur.

İspat.

Önce $\frac{1}{2}$ 'nin pozitif olduğunu görelim: $2 = 1 + 1$; **Önerme 7.7** ve **Önerme 7.8** ile $0 < 1 < 2$, (O2) ile $0 < 2$; **Önerme 7.9** ile $0 < 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

$x < y$ eşitsizliğine (O3) ile önce x , sonra y ekleyelim:

$$x + x < y + x = x + y \quad \text{ve} \quad x + y < y + y.$$

Burada (A1) kullanıldı. Öte yandan (M3), (D) ve (M1) ile $x + x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = x(1 + 1) = x \cdot 2 = 2x$, benzer biçimde $y + y = 2y$. Böylece

$$2x < x + y < 2y.$$

Şimdi her iki eşitsizliğin iki yanını pozitif $\frac{1}{2}$ ile çarpalım (O4). $(2x) \cdot \frac{1}{2} = x(2 \cdot 2^{-1}) = x \cdot 1 = x$ ve benzer biçimde $(2y) \cdot \frac{1}{2} = y$ olduğundan

$$x < (x+y) \cdot \frac{1}{2} = \frac{x+y}{2} < y$$

elde edilir. $z = \frac{x+y}{2}$ istenen sayıdır. ■

Bu önermenin iki önemli sonucu vardır. Birincisi, aynı işlemi tekrarlayarak x ile y arasında **sonsuz çoklukta** reel sayı bulunduğunu görürüz: $x < z_1 < y$, sonra $x < z_2 < z_1$, sonra $x < z_3 < z_2$, ... İkincisi, $x = 0$ alınırsa: her $y > 0$ için $0 < \frac{y}{2} < y$ 'dir; yani **en küçük pozitif reel sayı yoktur**. Bu gözlem, analizdeki “ ε ne kadar küçük olursa olsun” cümlelerinin temelidir.

Bölümün bu kısmındaki son sonuç, karelerle ilgilidir.

Önerme 7.12 (Karelerin Sıralama Özellikleri). $x, y \in \mathbb{R}$ olsun.

- $0 \leq x^2$; üstelik $x^2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır. Yani sıfırdan farklı her sayının karesi pozitiftir.
- $0 < x < 1$ ise $0 < x^2 < x$ 'tir.

3. $1 < x$ ise $x < x^2$ 'tir.
4. $0 < x < y$ ise $x^2 < y^2$ 'dir.
5. $x < y < 0$ ise $y^2 < x^2$ 'dir.

İspat.

(1) (O1) gereği $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$ durumlarından biri geçerlidir.

- $x = 0$ ise $x^2 = 0 \cdot 0 = 0$ (Önerme 6.9).
- $x > 0$ ise Önerme 7.5 (1) ile $x \cdot x > 0$, yani $x^2 > 0$.
- $x < 0$ ise Sonuç 7.1 ile $x \cdot x > 0$, yani $x^2 > 0$.

Her durumda $x^2 \geq 0$; ayrıca $x \neq 0$ olan iki durumda $x^2 > 0$, yani $x^2 \neq 0$ 'dır. Öte yandan $x = 0$ iken $x^2 = 0$. Demek ki $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (Aynı sonuç Önerme 6.13'den de çıkar: $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.)

(2) $0 < x < 1$ olsun. $x < 1$ eşitsizliğinin iki yanını pozitif x ile çarpalım (O4): $x \cdot x < x \cdot 1$, yani (M3) ile $x^2 < x$. Ayrıca (1) ile $x^2 > 0$ (çünkü $x \neq 0$). O hâlde $0 < x^2 < x$.

(3) $1 < x$ olsun. (O2) ile $0 < 1 < x$ 'ten $x > 0$. $1 < x$ eşitsizliğini pozitif x ile çarpalım (O4): $1 \cdot x < x \cdot x$, yani (M3), (M1) ile $x < x^2$.

(4) $0 < x < y$ olsun; (O2) ile $y > 0$. $x < y$ eşitsizliğini önce pozitif x ile çarpalım: $x^2 < xy$. Sonra pozitif y ile çarpalım: $xy < y^2$ (burada $xy = yx$ için (M1) kullanıldı). (O2) ile $x^2 < y^2$.

(5) $x < y < 0$ olsun. Önerme 7.3 ile $x < y$ 'den $-y < -x$, Önerme 7.4 ile $y < 0$ 'dan $0 < -y$. Böylece $0 < -y < -x$. (4)'ü bu pozitif sayılara uygulayalım: $(-y)^2 < (-x)^2$. Sonuç 6.2 gereği $(-y)^2 = y^2$ ve $(-x)^2 = x^2$; o hâlde $y^2 < x^2$.

■

Önermenin (4) ve (5) maddeleri birlikte şunu söyler: kare alma, pozitif sayılarda sıralamayı korur, negatif sayılarda ise çevirir. Bu yüzden $x^2 < y^2$ eşitsizliğinden $x < y$ sonucu **çıkarılamaz**; örneğin $(-1)^2 < (-3)^2$ ama $-3 < -1$ 'dir. Kare alma işlemi mutlak değerle birlikte düşünüldüğünde bu durum netleşir; bir sonraki bölümde göreceğiz.

Karelerin negatif olmamasının en ünlü uygulaması, iki sayının çarpımını toplamlarıyla karşılaştıran eşitsizliktir.

Teorem 7.1 (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği). Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{ve} \quad ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Her iki eşitsizlikte eşitlik ancak ve ancak $a = b$ iken sağlanır.

İspat.

Önerme 7.12 (1) gereği $(a - b)^2 \geq 0$ 'dır. Bölüm 6'daki alıştırmamızın (a) şıkkındaki açılımı $y = -b$ ile uygulayıp Önerme 6.12 ve Sonuç 6.2'i kullanırsak

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

elde ederiz. O hâlde $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. İki yana $2ab$ ekleyelim; kesin eşitsizlik durumunda (O3) uygulanır, eşitlik durumunda ise iki yan eşit kalır: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Şimdi iki yanı $\frac{1}{2}$ ile çarpalım; $0 < 2$ olduğundan Önerme 7.9 ile $\frac{1}{2} > 0$ 'dır (yine kesin eşitsizlik durumunda (O4), eşitlik durumunda eşitlik):

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

İkinci eşitsizlik için $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ açılımını kullanalım:

$$(a + b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 4ab = (a - b)^2 + 4ab \geq 4ab.$$

Burada $4 = 2 + 2$ ve $2ab + 2ab = 4ab$ (D ile) kullanıldı. Önerme 7.8'in ardından gördüğümüz $0 < 1 < 2 < 3 < 4$ zinciri ve Önerme 7.9 gereği $\frac{1}{4} > 0$ 'dır; iki yanı bu pozitif sayıyla çarpalım; $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a + b)^2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = (a + b)^2 \cdot 4^{-1}$ olduğundan (çünkü $2 \cdot 2 = 4$ ve Önerme 6.14 ile $(2 \cdot 2)^{-1} = 2^{-1}2^{-1}$)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

Eşitlik durumu. Yukarıdaki iki türetmede de tek “kayıp” $(a-b)^2 \geq 0$ adımıdır; eşitsizlik ancak $(a-b)^2 = 0$ iken eşitliğe dönüşür. **Önerme 7.12 (1)** gereği $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

■

Teoremin adı şuradan gelir: $a, b \geq 0$ için $\frac{a+b}{2}$ sayısına **aritmetik ortalama**, $\sqrt{ab}$ sayısına **geometrik ortalama** denir ve ikinci eşitsizlik, karekök tanımlandıktan sonra, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ biçimini alır. Karekökün varlığı tamlık aksiyomunu gerektirdiğinden bu biçimi **Köklerin Varlığı**, **İrrasyonel Sayılar ve Yoğunluk** bölümüne bırakıyoruz; burada ispatladığımız kareli biçim ise yalnızca cebirsel ve sıralama aksiyomlarına dayanır.

7.3 Eşitsizlik Çözme

Türettiğimiz kurallar, bir eşitsizliği sağlayan bütün x ’leri bulmak için yeter. Her adımın gerekçesini yazarak iki örnek çözelim.

Örnek 7.1 (Birinci Dereceden Eşitsizlik). $2x - 3 < 5x + 6$ eşitsizliğini sağlayan bütün $x \in \mathbb{R}$ sayılarını bulunuz.

Çözüm.

Eşitsizlik çözmek, verilen eşitsizliğe **denk** ama daha basit eşitsizlikler zinciri kurmaktır; her adımın iki yönlü olmasına dikkat edelim.

(O3) gereği bir eşitsizliğin iki yanına aynı sayıyı eklemek denk bir eşitsizlik verir (çünkü eklenen sayının tersini ekleyerek geri dönülür). İki yana $-5x + 3$ ekleyelim:

$$2x - 3 < 5x + 6 \Leftrightarrow (2x - 3) + (-5x + 3) < (5x + 6) + (-5x + 3) \Leftrightarrow -3x < 9.$$

Son adımda (A1), (A2), (A4), (A3) ve (D) ile $2x - 5x = (2 - 5)x = -3x$ sadeleştirilmesi yapıldı; burada $5 = 4 + 1$ kısaltmasını, $-(5x) = (-5)x$ için **Önerme 6.12 (1)**’i ve $5 = 3 + 2$ olduğundan $2 - 5 = 2 - (3 + 2) = -3$ hesabını kullandık.

Şimdi iki yanı $-\frac{1}{3}$ ile çarpacağız. $3 > 0$ olduğundan **Önerme 7.9** ile $\frac{1}{3} > 0$, **Önerme 7.4** ile $-\frac{1}{3} < 0$ ’dır. Negatif sayıyla çarpma yönü çevirir (**Önerme 7.6**):

$$-3x < 9 \Leftrightarrow 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) < (-3x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -3 < x.$$

Burada $(-3x)(-\frac{1}{3}) = (3x)\frac{1}{3} = x$ için **Önerme 6.12 (2)** ve (M1), (M2), (M4), (M3) kullanıldı; geri yön için de eşitsizliği yine negatif olan -3 ile çarpmak yeter.

Çözüm kümesi $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$ ’tür; birazdan tanımlayacağımız aralık gösterimiyle $(-3, +\infty)$.

■

Örnek 7.2 (Çarpım Biçiminde Eşitsizlik). $(x-1)(x+3) < 0$ eşitsizliğini sağlayan bütün $x \in \mathbb{R}$ sayılarını bulunuz.

Çözüm.

İşaret tablosuna göre bir çarpımın negatif olması için gerek ve yeter koşul çarpanların sıfırdan farklı ve zıt işaretli olmasıdır. Gerçekten: çarpanlardan biri sıfırsa çarpım sıfırdır (**Önerme 6.9**); ikisi de pozitif ya da ikisi de negatifse çarpım pozitifdir (**Önerme 7.5, Sonuç 7.1**); zıt işaretliyse çarpım negatiftir (**Önerme 7.5 (2)**). Üçlem yasası gereği başka durum yoktur. O hâlde

$$(x-1)(x+3) < 0 \Leftrightarrow (x-1 < 0 \wedge x+3 > 0) \vee (x-1 > 0 \wedge x+3 < 0).$$

Birinci durum. **Önerme 7.2** ile $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ve $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ (ikincisi için $x+3 = x - (-3)$ yazılır). Yani $-3 < x < 1$.

İkinci durum. $x > 1$ ve $x < -3$. Bu ikisi birlikte olamaz: $x > 1$ ve $x < -3$ olsaydı (O2) ile $1 < x < -3$ 'ten $1 < -3$ çıkardı; oysa $-3 < 0 < 1$ (çünkü $3 > 0$ ve **Önerme 7.4**) ve (O1) gereği $1 < -3$ ile $-3 < 1$ aynı anda doğru olamaz. İkinci durum boştur.

Çözüm kümesi $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 1\}$, yani $(-3, 1)$ aralığıdır.

■

7.4 Aralıklar

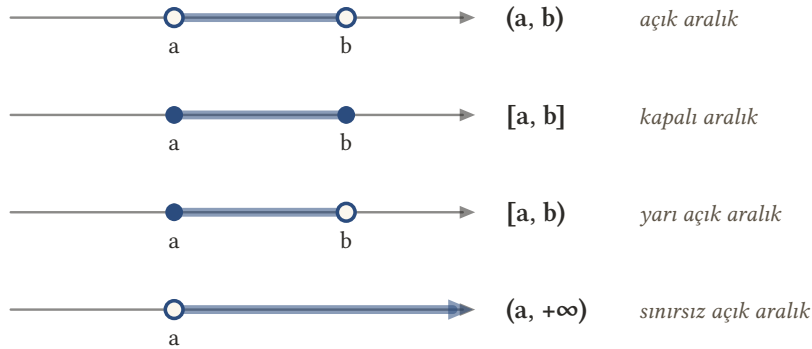
Sıralama bağıntısı, reel sayıların en önemli alt kümelerini tanımlamamızı sağlar: aralıklar. Sezgisel olarak aralık, sayı doğrusunda “deliksiz” bir parçadır: iki noktası kümedeyse aralarındaki her nokta da kümedir.

Tanım 7.3 (Aralık). $I \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun. I 'nin $x < y$ olan her x, y elemanı için, $x < z < y$ koşulunu sağlayan her z sayısı da I 'nin elemanı oluyorsa I 'ya bir **aralık** (interval) denir. Sembolle:

$$\forall x, y \in I \forall z \in \mathbb{R} \quad (x < z < y \implies z \in I) .$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere dokuz tür aralık tanımlanır:

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – **açık aralık**;
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – **kapalı aralık**;
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ – **yarı açık aralık**;
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ – **yarı açık aralık**;
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ – **açık aralık**;
6. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ – **açık aralık**;
7. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ – **kapalı aralık**;
8. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ – **kapalı aralık**;
9. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ – **bütün reel sayılar**.



Şekil 7.1: Dolu nokta uç noktanın aralığa ait olduğunu, içi boş nokta ait olmadığını gösterir. Sonsuz tarafta uç nokta yoktur; aralık o yönde sınırsız sürer.

İlk dördü **sınırlı aralık**, son beşi **sınırsız aralık** olarak anılır; a ve b sayılarına aralığın **uç noktaları** denir. Yuvarlak ayraç uç noktanın kümeye ait olmadığını, köşeli ayraç ait olduğunu gösterir. $+\infty$ ve $-\infty$ sembolleri **reel sayı değildir**; yalnızca “sağa/sola doğru sınır yok” demenin kısa yoludur. Bu yüzden sonsuz tarafta her zaman yuvarlak ayraç kullanılır.

Tanımda $a < b$ varsaydık. $a = b$ olursa $[a, a] = \{a\}$ tek elemanlı küme olur; (a, a) , $(a, a]$ ve $[a, a)$ ise boş kümedir. Aksi söylenmedikçe her zaman $a < b$ varsayacağız. **Önerme 7.11** sayesinde $a < b$ iken (a, b) aralığı boş değildir; hatta sonsuz elemanlıdır.

Örnek 7.3 (Hangi Kümeler Aralıktır?). Aşağıdaki kümelerin aralık olup olmadığını tanıma göre belirleyiniz.

1. (a, b) açık aralığı ($a < b$).

2. $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi.
3. $A = [0, 1] \cup [2, 3]$.
4. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Çözüm.

(1) $x, y \in (a, b)$, $x < y$ ve $x < z < y$ olsun. $a < x$ ve $x < z$ olduğundan (O2) ile $a < z$; $z < y$ ve $y < b$ olduğundan yine (O2) ile $z < b$. Yani $a < z < b$, $z \in (a, b)$. Küme boş da değildir (Önerme 7.11). Demek ki (a, b) tanım anlamında bir aralıktır. Dokuz türün her biri için ispat aynı kalıptadır: kapalı uçlarda $\leq$ ile $<$ birlikte kullanılır.

(2) $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ 'dur; tanım gereği $x, y > 0$ ve $x < z < y$ ise $0 < x < z$, (O2) ile $z > 0$. Boş olmadığı da açıktır ($1 \in \mathbb{R}^+$). Aralıktır.

(3) $x = 1 \in A$ ve $y = 2 \in A$ alalım; $1 < 2$ 'dir. $z = \frac{3}{2}$ için $1 < \frac{3}{2} < 2$ 'dir (Önerme 7.11). Ama $\frac{3}{2} \notin [0, 1]$ (çünkü $\frac{3}{2} > 1$) ve $\frac{3}{2} \notin [2, 3]$ (çünkü $\frac{3}{2} < 2$); yani $\frac{3}{2} \notin A$. Tanımdaki koşul $x = 1$, $y = 2$, $z = \frac{3}{2}$ için bozulur. A aralık **değildir**: sayı doğrusunda $(1, 2)$ deliği vardır.

(4) $x = -1$, $y = 1$ alalım; ikisi de kümededir ve $-1 < 0 < 1$. Ama $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aralık **değildir**.

■

Tanım, tek elemanlı kümeleri de (" $x < y$ olan iki eleman" bulunamadığından, koşul boş yere sağlanır) aralık sayar; bunlara **dejenere aralık** denir. Tersine de doğrudur: $\mathbb{R}$ 'nin aralık olan her alt kümesi yukarıdaki dokuz türden biridir ya da tek noktadır. Bunun ispatı tamlik aksiyomunu (supremum ve infimum kavramlarını) gerektirdiğinden burada vermiyoruz; bu kitapta yalnızca dokuz türle çalışacağız.

7.5 Sıralamayla Tanımlanan Fonksiyonlar

Sıralama aksiyomları, cebirsel işlemlerden bağımsız yeni fonksiyonlar tanımlamamızı sağlar. Bunlardan üçü analizde sürekli karşımıza çıkar.

Sezgisel olarak iki sayının "büyüğü" ve "küçüğü" apaçıktır; ancak bunların iyi tanımlı olması için üçlem yasası gerekir: iki sayıdan hangisinin büyük olduğu her zaman bellidir ve tektir.

Tanım 7.4 (Maksimum ve Minimum Fonksiyonları). **Maksimum fonksiyonu** $\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \text{ ise,} \\ y, & y > x \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla, **minimum fonksiyonu** $\min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y \text{ ise,} \\ x, & x < y \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanır. Yani $\max\{x, y\}$ iki sayının büyüğü, $\min\{x, y\}$ küçüğüdür. Sonlu çoklukta sayı için tanım tümevarımsal olarak genişletilir:

$$\max\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} = \max\{\max\{x_1, \dots, x_n\}, x_{n+1}\},$$

$$\min\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} = \min\{\min\{x_1, \dots, x_n\}, x_{n+1}\}.$$

Tanımdan hemen çıkan gözlemler: $\min\{x, y\} \leq x \leq \max\{x, y\}$, $\min\{x, y\} \leq y \leq \max\{x, y\}$, $\max\{x, y\} = \max\{y, x\}$ ve $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ (çünkü ikisi birlikte x ve y 'nin kendisidir). Bu fonksiyonların mutlak değerle ifadesi bir sonraki bölümde verilecek (Önerme 8.1).

Bir sayıyı sıfırla karşılaştırarak iki "yarım" elde ederiz:

Tanım 7.5 (Pozitif ve Negatif Kısım). $x \in \mathbb{R}$ sayısının **pozitif kısmı** ve **negatif kısmı** sırasıyla

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad \text{ve} \quad x^- = \max\{-x, 0\}$$

olarak tanımlanır.

Adlandırmaya dikkat: x^- negatif bir sayı değildir; her zaman $x^- \geq 0$ 'dır. Örneğin $x = -5$ için $x^+ = 0$ ve $x^- = 5$; $x = 3$ için $x^+ = 3$ ve $x^- = 0$.

Önerme 7.13 (Pozitif ve Negatif Kısımın Özellikleri). Her $x \in \mathbb{R}$ için

1. $x^+ \geq 0$ ve $x^- \geq 0$;
2. $x = x^+ - x^-$;
3. $x^+ \cdot x^- = 0$;
4. $x^+ + x^- = \max\{x, -x\}$.

İspat.

Üçlem yasasına göre üç durum vardır.

- $x > 0$ ise **Önerme 7.4** ile $-x < 0$; dolayısıyla $x^+ = x$ ve $x^- = 0$.
- $x = 0$ ise $-x = 0$ ve $x^+ = x^- = 0$.
- $x < 0$ ise $-x > 0$; dolayısıyla $x^+ = 0$ ve $x^- = -x$.

(1) Her durumda x^+ ve x^- ya 0'dır ya da pozitif bir sayıdır.

(2) Birinci durumda $x^+ - x^- = x - 0 = x$; ikincide $0 - (-x) = -(-x) = x$ (**Önerme 6.5**).

(3) Her durumda çarpanlardan biri 0'dır; **Önerme 6.9** ile çarpım 0.

(4) Birinci durumda $x^+ + x^- = x$ ve $-x < 0 < x$ olduğundan $\max\{x, -x\} = x$; ikincide iki yan da 0; üçüncüde $x^+ + x^- = -x$ ve $x < 0 < -x$ olduğundan $\max\{x, -x\} = -x$.

■

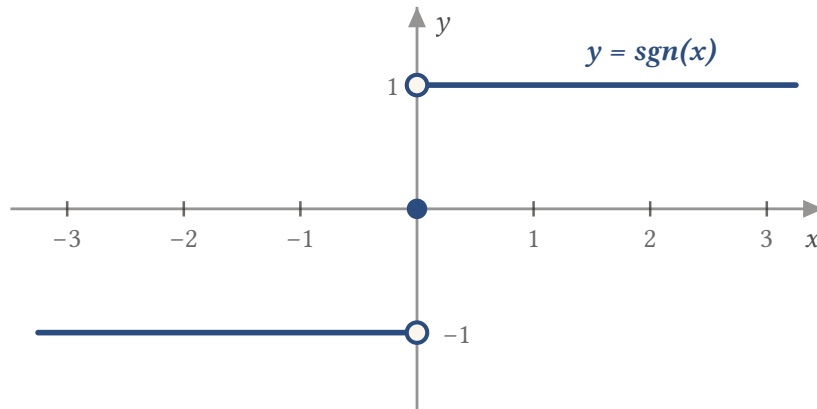
Dördüncü maddedeki $\max\{x, -x\}$ sayısı, bir sonraki bölümde tanımlayacağımız mutlak değer in ta kendisidir; yani $x^+ + x^- = |x|$ olacak. Bir sayıyı "pozitif parça eksi negatif parça" biçiminde yazma fikri integral kuramında yeniden karşımıza çıkar.

Son olarak bir sayının yalnızca işaretini kaydeden fonksiyon:

Tanım 7.6 (İşaret Fonksiyonu). İşaret fonksiyonu (signum) $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ -1, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanır.



Şekil 7.2: İşaret fonksiyonu: pozitif x 'lerde 1, negatif x 'lerde -1 , sıfırda 0. Grafik 0'da iki düzeye ayrılır; sağ limit 1, sol limit -1 olduğundan $x \rightarrow 0$ iken limit yoktur ve fonksiyon 0'da süreksizdir.

Üçlem yasası burada da tanımın iyi tanımlı olmasını sağlar: her x tam olarak bir duruma düşer. İşaret fonksiyonu görüntü kümesi $\{-1, 0, 1\}$ olan bir fonksiyondur ve $\text{sgn}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 'dır. Ayrıca $x \cdot \text{sgn}(x)$ çarpımı her zaman negatif olmayan bir sayıdır; bu çarpımın mutlak değere eşit olduğunu bir sonraki bölümde göreceğiz. İşaret fonksiyonunun çarpımla uyumu ($\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(x) \text{sgn}(y)$) alıştırmalarda ispatlanacak.

Örnek 7.4 (Maksimum, Minimum, Kısımlar ve İşaret). $x = -4$ ve $y = 7$ için $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$, x^+ , x^- , y^+ , y^- , $\text{sgn}(x)$, $\text{sgn}(xy)$ değerlerini bulunuz ve **Önerme 7.13**'in (2) ve (4) maddelerini bu sayılarda doğrulayınız.

Çözüm.

$-4 < 0 < 7$ olduğundan (O2) ile $-4 < 7$; dolayısıyla $\max\{-4, 7\} = 7$ ve $\min\{-4, 7\} = -4$.

$x = -4 < 0$ için $-x = 4 > 0$; $x^+ = \max\{-4, 0\} = 0$, $x^- = \max\{4, 0\} = 4$. $y = 7 > 0$ için $y^+ = \max\{7, 0\} = 7$, $y^- = \max\{-7, 0\} = 0$.

$\text{sgn}(x) = \text{sgn}(-4) = -1$. Çarpım $xy = (-4) \cdot 7$, işaret tablosuna göre negatiftir (negatif çarpı pozitif); o hâlde $\text{sgn}(xy) = -1$. Gerçekten $\text{sgn}(x) \text{sgn}(y) = (-1) \cdot 1 = -1$ ile uyumludur.

Doğrulama. (2): $x^+ - x^- = 0 - 4 = -4 = x$ ve $y^+ - y^- = 7 - 0 = 7 = y$. (4): $x^+ + x^- = 0 + 4 = 4 = \max\{-4, 4\}$ ve $y^+ + y^- = 7 + 0 = 7 = \max\{7, -7\}$.

■

7.6 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Sıralama Aksiyomlarıyla Türetmeler). Aşağıdakileri yalnızca aksiyomları ve bu bölümde ispatlanan sonuçları kullanarak gösteriniz. ($x, y \in \mathbb{R}$.)

- $\leq$ bağıntısı $\mathbb{R}$ üzerinde bir tam sıralamadır: yansılmalı ($x \leq x$), ters simetrik ($x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$), geçişli ($x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$) ve herhangi iki eleman karşılaştırılabilir.
- $x > 0$ ise $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 'dir; eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ iken sağlanır.
- $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için $x < y + \varepsilon$ olmasıdır.
- Her x, y için $\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$.
- $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Çözüm.

a) Yansılmalık: $x = x$ doğru olduğundan " $x < x$ veya $x = x$ " doğrudur; yani $x \leq x$.

Ters simetri: $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun ve $x \neq y$ olduğunu varsayalım. O zaman $x \leq y$ 'den $x < y$, $y \leq x$ 'ten $y < x$ çıkar. Ama (O1) gereği $x < y$ ile $y < x$ aynı anda doğru olamaz. Çelişki; demek ki $x = y$.

Geçişlilik: $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsun. Dört durum vardır: $x < y$ ve $y < z$ ise (O2) ile $x < z$; $x < y$ ve $y = z$ ise $x < z$; $x = y$ ve $y < z$ ise $x < z$; $x = y = z$ ise $x = z$. Her durumda $x \leq z$.

Karşılaştırılabilirlik: (O1) gereği $x = y$, $x < y$ ya da $y < x$; ilk ikisinde $x \leq y$, üçüncüsünde $y \leq x$. Böylece $\leq$ bir tam sıralamadır (**Tanım 4.7**).

b) $x > 0$ olsun; **Önerme 7.9** ile $\frac{1}{x} = x^{-1} > 0$. Hedef eşitsizliği $x + x^{-1} - 2 \geq 0$ biçiminde yazalım (**Önerme 7.2**'in $\leq$ sürümü). $x \neq 0$ olduğundan bu ifadeyi x^{-1} ile çarpanlarına ayırabiliriz:

$$x + x^{-1} - 2 = x^{-1} (x^2 + 1 - 2x) = x^{-1}(x - 1)^2.$$

İlk eşitlik (D) ile: $x^{-1}x^2 = x^{-1}(xx) = (x^{-1}x)x = x$, $x^{-1} \cdot 1 = x^{-1}$, $x^{-1}(2x) = 2(x^{-1}x) = 2$. İkinci eşitlik **Teorem 7.1**'nin ispatındaki $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ açılımı ($a = x$, $b = 1$). Şimdi $x^{-1} > 0$ ve **Önerme 7.12** (1) ile $(x - 1)^2 \geq 0$ 'dır. $(x - 1)^2 = 0$ ise çarpım 0; $(x - 1)^2 > 0$ ise **Önerme 7.5** (1) ile çarpım pozitif. Her durumda $x^{-1}(x - 1)^2 \geq 0$, yani $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Eşitlik: $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^{-1}(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ (**Önerme 6.13** ve $x^{-1} \neq 0$) $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

c) ($\Rightarrow$) $x \leq y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. (O3) ile $0 < \varepsilon$ eşitsizliğine y ekleyelim: $y < y + \varepsilon$. $x \leq y$ ve $y < y + \varepsilon$ olduğundan ($x = y$ ise doğrudan, $x < y$ ise (O2) ile) $x < y + \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Her $\varepsilon > 0$ için $x < y + \varepsilon$ olsun ve $x \leq y$ olmadığını varsayalım; (O1) gereği $y < x$ 'tir. **Önerme 7.2** ile $0 < x - y$. $\varepsilon = x - y$ seçelim; bu pozitif bir sayıdır, dolayısıyla varsayımımız $x < y + (x - y)$ verir. Ama (A1), (A2), (A4), (A3) ile sağ yan sadeleşir:

$$y + (x - y) = y + (x + (-y)) = x + (y + (-y)) = x + 0 = x$$

Yani $x < x$; bu (O1) ile çelişir. O hâlde $x \leq y$.

Bu şık, analizde çok kullanılan bir ilkeyi verir: “ $x \leq y$ ” olduğunu göstermek için “ $x < y + \varepsilon$ ” eşitsizliğini her $\varepsilon > 0$ için göstermek yeter. Özel olarak $0 \leq x$ ve her $\varepsilon > 0$ için $x < \varepsilon$ ise $x = 0$ ’dır. d) Üçlem yasasına göre x ve y ’nin işaretlerine göre durumları inceleyelim.

- $x = 0$ veya $y = 0$ ise $xy = 0$ (Önerme 6.9); iki yan da 0’dır (sağ yanda çarpanlardan biri $\text{sgn}(0) = 0$).
- $x > 0, y > 0$ ise $xy > 0$ (Önerme 7.5 (1)); sol yan 1, sağ yan $1 \cdot 1 = 1$.
- $x > 0, y < 0$ ise $xy < 0$ (Önerme 7.5 (2)); sol yan -1 , sağ yan $1 \cdot (-1) = -1$ ((M1), (M3)). $x < 0, y > 0$ durumu (M1) ile aynıdır.
- $x < 0, y < 0$ ise $xy > 0$ (Sonuç 7.1); sol yan 1, sağ yan $(-1)(-1) = 1$ (Sonuç 6.2).

Her durumda eşitlik sağlanır.

e) Bölüm 6 alıştırmasının (e) şıkkı (Alıştırma 6.1) ile $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ’dir. Önerme 7.2 ile

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) < 0.$$

Örnek 7.2’ndeki akıl yürütmeye bir çarpım negatiftir ancak ve ancak çarpanlar zıt işaretliyse:

- $x - 1 < 0$ ve $x + 1 > 0$: yani $x < 1$ ve $x > -1$; birlikte $-1 < x < 1$.
- $x - 1 > 0$ ve $x + 1 < 0$: yani $x > 1$ ve $x < -1$; (O2) ile $1 < -1$ gerekir, oysa $-1 < 0 < 1$ (Önerme 7.7). (O1) ile bu durum olanaksızdır.

O hâlde $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Zincirdeki her adım iki yönlü olduğundan ters yönü ayrıca göstermeye gerek yoktur; nitekim $-1 < x < 1$ ise $x + 1 > 0$ ve $x - 1 < 0$ olur, çarpım negatiftir. Not: $x^2 < 1$ ’den yalnızca $x < 1$ sonucunu çıkarmak eksik olurdu; Önerme 7.12’nden sonraki uyarıyı hatırlayınız.

■

Sıralama aksiyomları sayı doğrusunu kurdu: sayıları karşılaştırabiliyor, aralıklardan söz edebiliyor ve eşitsizlik çözebiliyoruz. Sıradaki bölümde bu bölümde tanımladığımız $\max\{x, -x\}$ sayısını, yani bir sayının sıfıra uzaklığını inceleyeceğiz: **Mutlak Değer**.

8. Mutlak Değer

Önceki bölümde sıralama aksiyomlarını ve onlardan türeyen max, min ve işaret fonksiyonlarını tanıdık. Bu bölümde sıralamanın en çok kullanılan ürününü inceliyoruz: **mutlak değer**. Analizin neredeyse her tanımı – dizinin limiti, fonksiyonun limiti, süreklilik – “iki sayı birbirine yakın” cümlesine dayanır ve bu yakınlık $|x - y|$ ile ölçülür. Dolayısıyla mutlak değer özelliklerini, özellikle **üçgen eşitsizliğini** iyi bilmek, ileride yazacağımız her ε 'lu ispatın ön koşuludur.

Bu bölümde yalnızca Bölüm 6.2 ve Bölüm 7.1 altındaki aksiyomlar ile onlardan çıkardığımız sonuçları kullanacağız; doğal sayılar ve tamlık henüz devreye girmeyecek.

8.1 Mutlak Değer ve Uzaklık

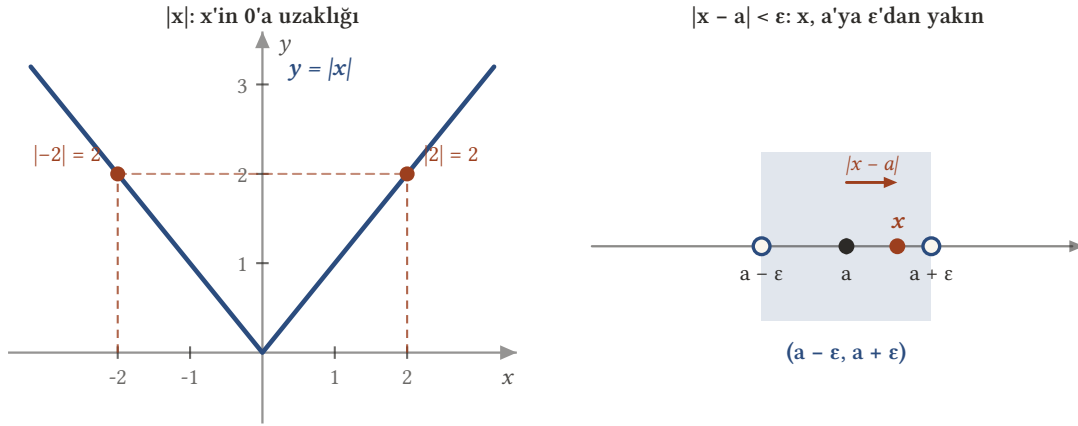
Sayı doğrusunda 3 ile -3 farklı noktalar, ama ikisinin de 0'a uzaklığı aynıdır: 3 birim. “İşaretini unutup büyüklüğüne bakma” işlemi, her reel sayıya negatif olmayan bir sayı eşleyen bir fonksiyondur.

Tanım 8.1 (Mutlak Değer). $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlanır. $|x|$ sayısına x 'in **mutlak değeri** (absolute value) denir.

Geometrik olarak $|x|$, sayı doğrusunda x noktasının başlangıç noktası 0'a **uzaklığıdır**. Aynı şekilde $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x - y|$, x ile y noktaları arasındaki uzaklıktır: $x \geq y$ ise bu uzaklık $x - y$, $x < y$ ise $y - x = -(x - y)$ 'dir; her iki hâlde de $|x - y|$ 'ye eşittir. Bu yorum bölüm boyunca eşitsizlikleri “okumamızı” sağlayacak: örneğin $|x - a| < \varepsilon$ eşitsizliği, “ x 'in a 'ya uzaklığı ε 'dan küçük” demektir.



Şekil 8.1: Solda $y = |x|$ grafiği: -2 ile 2 aynı değeri alır, çünkü ikisi de 0'a 2 uzaklıktadır. Sağda $|x - a| < \varepsilon$ eşitsizliği: x 'in a 'ya uzaklığı ε 'den küçüktür, yani x açık $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığındadır.

Birkaç değer: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$, $|3 - 7| = |-4| = 4$. Tanımdan hemen görülen iki eşitsizlik vardır: her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \leq |x| \quad \text{ve} \quad -x \leq |x|.$$

Gerçekten $x \geq 0$ ise $|x| = x$ olduğundan ilki eşitlik, ikincisi $-x \leq 0 \leq x$ nedeniyle doğrudur; $x < 0$ ise $|x| = -x$ olduğundan ikincisi eşitlik, ilki $x < 0 < -x$ nedeniyle doğrudur. Bu iki eşitsizliği aşağıda [Teorem 8.1](#) içinde tekrar göreceğiz.

8.2 Mutlak Değer, Maksimum ve Minimum

Tanım 7.4 ile tanımlanan $\max$ ve $\min$ fonksiyonları, mutlak değerle tek bir formülde yazılabilir. Sezgi şudur: iki sayının ortalaması $\frac{x+y}{2}$, ikisinin tam ortasıdır; aralarındaki uzaklığın yarısı $\frac{|x-y|}{2}$ kadar sağa gidince büyüğüne, sola gidince küçüğüne ulaşırız.

Önerme 8.1 (Maksimum ve Minimumun Mutlak Değerle İfadesi). Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \quad \text{ve} \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|).$$

İspat.

Üçlem yasası (O1) gereği $x = y$, $x > y$ ya da $x < y$ durumlarından tam olarak biri geçerlidir.

Durum $x = y$. $|x - y| = 0$ olduğundan sağ taraflar $\frac{1}{2}(x + x) = x$ olur; sol taraflar da $\max\{x, x\} = \min\{x, x\} = x$ 'tir.

Durum $x > y$. $x - y > 0$ olduğundan $|x - y| = x - y$ 'dir. Böylece

$$\frac{1}{2} (x + y + (x - y)) = \frac{1}{2}(2x) = x = \max\{x, y\}, \quad \frac{1}{2} (x + y - (x - y)) = \frac{1}{2}(2y) = y = \min\{x, y\}.$$

Durum $x < y$. $x - y < 0$ olduğundan $|x - y| = -(x - y) = y - x$ 'tir. Böylece

$$\frac{1}{2} (x + y + (y - x)) = y = \max\{x, y\}, \quad \frac{1}{2} (x + y - (y - x)) = x = \min\{x, y\}.$$

Her durumda iki eşitlik de sağlanır.

■

İki formülü toplayıp çıkarırsak $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ ve $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$ elde ederiz: iki sayının toplamı ve aralarındaki uzaklık, büyüğü ile küçüğü belirler. $y = 0$ alınca pozitif ve negatif kısımlar için de formül çıkar.

Sonuç 8.1 (Pozitif ve Negatif Kısım). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{1}{2} (x + |x|), \quad \min\{x, 0\} = \frac{1}{2} (x - |x|), \quad x^- = \max\{-x, 0\} = \frac{1}{2} (|x| - x).$$

Dolayısıyla $x = x^+ - x^-$ ve $|x| = x^+ + x^-$ 'dir.

İspat.

Önerme 8.1 içinde $y = 0$ alalım: $|x - 0| = |x|$ olduğundan ilk iki formül doğrudan çıkar. Üçüncüsü için önceki bölümde ispatladığımız $x = x^+ - x^-$ eşitliğini ([Önerme 7.13 \(2\)](#)) kullanalım:

$$x^- = x^+ - x = \frac{1}{2} (x + |x|) - x = \frac{1}{2} (|x| - x).$$

Böylece $x = x^+ - x^-$ zaten elimizde; ayrıca

$$x^+ + x^- = \frac{1}{2}(x + |x|) + \frac{1}{2}(|x| - x) = |x|.$$

■

Mutlak değer, [Tanım 7.6](#) ile tanımlanan sgn fonksiyonuyla da bağlantılıdır: işaret, büyüklükle çarpılınca sayının kendisini verir.

Önerme 8.2 (Mutlak Değer ve İşaret Fonksiyonu). Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$ ve $x = |x| \cdot \text{sgn}(x)$ 'tir.

İspat.

$x > 0$ ise $\text{sgn}(x) = 1$ ve $|x| = x = x \cdot 1$; $x = 0$ ise her iki taraf 0; $x < 0$ ise $\text{sgn}(x) = -1$ ve **Önerme 6.11** gereği $x \cdot (-1) = -x = |x|$. İkinci eşitlik için $x > 0$ ve $x = 0$ durumları aynıdır; $x < 0$ ise $|x| \cdot (-1) = -|x| = -(-x) = x$.

■

8.3 Mutlak Değerin Temel Özellikleri

Aşağıdaki teorem, mutlak değerle yapılan hemen her hesabın dayanağıdır. Özellikle (7) ve (8), mutlak değerli bir eşitsizliği mutlak değersiz eşitsizliklere çevirir; bu bölümün sonundaki örneklerde bunları sürekli kullanacağız.

Teorem 8.1 (Mutlak Değerin Temel Özellikleri). $x, y, a \in \mathbb{R}$ ve $a \geq 0$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir.

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ veya $x = -a$. Özel olarak $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $-|x| \leq x \leq |x|$.
5. $|xy| = |x| |y|$.
6. $y \neq 0$ için $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
7. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
8. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ veya $x \leq -a$.

İspat.

Özellik (1). $x \geq 0$ ise $|x| = x \geq 0$. $x < 0$ ise **Önerme 7.4** ile $-x > 0$, yani $|x| = -x > 0$. Her iki durumda da $|x| \geq 0$.

Özellik (2). $(\Rightarrow)$ $|x| = a$ olsun. $x \geq 0$ ise $x = |x| = a$. $x < 0$ ise $-x = |x| = a$, yani $x = -a$. $(\Leftarrow)$ $x = a$ ise $x \geq 0$ olduğundan $|x| = x = a$. $x = -a$ ise iki alt durum vardır: $a > 0$ iken $x = -a < 0$ olduğundan $|x| = -x = a$; $a = 0$ iken $x = 0$ ve $|x| = 0 = a$. Özel durum, $a = 0$ alınıp $-0 = 0$ kullanılarak elde edilir.

Özellik (3). $x > 0$ ise $-x < 0$; dolayısıyla $|-x| = -(-x) = x = |x|$. $x = 0$ ise $|-0| = |0|$. $x < 0$ ise $-x > 0$; dolayısıyla $|-x| = -x = |x|$.

Özellik (4). Bölümün başında $x \leq |x|$ ve $-x \leq |x|$ olduğunu gördük. İkincisinin her iki tarafını -1 ile çarpmak eşitsizliğin yönünü çevirir (**Önerme 7.6**; eşitlik hâlinde iki yan zaten eşit kalır) ve $-|x| \leq x$ verir.

Özellik (5). x ya da y sıfırsa **Önerme 6.9** gereği $xy = 0$ ve iki taraf da 0'dır. Geriye dört işaret durumu kalır.

- $x > 0, y > 0$: (O4) ile $0 = 0 \cdot y < xy$, yani $xy > 0$. Böylece $|xy| = xy = |x| |y|$.
- $x > 0, y < 0$: $-y > 0$ olduğundan **Önerme 7.5** (1) ile $x(-y) > 0$ 'dır. **Önerme 6.12** (1) ile $x(-y) = -(xy)$; dolayısıyla $-(xy) > 0$, yani **Önerme 7.4** ile $xy < 0$. O hâlde $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x| |y|$.
- $x < 0, y > 0$: bir önceki durumda x ile y 'nin rolleri değişir; (M1) ile aynı sonuç çıkar.
- $x < 0, y < 0$: **Sonuç 7.1** ile $xy > 0$; **Önerme 6.12** (2) ile $(-x)(-y) = xy$. Böylece $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x| |y|$.

Özellik (6). $y \neq 0$ olduğundan (2) ile $|y| \neq 0$ 'dır; dolayısıyla $|y|^{-1}$ vardır. $x = y \cdot \frac{x}{y}$ eşitliğine (5)'i uygularsak

$$|x| = \left| y \cdot \frac{x}{y} \right| = |y| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|$$

olur. Her iki tarafı $|y|^{-1}$ ile çarpınca $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ elde edilir.

Özellik (7). $(\Rightarrow)$ $|x| \leq a$ olsun. $x \geq 0$ ise $|x| = x$; dolayısıyla $0 \leq x \leq a$ ve $-a \leq 0$ olduğundan $-a \leq x \leq a$. $x < 0$ ise $|x| = -x$; dolayısıyla $-x \leq a$, yani $-a \leq x$; ayrıca $x < 0 \leq a$. Yine $-a \leq x \leq a$. $(\Leftarrow)$ $-a \leq x \leq a$ olsun. $x \geq 0$ ise $|x| = x \leq a$. $x < 0$ ise $|x| = -x$ ve $-a \leq x$ eşitsizliğini -1 ile çarpınca $-x \leq a$, yani $|x| \leq a$.

Özellik (8). $(\Rightarrow) |x| \geq a$ olsun. $x \geq 0$ ise $x = |x| \geq a$. $x < 0$ ise $-x = |x| \geq a$, yani $x \leq -a$. $(\Leftarrow)$ $x \geq a$ ise $a \geq 0$ olduğundan $x \geq 0$ ve $|x| = x \geq a$. $x \leq -a$ ise $-a \leq 0$ olduğundan $x \leq 0$; $x = 0$ ise $-a \geq 0$ ile birlikte $a = 0 = |x|$, $x < 0$ ise $|x| = -x \geq a$.

■

Özellik (7) ve (8)'in **kesin eşitsizlikli** biçimleri de aynı yolla elde edilir; ε 'lu tanımlarda hep bu biçimleri kullanacağız.

Önerme 8.3 (Kesin Eşitsizlikli Biçimler). $x \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olsun.

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.
2. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ veya $x < -a$.

İspat.

Madde (1). $(\Rightarrow) |x| < a$ olsun. $x \geq 0$ ise $-a < 0 \leq x = |x| < a$. $x < 0$ ise $-x = |x| < a$, yani $-a < x$; ayrıca $x < 0 < a$. $(\Leftarrow)$ $-a < x < a$ olsun. $x \geq 0$ ise $|x| = x < a$; $x < 0$ ise $-a < x$ 'ten $|x| = -x < a$.

Madde (2). $(\Rightarrow) |x| > a$ olsun. $x \geq 0$ ise $x = |x| > a$; $x < 0$ ise $-x = |x| > a$, yani $x < -a$. $(\Leftarrow)$ $x > a > 0$ ise $|x| = x > a$; $x < -a < 0$ ise $|x| = -x > a$.

■

💡 Mutlak değeri kaldırma kuralı

Özellik (7) ve **Önerme 8.3** (1) şunu söyler: “ $|x|$ küçük” demek “ x , $-a$ ile a arasında” demektir; Özellik (8) ve **Önerme 8.3** (2) ise “ $|x|$ büyük” demenin “ x ya çok sağda ya çok solda” anlamına geldiğini söyler. Mutlak değerli bir eşitsizlikle karşılaşınca ilk iş, bu kurallardan biriyle mutlak değeri kaldırmaktır.

Sonuç 8.2 (Karenin Mutlak Değeri). Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

İspat.

Özellik (5) ile $|x^2| = |x \cdot x| = |x| |x| = |x|^2$. Öte yandan **Önerme 7.12** (1) gereği $x^2 \geq 0$ olduğundan tanımdan $|x^2| = x^2$ 'dir.

■

8.4 Üçgen Eşitsizliği

Düzlemde bir üçgenin bir kenarı, diğer iki kenarın toplamından uzun olamaz. Sayı doğrusunda bunun karşılığı şudur: 0'dan $x + y$ 'ye “doğrudan” gitmek, önce x kadar sonra y kadar gitmekten uzun olamaz. Bu basit gözlem, analizin en çok kullanılan eşitsizliğidir.

Teorem 8.2 (Üçgen Eşitsizliği). Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

İspat.

Teorem 8.1 (4) ile

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{ve} \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir (**Önerme 7.1**; her iki eşitsizlik de eşitlik hâlindeyse toplam da eşitlik); toplayınca

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

elde ederiz. $a = |x| + |y| \geq 0$ olduğundan **Teorem 8.1** (7) uygulanabilir ve $|x + y| \leq |x| + |y|$ bulunur.

■

Üçgen eşitsizliği ne işe yarar? Bir toplamın büyüklüğünü, toplananların büyüklükleriyle **sınırlamaya** yarar. Analizde tipik kullanımı şudur: x 'in a 'ya, a 'nın b 'ye yakın olduğunu biliyorsak, x 'in b 'ye yakın olduğunu göstermek için $|x - b| = |(x - a) + (a - b)| \leq |x - a| + |a - b|$ yazarız. Aşağıdaki sonuçların hepsi bu tek fikrin çeşitlemeleridir.

Sonuç 8.3 (Ters Üçgen Eşitsizliği). Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

İspat.

$x = (x - y) + y$ yazıp üçgen eşitsizliğini uygulayalım:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|. \quad (1)$$

Aynı şeyi $y = (y - x) + x$ için yapalım; **Teorem 8.1 (3)** ile $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$ olduğundan

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |x - y| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|. \quad (2)$$

(2) eşitsizliği $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$, yani $-|x - y| \leq |x| - |y|$ demektir. (1) ile birlikte

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

elde ederiz; $a = |x - y| \geq 0$ ile **Teorem 8.1 (7)** istenen eşitsizliği verir.

■

Ters üçgen eşitsizliği, iki sayı birbirine yakınsa mutlak değerlerinin de birbirine yakın olduğunu söyler; ileride " $|a_n| \rightarrow |a|$ " türünden sonuçlar tam olarak buradan çıkacaktır.

Sonuç 8.4 (Üçgen Eşitsizliğinin Sonuçları). Her $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $|x - y| \leq |x| + |y|$.
2. $||x| - |y|| \leq |x + y|$.
3. $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.

İspat.

Madde (1). $x - y = x + (-y)$ yazıp üçgen eşitsizliğini ve (3) numaralı özelliği kullanalım: $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

Madde (2). **Sonuç 8.3** içinde y yerine $-y$ yazalım: $||x| - |-y|| \leq |x - (-y)| = |x - y|$ ve $x - (-y) = x + y$ olduğundan istenen çıkar.

Madde (3). $a - b = (a - c) + (c - b)$ yazalım ve üçgen eşitsizliğini $x = a - c$, $y = c - b$ için uygulayalım.

■

Madde (3), "üçgen eşitsizliği" adını en açık biçimde hak eden ifadedir: a 'dan b 'ye uzaklık, c üzerinden gitmekle kalmaz. Uzaklık fonksiyonu $d(a, b) = |a - b|$ için bu, metrik uzaylar kuramının temel aksi-yomu olacaktır.

i Sonlu toplamlar için üçgen eşitsizliği

Üçgen eşitsizliği ikiden çok sayı için de geçerlidir: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ için

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Bunun ispatı n üzerinden **tümevarım** gerektirir; tümevarım ilkesini bir sonraki bölümde kurduktan sonra bu eşitsizliği **Teorem 9.7** olarak ispatlayacağız.

Üçgen eşitsizliğinde eşitlik ne zaman olur? Sezgisel yanıt: x ile y aynı yöne bakıyorsa, yani aynı işaretliyse.

Önerme 8.4 (Üçgen Eşitsizliğinde Eşitlik Hâli). $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $|a + b| = |a| + |b|$ olması için gerek ve yeter koşul $ab \geq 0$ olmasıdır.

İspat.

$(\Rightarrow)$ $|a + b| = |a| + |b|$ olsun. Eşit iki sayının kareleri de eşittir; **Sonuç 8.2** ($|a + b|^2 = (a + b)^2$, $|a|^2 = a^2$, $|b|^2 = b^2$) ve **Teorem 8.1 (5)** ile

$$(a + b)^2 = |a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2.$$

Sol taraf $a^2 + 2ab + b^2$ olduğundan sadeleştirmeyle (**Önerme 6.3**) $2ab = 2|ab|$, yani $ab = |ab|$ bulunur. $|ab| \geq 0$ olduğundan $ab \geq 0$ 'dır.

$(\Leftarrow)$ $ab \geq 0$ olsun. $a = 0$ ya da $b = 0$ ise iki taraf da açıkça eşittir. Aksi hâlde **Önerme 6.13** gereği $ab \neq 0$, dolayısıyla $ab > 0$ 'dır; bu ancak a ile b aynı işaretliyse olur (zıt işaretli olsalardı **Önerme 7.5 (2)** ile çarpım negatif olurdu). $a > 0$ ve $b > 0$ ise $a + b > 0$ ve $|a + b| = a + b = |a| + |b|$. $a < 0$ ve $b < 0$ ise $a + b < 0$ ve

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|.$$

■

Önerme 8.5 (Yakın Sayılar Aynı İşaretlidir). $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x - y| < |x|$ ise $xy > 0$ 'dır.

İspat.

Karşıt tersini gösterelim: $xy \leq 0$ ise $|x - y| \geq |x|$ olduğunu görelim. **Önerme 6.12 (1)** ile $x(-y) = -(xy)$ 'dir. $xy < 0$ hâlinde **Önerme 7.4** ile $-(xy) > 0$; $xy = 0$ hâlinde ise **Önerme 6.4** ile $-(xy) = -0 = 0$ 'dır. Her iki hâlde de $x(-y) \geq 0$ 'dır. **Önerme 8.4** ile ($a = x, b = -y$)

$$|x - y| = |x + (-y)| = |x| + |-y| = |x| + |y| \geq |x|$$

elde edilir; son adımda $|y| \geq 0$ kullanıldı. Karşıt tersi doğru olduğundan önerme de doğrudur: $|x - y| < |x|$ ise $xy > 0$ 'dır.

■

Önermenin anlamı şudur: y noktası x 'e, x 'in 0'a olduğundan daha yakınsa, y ile x sıfırın aynı tarafındadır. Özel olarak $y = 0$ olamaz. Bu gözlem, ileride "limiti sıfırdan farklı olan dizinin terimleri bir yerden sonra limitle aynı işaretlidir" sonucunun çekirdeğidir.

Üçgen eşitsizliğinin analizdeki asıl kullanımını bir örnekle görelim: bir ifadeyi, bildiğimiz küçük bir büyüklük cinsinden sınırlamak.

Örnek 8.1 (Üçgen Eşitsizliğiyle Sınırlama). $|x - 2| < 1$ ise $|x^2 - 4| < 5$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çarpanlara ayırıp **Teorem 8.1 (5)**'i kullanalım:

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2| |x + 2|.$$

İlk çarpan varsayımın 1'den küçüktür. İkinci çarpanı, bilinen küçük büyüklük $|x - 2|$ cinsinden sınırlayalım: $x + 2 = (x - 2) + 4$ yazıp üçgen eşitsizliğini uygularsak

$$|x + 2| = |(x - 2) + 4| \leq |x - 2| + |4| < 1 + 4 = 5.$$

Şimdi iki eşitsizliği çarpalım; çarpanlar negatif olmadığından bunu iki adımda (O4) ile yapabiliriz. Önce $|x + 2| < 5$ eşitsizliğini $|x - 2| \geq 0$ ile çarpalım ($|x - 2| = 0$ ise iki yan da 0 olur): $|x - 2| |x + 2| \leq 5 |x - 2|$. Sonra $|x - 2| < 1$ eşitsizliğini pozitif 5 ile çarpalım: $5 |x - 2| < 5$. (O2) ile

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| \leq 5 |x - 2| < 5 \cdot 1 = 5.$$

■

Bu tür “önce çarpanlara ayır, sonra bilinmeyen çarpanı üçgen eşitsizliğiyle sınırla” adımı, limit ispatlarında δ seçerken tekrar tekrar karşımıza çıkacaktır.

8.5 Mutlak Değer ve ε -Komşuluğu

$|a - b| < \varepsilon$ eşitsizliği, analizin ana cümlesidir: “ a ile b arasındaki uzaklık ε ’dan küçük”. Aynı cümleyi mutlak değersiz yazmanın birkaç yolu vardır; hepsinin denk olduğunu bilmek, ispatlarda istediğimiz biçime serbestçe geçmemizi sağlar.

Önerme 8.6 (Epsilon Komşuluğunun Denk İfadeleri). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. $|a - b| < \varepsilon$.
2. $-\varepsilon < a - b < \varepsilon$.
3. $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$.
4. $a - \varepsilon < b < a + \varepsilon$.

İspat.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). **Önerme 8.3** (1)’i $x = a - b$ için uygulamak yeterlidir: $|a - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a - b < \varepsilon$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). $-\varepsilon < a - b < \varepsilon$ eşitsizliğinin her üç parçasına (O3) ile b eklersek $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$ olur. Tersine, (3)’ün her parçasına $-b$ eklersek (2) geri gelir.

(2) $\Leftrightarrow$ (4). $-\varepsilon < a - b < \varepsilon$ eşitsizliğini -1 ile çarpalım; **Önerme 7.6** gereği eşitsizlikler yön değiştirir: $\varepsilon > b - a > -\varepsilon$, yani $-\varepsilon < b - a < \varepsilon$. Şimdi her parçaya a ekleyelim: $a - \varepsilon < b < a + \varepsilon$. Adımların her biri tersinir olduğundan (4)’ten (2)’ye de dönülür.

Böylece (1) $\Leftrightarrow$ (2), (2) $\Leftrightarrow$ (3) ve (2) $\Leftrightarrow$ (4); dolayısıyla dördü de birbirine denktir.

■

Geometrik olarak (3), “ a noktası b merkezli, ε yarıçaplı $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ açık aralığındadır” der; (4) ise aynı şeyi a merkezli aralık için söyler. Bu aralığa ileride b ’nin ε -komşuluğu diyeceğiz (**Komşuluklar ve Açık Kümeler**). Örneğin $|x - 3| < 0,5$ eşitsizliği tam olarak $2,5 < x < 3,5$, yani $x \in (2,5; 3,5)$ demektir.

💡 Analizde neden bu biçim?

Dizinin limiti tanımı “her $\varepsilon > 0$ için, bir yerden sonra $|a_n - a| < \varepsilon$ ” biçiminde olacak. **Önerme 8.6** sayesinde bunu istediğimizde “ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ ” ya da “ $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ” diye okuyabileceğiz. Aynı denkleğin $\leq$ ile yazılmış biçimi de **Teorem 8.1** (7) ile aynı şekilde çıkar.

8.6 Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Şimdi öğrendiklerimizi eşitsizlik çözmede kullanalım. Yöntem hep aynıdır: (7)–(8) ya da **Önerme 8.3** ile mutlak değeri kaldır, kalan doğrusal eşitsizlikleri sıralama aksiyomlarıyla çöz, sonucu sayı doğrusunda yorumla.

Örnek 8.2 (Halka Biçimli Çözüm Kümesi). $3 \leq |x - 2| \leq 7$ eşitsizliğini sağlayan bütün reel sayıları bulunuz.

Çözüm.

Eşitsizlik iki koşulun birlikte sağlanmasıdır: $|x - 2| \leq 7$ ve $|x - 2| \geq 3$.

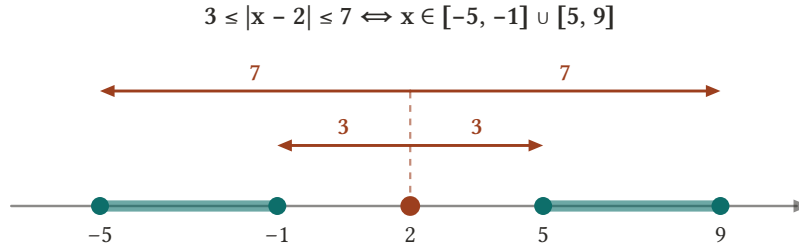
Birinci koşul. **Teorem 8.1** (7) ile $|x - 2| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq x - 2 \leq 7$. Her parçaya 2 ekleyince $-5 \leq x \leq 9$, yani $x \in [-5, 9]$.

İkinci koşul. **Teorem 8.1** (8) ile $|x - 2| \geq 3 \Leftrightarrow x - 2 \geq 3$ veya $x - 2 \leq -3$, yani $x \geq 5$ veya $x \leq -1$. Bu, $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ demektir.

Kesişim. İki koşulun kesişimi

$$[-5, 9] \cap ((-\infty, -1] \cup [5, \infty)) = [-5, -1] \cup [5, 9]$$

olur. Uzaklık diliyle: 2’ye uzaklığı en az 3, en çok 7 olan noktalar, 2’nin solunda $[-5, -1]$ ve sağında $[5, 9]$ parçalarını oluşturur.



Şekil 8.2: 2 merkezine uzaklığı en az 3 ve en çok 7 olan noktalar: 2'nin solunda $[-5, -1]$, sağında $[5, 9]$. Aradaki $(-1, 5)$ parçası 2'ye 3'ten yakındır, dıştaki noktalar 7'den uzaktır; ikisi de çözüm değildir.

■

Örnek 8.3 (Doğrusal İfadenin Mutlak Değeri). $|2x - 1| < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz ve sonucu bir ε -komşuluğu olarak yorumlayınız.

Çözüm.

Önerme 8.3 (1) ile

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Son adımda her parça pozitif sayı $\frac{1}{2}$ ile çarpıldı (O4). Çözüm kümesi $(-1, 2)$ açık aralıktır.

Aynı eşitsizliği ε -komşuluğu olarak okuyalım. Teorem 8.1 (5) ile $|2x - 1| = |2| \left| x - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$; dolayısıyla

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2}.$$

Önerme 8.6 ile bu, “ x , merkezi $\frac{1}{2}$ ve yarıçapı $\frac{3}{2}$ olan aralıkta” demektir: $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}) = (-1, 2)$. İki yol aynı sonucu verir.

■

Birden çok mutlak değer içeren ifadelerde her mutlak değerın işaret değiştirdiği noktalar sayı doğrusunu parçalara böler; her parçada mutlak değerler tanımla açılır.

Örnek 8.4 (İki Mutlak Değerin Toplamı). $|x| + |x - 1| \leq 3$ eşitsizliğini çözünüz.

Çözüm.

$|x|$ ifadesi $x = 0$ 'da, $|x - 1|$ ifadesi $x = 1$ 'de işaret değiştirir. Sayı doğrusunu $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$ ve $[1, \infty)$ parçalarına ayıralım.

Durum $x < 0$. $|x| = -x$ ve $x - 1 < 0$ olduğundan $|x - 1| = 1 - x$. Eşitsizlik $-x + 1 - x \leq 3$, yani $-2x \leq 2$ olur; $-\frac{1}{2}$ ile çarpınca (yön değişir) $x \geq -1$. Bu durumdaki çözümler $[-1, 0)$.

Durum $0 \leq x < 1$. $|x| = x$ ve $|x - 1| = 1 - x$; toplam $x + 1 - x = 1 \leq 3$ her zaman doğrudur. Bu durumdaki çözümler $[0, 1)$.

Durum $x \geq 1$. $|x| = x$ ve $|x - 1| = x - 1$; eşitsizlik $2x - 1 \leq 3$, yani $x \leq 2$. Bu durumdaki çözümler $[1, 2]$.

Üç parçanın birleşimi $[-1, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 2] = [-1, 2]$ kapalı aralıktır. Uzaklık yorumu: x 'in 0'a ve 1'e uzaklıklarının toplamı en çok 3 olmalıdır; $[0, 1]$ içinde bu toplam sabit 1'dir, dışına çıktıkça her iki uzaklık da büyür ve toplam $x = -1$ ile $x = 2$ 'de 3'e ulaşır.

■

8.7 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Mutlak Değer Alıştırmaları).

- a) $|x + 3| = 2x$ denklemini çözünüz.
- b) $|x - 1| < |x + 1|$ eşitsizliğini çözünüz ve sonucu uzaklık diliyle yorumlayınız.
- c) $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ olsun. $|x - a| < \varepsilon$ ve $|y - a| < \varepsilon$ ise $|x - y| < 2\varepsilon$ olduğunu gösteriniz.
- d) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ denkleminin bütün reel çözümlerini bulunuz.
- e) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Sol taraf [Teorem 8.1](#) (1) gereği negatif değildir; o hâlde bir çözüm varsa $2x \geq 0$, yani $x \geq 0$ olmalıdır. $a = 2x \geq 0$ ile (2) numaralı özellik, $|x + 3| = 2x$ denkleminin $x + 3 = 2x$ veya $x + 3 = -2x$ olmasına denk olduğunu söyler. Birincisi $x = 3$, ikincisi $x = -1$ verir. $x = -1$ için $2x = -2 < 0$ olduğundan bu değer atılır. $x = 3$ sağlamasını yapalım: $|3 + 3| = 6 = 2 \cdot 3$. Çözüm kümesi $\{3\}$ 'tür.

b) Önce yardımcı bir gözlem: $u, v \geq 0$ için $u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2$. ($\Rightarrow$) $u = 0$ ise $v > 0$ ve [Önerme 7.12](#) (1) ile birlikte $v^2 > 0 = u^2$; $u > 0$ ise [Önerme 7.12](#) (4) doğrudan uygulanır. ($\Leftarrow$) Karşıt tersi: $u \geq v \geq 0$ ise ya $u = v$ ve $u^2 = v^2$, ya da $0 \leq v < u$ ve az önceki yönle $v^2 \leq u^2$; her hâlde $u^2 \geq v^2$.
 $u = |x - 1|$, $v = |x + 1|$ alalım ve [Sonuç 8.2](#) ile $|t|^2 = t^2$ kullanalım:

$$|x - 1| < |x + 1| \Leftrightarrow (x - 1)^2 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 0 < 4x \Leftrightarrow x > 0.$$

Çözüm kümesi $(0, \infty)$ 'dur. Yorum: x 'in 1'e uzaklığı -1 'e uzaklığından küçükse x , 1 ile -1 'in orta noktası olan 0'in sağındadır.

c) $x - y = (x - a) - (y - a)$ yazalım. [Sonuç 8.4](#) (1) ile

$$|x - y| = |(x - a) - (y - a)| \leq |x - a| + |y - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Son adımda iki kesin eşitsizlik taraf tarafa toplandı. Yorum: a 'nın ε -komşuluğundaki iki nokta birbirine 2ε 'dan yakındır.

d) [Sonuç 8.2](#) ile $x^2 = |x|^2$; $t = |x|$ dersek $t \geq 0$ ve denklem $t^2 - 5t + 6 = 0$ olur. Çarpanlara ayırılalım: $(t - 2)(t - 3) = 0$. [Önerme 6.13](#) gereği $t = 2$ veya $t = 3$; her ikisi de $t \geq 0$ koşuluna uyar. [Teorem 8.1](#) (2) ile $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ve $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Çözüm kümesi $\{-3, -2, 2, 3\}$ 'tür. Sağlama: $x = \pm 2$ için $4 - 10 + 6 = 0$, $x = \pm 3$ için $9 - 15 + 6 = 0$.

e) x ve y 'yi $x + y$ ile $x - y$ cinsinden yazalım: $2x = (x + y) + (x - y)$ ve $2y = (x + y) - (x - y)$. [Teorem 8.2](#) ve [Sonuç 8.4](#) (1) ile

$$2|x| = |(x + y) + (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|, \quad 2|y| = |(x + y) - (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Burada $|2x| = 2|x|$ eşitliği (5) numaralı özellikten gelir. İki eşitsizliği toplayıp pozitif sayı $\frac{1}{2}$ ile çarparsak $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$ elde edilir.

■

Mutlak değer, “yakınlık” kavramını sayılara indirgeyen araçtır; üçgen eşitsizliği ise bu yakınlığın parçalar üzerinden taşınmasını sağlar. Sonlu toplamlar için genel üçgen eşitsizliğini ve daha pek çok “her n için” ifadesini ispatlayabilmek için artık doğal sayıları aksiyomlardan kurmamız ve tümevarım ilkesini elde etmemiz gerekiyor: [Doğal Sayılar ve Tümevarım](#).

9. Doğal Sayılar ve Tümevarım

Şimdiye kadar reel sayıların cebirsel ve sıralama aksiyomlarını kullandık; 0 ve 1 sayıları aksiyomlarla verildi, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ gibi sayıları da elde edebiliyoruz. Ama “doğal sayılar” dediğimiz $1, 2, 3, \dots$ kümesi aksiyomlarda **yoktur**. Üç nokta “böyle devam eder” der; matematiksel bir tanım ise üç noktaya izin vermez. Bu bölümde doğal sayıları reel sayıların içinde kesin olarak tanımlayacak, ardından onların en önemli özelliğini — **tümevarım ilkesini** — bir teorem olarak ispatlayacağız. Tümevarım, “her n için” biçimindeki sonsuz sayıda önermeyi iki adımda ispatlamanın yoludur ve bir önceki bölümde ertelediğimiz genel üçgen eşitsizliği dâhil, ileride sayısız yerde kullanılacaktır.

Bölüm boyunca Bölüm 6.2 ve Bölüm 7.1 altındaki aksiyomlar ile Bölüm 6–8’deki sonuçları kullanacağız; tamlık aksiyomu henüz gerekmeyecek.

9.1 Tümevarımsal Kümeler ve Doğal Sayılar

Doğal sayıları sezgisel olarak şöyle üretiriz: 1’den başla, sürekli 1 ekle. Bu üretim kuralını bir kümenin özelliği olarak yazalım: küme 1’i içermeli ve içerdiği her sayının bir fazlasını da içermeli.

Tanım 9.1 (Tümevarımsal Küme). $A \subset \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa A kümesine **tümevarımsal** (inductive) denir:

1. $1 \in A$;
2. her $x \in A$ için $x + 1 \in A$.

Bu tanımlı sağlayan pek çok küme vardır; bir kısmı doğal sayılardan “fazlasını” içerir.

Örnek 9.1 (Tümevarımsal Olan ve Olmayan Kümeler). Aşağıdaki kümelerin tümevarımsal olup olmadığını belirleyiniz: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$, $(1, \infty)$, $[0, 5]$.

Çözüm.

$\mathbb{R}$: $1 \in \mathbb{R}$ ve toplama $\mathbb{R}$ ’de tanımlı olduğundan $x \in \mathbb{R}$ için $x + 1 \in \mathbb{R}$. Tümevarımsaldır.

$(0, \infty)$: **Önerme 7.7** gereği $0 < 1$, yani $1 \in (0, \infty)$. $x > 0$ ise (O3) ile $x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$; dolayısıyla $x + 1 \in (0, \infty)$. Tümevarımsaldır.

$[1, \infty)$: $1 \geq 1$. $x \geq 1$ ise $x + 1 \geq 2 > 1$. Tümevarımsaldır.

$\{1\} \cup [2, \infty)$: 1 kümededir. $x = 1$ ise $x + 1 = 2 \in [2, \infty)$; $x \geq 2$ ise $x + 1 \geq 3 \geq 2$. Tümevarımsaldır. Dikkat: bu küme $(1, 2)$ aralığındaki hiçbir sayıyı içermez ama $\frac{5}{2}$ gibi “doğal olmayan” sayıları içerir.

$(1, \infty)$: $1 \notin (1, \infty)$ olduğundan birinci koşul bozulur. Tümevarımsal **değildir**.

$[0, 5]$: $1 \in [0, 5]$ ama $5 \in [0, 5]$ iken $5 + 1 = 6 \notin [0, 5]$. İkinci koşul bozulur; tümevarımsal **değildir**.

■

Örnek, aradığımız kümeyi işaret ediyor: doğal sayılar kümesi tümevarımsal olmalı, ama “fazlalık” içermemeli — yani tümevarımsal kümelerin **en küçüğü** olmalı. En küçük kümeyi elde etmenin standart yolu, adayların hepsini kesiştirmektir.

Tanım 9.2 (Doğal Sayılar Kümesi). $\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ ’nin bütün tümevarımsal alt kümelerinin ailesi olsun ($\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ olduğundan aile boş değildir). Bu ailenin kesişimine (**Tanım 3.8**) **doğal sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{T}} A = \{x \in \mathbb{R} : \text{her tümevarımsal } A \subset \mathbb{R} \text{ için } x \in A\}.$$

$\mathbb{N}$ ’nin elemanlarına **doğal sayı** denir.

Tanım gereği bir x reel sayısı ancak ve ancak **her** tümevarımsal kümede bulunuyorsa doğal sayıdır. Bu tanımın işe yaradığını hemen görelim: $\mathbb{N}$ kendisi tümevarımsaldır ve gerçekten en küçüğüdür.

Önerme 9.1 (Doğal Sayılar En Küçük Tümevarımsal Kümedir).

1. $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir kümedir.
2. $A \subset \mathbb{R}$ tümevarımsal ise $\mathbb{N} \subset A$ 'dır.

İspat.

Madde (1). Her tümevarımsal A için $1 \in A$ olduğundan 1 kesişimdedir: $1 \in \mathbb{N}$. Şimdi $x \in \mathbb{N}$ olsun. Kesişimin tanımı gereği x her tümevarımsal A 'nın elemanıdır; her böyle A tümevarımsal olduğundan $x + 1 \in A$ 'dır. Demek ki $x + 1$ her tümevarımsal kümede bulunur, yani $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Madde (2). A tümevarımsal ise $A \in \mathcal{T}$ 'dir ve bir ailenin kesişimi ailenin her üyesinin alt kümesidir (Teorem 3.2 (1)); dolayısıyla $\mathbb{N} \subset A$. ■

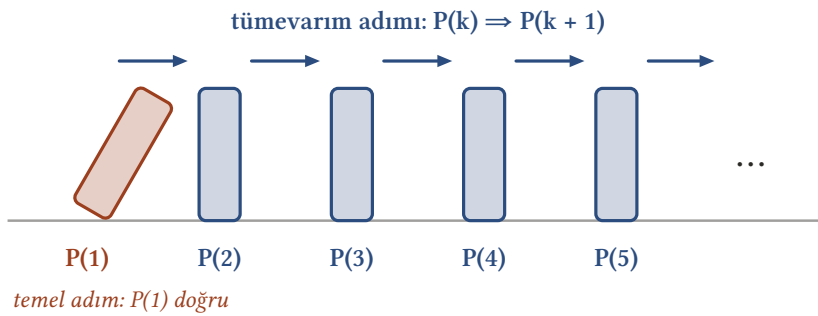
$1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, ... sayıları da $\mathbb{N}$ 'dedir. Bunlar gerçekten farklı sayılardır: **Önerme 7.7** ile $0 < 1$, (O3) ile $1 = 1 + 0 < 1 + 1 = 2$; aynı yolla $2 < 3 < 4 < \dots$. Ayrıca **Örnek 9.1**'deki $\{1\} \cup [2, \infty)$ kümesi tümevarımsal olduğundan $\mathbb{N}$ onun alt kümesidir: **1 ile 2 arasında doğal sayı yoktur**. Bu gözlemi aşağıda genelleştireceğiz.

9.2 Tümevarım İlkesi

“Her doğal sayı için $P(n)$ doğrudur” türünden bir iddiayı ispatlamak istiyoruz. Sonsuz tane önerme var; teker teker kontrol edemeyiz. Ama doğal sayılar en küçük tümevarımsal küme olduğu için şu strateji işler: P 'nin doğru olduğu sayıların kümesinin tümevarımsal olduğunu göster; o zaman bu küme $\mathbb{N}$ 'nin tamamını kapsar.

Teorem 9.1 (Tümevarım İlkesi).

1. **Küme biçimi.** $A \subset \mathbb{N}$ tümevarımsal ise $A = \mathbb{N}$ 'dir.
2. **Önerme biçimi.** Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $P(n)$ önermesi verilmiş olsun. Eğer
 - $P(1)$ doğruysa (**temel adım**) ve
 - her $k \in \mathbb{N}$ için “ $P(k)$ doğru $\Rightarrow P(k + 1)$ doğru” ise (**tümevarım adımı**),
 o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.



Şekil 9.1: Tümevarım domino taşları gibidir: temel adım ilk taşı devirir, tümevarım adımı her taşın bir sonrakini devirdiğini güvence altına alır. İkisi birlikte bütün taşların devrilmesini, yani her n için $P(n)$ 'nin doğru olmasını sağlar.

İspat.

Madde (1). A tümevarımsal olduğundan **Önerme 9.1 (2)** ile $\mathbb{N} \subset A$. Varsayımla $A \subset \mathbb{N}$. İki kapsama birlikte $A = \mathbb{N}$ verir.

Madde (2). $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ doğru}\}$ kümesini alalım; açıkça $A \subset \mathbb{N}$. Temel adım $1 \in A$ der. Tümevarım adımı şunu der: $k \in A$ ise ($P(k)$ doğruysa) $P(k + 1)$ doğrudur; **Önerme 9.1 (1)** ile $k + 1 \in \mathbb{N}$

olduğundan $k + 1 \in A$. Demek ki A tümevarımsaldır. Madde (1) ile $A = \mathbb{N}$, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur. ■

Domino benzetmesi tam olarak budur: ilk taşı devirmek (temel adım) ve her taşın bir sonrakini devireceğinden emin olmak (tümevarım adımı), bütün taşların devrileceğini garantiler. Tümevarım adımında “ $P(k)$ doğru” varsayımına **tümevarım hipotezi** denir; ispatlanan şey $P(k)$ ’nin doğruluğu değil, $P(k)$ ’den $P(k + 1)$ ’e geçilebildiğidir.

💡 Bir tümevarım ispatı nasıl yazılır?

1. İspatlanacak önermeyi n ’ye bağlı olarak açıkça yaz: “ $P(n)$: ...”.
2. **Temel adım:** $P(1)$ ’in doğru olduğunu göster (çoğunlukla doğrudan hesap).
3. **Tümevarım hipotezi:** “Bir $k \in \mathbb{N}$ için $P(k)$ ’nin doğru olduğunu varsayalım.”
4. **Tümevarım adımı:** Bu varsayımdan $P(k + 1)$ ’i çıkar. Hipotezi tam olarak nerede kullandığını belirt.
5. **Sonuç:** “Teorem 9.1 gereği $P(n)$ her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.”

⚠ İki adım da zorunludur

Temel adım olmadan tümevarım adımı hiçbir şey kanıtlamaz: “ $P(n)$: $n \geq 2$ ” önermesi için $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ doğrudur ($k \geq 2$ ise $k + 1 \geq 2$) ama $P(1)$ yanlıştır. Tersine, “ $P(n)$: $n = 1$ ” için temel adım doğru, tümevarım adımı yanlıştır ($P(1)$ doğru ama $P(2)$ yanlış). İki adımın da yazılması ve her $k \in \mathbb{N}$ için geçerli olması gerekir.

İlk örneklerimiz klasik toplam formülleridir. Şimdilik toplamaları $1 + 2 + \dots + n$ biçiminde yazıyoruz; toplam sembolünün kesin tanımını biraz sonra vereceğiz.

Örnek 9.2 (Ardışık Doğal Sayıların Toplamı). Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$P(n)$, yukarıdaki eşitlik olsun.

Temel adım. $n = 1$ için sol taraf 1, sağ taraf $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. $P(1)$ doğrudur.

Tümevarım adımı. Bir $k \in \mathbb{N}$ için $P(k)$ doğru olsun: $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. $P(k + 1)$ ’in sol tarafını yazıp hipotezi kullanalım:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Sağdaki ifade, $P(k + 1)$ ’in sağ tarafı $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ ile aynıdır. Demek ki $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Teorem 9.1 gereği $P(n)$ her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. ■

Örnek 9.3 (İlk n Tek Sayının Toplamı). Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Temel adım. $n = 1$: sol taraf $2 \cdot 1 - 1 = 1$, sağ taraf $1^2 = 1$.

Tümevarım adımı. $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$ olsun. Bir sonraki tek sayı $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ ’dir; onu ekleyelim:

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Burada ilk eşitlikte tümevarım hipotezi, ikincisinde dağılma aksiyomuyla açılan $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ özdeşliği kullanıldı. Böylece $P(k+1)$ doğrudur ve Teorem 9.1 ile iddia her n için geçerlidir.

■

9.3 Doğal Sayıların Temel Özellikleri

Doğal sayılar hakkında “bilinen” her şey artık ispat gerektirir; ispatların hepsi tümevarımla yapılır. Önce toplama ve çarpma altında kapalılık.

Önerme 9.2 (Doğal Sayılar Toplama ve Çarpma Altında Kapalıdır). $m, n \in \mathbb{N}$ ise $m + n \in \mathbb{N}$ ve $mn \in \mathbb{N}$ ’dir.

İspat.

$m \in \mathbb{N}$ sabit olsun; n üzerinden tümevarım yapacağız.

Toplama. $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathbb{N}$ tümevarımsal olduğundan $m + 1 \in \mathbb{N}$, yani $1 \in A$. $n \in A$ ise $m + n \in \mathbb{N}$; yine tümevarımsallıkla $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ ve (A2) ile $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$, yani $n + 1 \in A$. A tümevarımsaldır; Teorem 9.1 (1) ile $A = \mathbb{N}$.

Çarpma. $B = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}$ olsun. (M3) ile $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$, yani $1 \in B$. $n \in B$ ise $mn \in \mathbb{N}$; (D) ile $m(n + 1) = mn + m$ ve toplama altında kapalılıkla $mn + m \in \mathbb{N}$, yani $n + 1 \in B$. B tümevarımsaldır; dolayısıyla $B = \mathbb{N}$.

■

Çıkarma ve bölme için kapalılık yoktur: $1 - 2$ ve $\frac{1}{2}$ doğal sayı değildir; ikisi de 1’den küçüktür, oysa aşağıdaki önerme gereği hiçbir doğal sayı 1’den küçük olamaz. Bu eksikler sırasıyla tam sayılar (Tanım 11.1) ve rasyonel sayılarla (Tanım 11.6) giderilecektir.

Şimdi doğal sayıların sayı doğrusundaki dizilişini kesinleştirelim: 1 en küçüktür, ardışık iki doğal sayı arasında başka doğal sayı yoktur ve büyük olandan küçüğü çıkarınca yine doğal sayı elde edilir.

Önerme 9.3 (Doğal Sayıların Dizilişi). $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

1. $n \geq 1$ ’dir. Dolayısıyla 1, $\mathbb{N}$ ’nin en küçük elemanıdır ve her doğal sayı pozitifdir.
2. $n \neq 1$ ise $n - 1 \in \mathbb{N}$ ’dir; dolayısıyla $n \geq 2$ ’dir.
3. $n < x < n + 1$ koşulunu sağlayan bir $x \in \mathbb{N}$ yoktur: ardışık iki doğal sayı arasında doğal sayı bulunmaz.
4. $m < n$ ise $m + 1 \leq n$ ve $n - m \in \mathbb{N}$ ’dir.

İspat.

Madde (1). $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ olsun. $1 \geq 1$ olduğundan $1 \in A$. $n \in A$ ise $n \geq 1$ ve (O3) ile $n + 1 \geq 1 + 1 = 2 > 1$; dolayısıyla $n + 1 \in A$. Teorem 9.1 (1) ile $A = \mathbb{N}$. Pozitiflik $n \geq 1 > 0$ ’dan çıkar.

Madde (2). $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\}$ olsun; $A \subset \mathbb{N}$ ’dir. $1 \in A$. $n \in A$ olsun; $n \in \mathbb{N}$ olduğundan $n + 1 \in \mathbb{N}$ ve $(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$, yani $n + 1 \in A$. Böylece A tümevarımsal ve $A = \mathbb{N}$: her doğal sayı ya 1’dir ya da bir eksiği doğal sayı olan bir sayıdır. $n \neq 1$ ise $n - 1 \in \mathbb{N}$, madde (1) ile $n - 1 \geq 1$, yani $n \geq 2$.

Madde (3). $P(n)$: “ $n < x < n + 1$ olan $x \in \mathbb{N}$ yoktur” önermesi için tümevarım yapalım.

Temel adım. $1 < x < 2$ olan bir $x \in \mathbb{N}$ olsaydı $x \neq 1$ olurdu ve madde (2) ile $x \geq 2$ gelirdi; bu $x < 2$ ile çelişir. $P(1)$ doğrudur.

Tümevarım adımı. $P(k)$ doğru olsun ve $k + 1 < x < k + 2$ olan bir $x \in \mathbb{N}$ bulunduğunu varsayalım. $x > k + 1 \geq 2 > 1$ olduğundan $x \neq 1$, madde (2) ile $x - 1 \in \mathbb{N}$. Eşitsizliklerden 1 çıkarınca $k < x - 1 < k + 1$; bu, $P(k)$ ile çelişir. Demek ki böyle x yoktur ve $P(k + 1)$ doğrudur.

Madde (4). Önce $m + 1 \leq n$: üçlem yasası (O1) gereği ya $m + 1 \leq n$ ya da $n < m + 1$ ’dir. İkinci $m < n$ ile birleşince $m < n < m + 1$ verir; madde (3) bunu yasaklar. O hâlde $m + 1 \leq n$.

Şimdi $n - m \in \mathbb{N}$ olduğunu m üzerinden tümevarımla göstereyim; $Q(m)$: “her $n \in \mathbb{N}$ için, $m < n$ ise $n - m \in \mathbb{N}$ ”.

Temel adım. $1 < n$ ise $n \neq 1$ ve madde (2) ile $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Tümevarım adımı. $Q(k)$ doğru olsun ve $n \in \mathbb{N}$, $k + 1 < n$ olsun. $k < k + 1 < n$ olduğundan $Q(k)$ ile $n - k \in \mathbb{N}$. Ayrıca $n - k > 1$ olduğundan $n - k \neq 1$; madde (2) ile $(n - k) - 1 = n - (k + 1) \in \mathbb{N}$. $Q(k + 1)$ doğrudur.

■

Bu önerme ne işe yarar? Doğal sayıların “ayrık” durduğunu söyler: bir doğal sayıya 1’den daha az yaklaşan başka bir doğal sayı yoktur. İleride aynı olguyu tam sayılar için de göstereceğiz — ardışık iki tam sayı arasında tam sayı yoktur (Lemma 11.1, Bölüm 11) — ve Arşimet özelliği (Bölüm 12) buna dayanacaktır. Doğal sayıların ikinci büyük özelliği, tümevarım ilkesine denk olan **iyi sıralama ilkesidir**: doğal sayılardan oluşan boş olmayan her kümenin bir en küçük elemanı vardır. Reel sayılarda bu doğru değildir; $(0, 1)$ aralığının en küçük elemanı yoktur.

Teorem 9.2 (İyi Sıralama İlkesi). $S \subset \mathbb{N}$ boş olmayan bir küme olsun. S ’nin bir **en küçük elemanı** vardır: öyle bir $m \in S$ bulunur ki her $s \in S$ için $m \leq s$. Bu eleman tektir.

İspat.

Teklik kolaydır: m ve m' ikisi de en küçük eleman olsa $m \leq m'$ ve $m' \leq m$, dolayısıyla $(O1)$ ile $m = m'$ olur.

Varlık için olmayana ergi yöntemini kullanalım: S ’nin en küçük elemanı **olmasın**; $S = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$A = \{n \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ olan her } k \in \mathbb{N} \text{ için } k \notin S\}$$

kümesinin tümevarımsal olduğunu gösterelim; A , “ S ’nin n ’ye kadar hiçbir elemanı olmayan” n ’lerden oluşur.

Temel adım: $1 \in A$. $1 \in S$ olsaydı, **Önerme 9.3 (1)** gereği her $s \in S$ için $1 \leq s$ olurdu; yani 1, S ’nin en küçük elemanı olurdu. Bu, varsayımımızla çelişir; demek ki $1 \notin S$. $k \leq 1$ olan tek doğal sayı $k = 1$ olduğundan $(k \geq 1) 1 \in A$.

Tümevarım adımı. $n \in A$ olsun; $n + 1 \in A$ olduğunu gösterelim. Önce $n + 1 \notin S$: aksi hâlde $n + 1$ en küçük eleman olurdu. Gerçekten, $s \in S$ ise $n \in A$ nedeniyle $s \leq n$ olamaz, yani $n < s$; **Önerme 9.3 (4)** ile $n + 1 \leq s$. Bu her $s \in S$ için geçerli olduğundan $n + 1 \in S$ olsaydı en küçük eleman olurdu — çelişki. Şimdi $k \leq n + 1$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ alalım. Ya $k = n + 1$ ’dir, o zaman az önce gördüğümüz gibi $k \notin S$; ya da $k < n + 1$ ’dir, o zaman **Önerme 9.3 (4)** ile $k + 1 \leq n + 1$, yani $k \leq n$ ve $n \in A$ nedeniyle $k \notin S$. Her iki hâlde de $k \notin S$; demek ki $n + 1 \in A$.

Teorem 9.1 (1) ile $A = \mathbb{N}$. Şimdi $s \in S$ olsa $s \in \mathbb{N} = A$ olur; $k = s \leq s$ alınca $s \notin S$ çıkar — çelişki. Demek ki $S = \emptyset$. Bu, S ’nin boş olmadığı varsayımıyla çelişir; o hâlde S ’nin en küçük elemanı vardır.

■

İyi sıralama ilkesi ne işe yarar? “Bir özelliği sağlayan **en küçük** doğal sayıyı al” adımına izin verir. Bu adım, Bölüm 12’de taban fonksiyonunun varlığında ve “en küçük karşı örnek” tekniğinde kullanılır: bir iddia bazı doğal sayılar için yanlışsa, yanlış olduğu en küçük n vardır ve bu n ile çalışmak çoğu zaman çelişki üretir. Bölüm sonu alıştırmasında iyi sıralamadan tümevarım ilkesinin geri çıktığını göstereceğiz; iki ilke birbirine denktir.

9.4 Özyineli Tanımlar

Tümevarım yalnızca ispat aracı değil, **tanım** aracıdır da. “ a^n : a ’nın n kez kendisiyle çarpımı” ifadesindeki “ n kez” gizli bir üç noktadır. Kesin tanım, $n = 1$ için değeri verip n ’den $n + 1$ ’e geçiş kuralını söyler; tümevarım ilkesi bu kuralın her n için tek bir değer belirlediğini garantiler.

Tanım 9.3 (Kuvvet, Faktöriyel, Toplam ve Çarpım Sembolleri). $a \in \mathbb{R}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için bir $a_k \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.

1. **Doğal kuvvet:** $a^1 = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Ayrıca $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ kabul edilir.
2. **Faktöriyel:** $0! = 1$, $1! = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.
3. **Toplam ve çarpım sembolleri:**

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}; \quad \prod_{k=1}^1 a_k = a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}.$$

$\sum_{k=1}^n a_k$ yerine $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\prod_{k=1}^n a_k$ yerine $a_1 a_2 \cdots a_n$ da yazılır.

Bu tür tanımlara **özyineli** (recursive) tanım denir. Örneğin $a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a$, $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ve $n! = \prod_{k=1}^n k$ 'dir. Kuvvetlerin $a^m a^n = a^{m+n}$ gibi kuralları tümevarımla ispatlanır; bunları üs tam sayı olacak biçimde genişlettikten sonra **Teorem 11.3** olarak vereceğiz. Aşağıdaki hesaplarda yalnızca tanımın kendisini, yani $a^{n+1} = a^n \cdot a$ eşitliğini kullanacağız. Bir de tanımdan tümevarımla çıkan şu olguyu kaydedelim: $a > 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n > 0$, $a \geq 0$ ise $a^n \geq 0$ 'dır (temel adım $a^1 = a$; adımda $a^{n+1} = a^n \cdot a$ çarpımına **Önerme 7.5** (1) ya da **Önerme 6.9** uygulanır). Aşağıda bunu $2^{k-1} > 0$ ve $x^k \geq 0$ biçiminde kullanacağız.

i Özyineli tanım neden meşrudur?

“ a^n her n için tanımlıdır” iddiası, $A = \{n \in \mathbb{N} : a^n \text{ tanımlı}\}$ kümesinin tümevarımsal olmasından çıkar: a^1 tanımlıdır ve a^n tanımlıysa $a^{n+1} = a^n \cdot a$ da tanımlıdır. Tanımlanan değerin **tek** olduğu da benzer bir tümevarımla görülür. Bu iki gözlemin genel biçimine *özyineleme teoremi* denir; biz onu bu düzeyde verilmiş kabul edeceğiz.

Artık daha zengin tümevarım örnekleri yapabiliriz.

Örnek 9.4 (Üstel Büyüme Doğrusalı Geçer). Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n > n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Temel adım. $2^1 = 2 > 1$.

Tümevarım adımı. $2^k > k$ olsun. Tanımla $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2^k + 2^k$. Hipotezle $2^k > k$ ve **Önerme 9.3** (1) ile $2^k > k \geq 1$; ikisini taraf tarafa toplayalım:

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k + 1.$$

$P(k+1)$ doğrudur; **Teorem 9.1** ile iddia her n için geçerlidir.

■

Örnek 9.5 (Faktöriyel Üstelden Hızlı Büyür). Her $n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Temel adım. $n = 1$: $1! = 1$ ve $2^0 = 1$; $1 \geq 1$.

Tümevarım adımı. $k! \geq 2^{k-1}$ olsun. Tanımla $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$. Hipotezi pozitif sayı $k+1$ ile çarparsak (O4) $(k+1)! \geq (k+1) \cdot 2^{k-1}$. Öte yandan $k \geq 1$ olduğundan $k+1 \geq 2$; bunu pozitif sayı 2^{k-1} ile çarpınca $(k+1) \cdot 2^{k-1} \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. Geçişlilikle $(k+1)! \geq 2^k = 2^{(k+1)-1}$. (Burada $k = 1$ için $2^{k-1} = 2^0 = 1$ kabulü ve $2^0 \cdot 2 = 2^1$ eşitliği kullanıldı; $k \geq 2$ için $2^{k-1} \cdot 2 = 2^k$ doğrudan tanımdır.)

■

Örnek 9.6 (Bir Bölünebilme Özelliği). Her $n \in \mathbb{N}$ için $8^n - 1 = 7m$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ bulunduğunu gösteriniz. (Bölünebilme dilinde: $8^n - 1$, 7'ye bölünür; bkz. **Tanım 11.3**.)

Çözüm.

Temel adım. $8^1 - 1 = 7 = 7 \cdot 1$; $m = 1$ işe yarar.

Tümevarım adımı. $8^k - 1 = 7m$ olacak bir $m \in \mathbb{N}$ bulunsun; yani $8^k = 7m + 1$. O zaman

$$8^{k+1} - 1 = 8^k \cdot 8 - 1 = (7m + 1) \cdot 8 - 1 = 56m + 8 - 1 = 56m + 7 = 7(8m + 1).$$

Önerme 9.2 ile $8m + 1 \in \mathbb{N}$; demek ki $m' = 8m + 1$ istenen özelliktedir. **Teorem 9.1** ile iddia her n için doğrudur.

■

9.5 Tümevarımın Değişik Biçimleri

Bazı iddialar ancak belli bir n_0 'dan sonra doğrudur; bazılarında ise $P(k+1)$ 'i göstermek için yalnızca $P(k)$ değil, öncekilerin tamamı gerekir. Tümevarım ilkesi her iki duruma da uyarlanır.

Teorem 9.3 (Bir n_0 'dan Başlayan Tümevarım). $n_0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq n_0$ doğal sayısı için bir $P(n)$ önermesi verilmiş olsun. Eğer $P(n_0)$ doğruysa ve $n_0 \leq k$ olan her $k \in \mathbb{N}$ için $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ise, $n \geq n_0$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

İspat.

Her $m \in \mathbb{N}$ için $Q(m) := P(n_0 + m - 1)$ diyelim. Bu tanımlıdır: $m = 1$ için $n_0 + m - 1 = n_0$; $m \geq 2$ için **Önerme 9.3** (2) ile $m - 1 \in \mathbb{N}$, **Önerme 9.2** ile $n_0 + (m - 1) \in \mathbb{N}$ ve $m - 1 \geq 1$ olduğundan $n_0 + m - 1 \geq n_0$. $Q(1) = P(n_0)$ doğrudur. $Q(m)$ doğruysa $k = n_0 + m - 1 \geq n_0$ için $P(k)$ doğrudur, varsayım ile $P(k+1) = P(n_0 + (m+1) - 1) = Q(m+1)$ doğrudur. **Teorem 9.1** ile her $m \in \mathbb{N}$ için $Q(m)$ doğrudur.

Şimdi $n \geq n_0$ olsun. $n = n_0$ ise $P(n) = Q(1)$ doğrudur. $n > n_0$ ise **Önerme 9.3** (4) ile $n - n_0 \in \mathbb{N}$; $m = (n - n_0) + 1 \in \mathbb{N}$ alınca $n_0 + m - 1 = n$, yani $P(n) = Q(m)$ doğrudur.

■

Örnek 9.7 (Bir Yerden Sonra Doğru Olan Eşitsizlik). $n \geq 3$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 > 2n + 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$n = 1$ ve $n = 2$ için iddia yanlıştır ($1 < 3$, $4 < 5$); bu yüzden $n_0 = 3$ 'ten başlıyoruz.

Temel adım. $3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Tümevarım adımı. $k \geq 3$ ve $k^2 > 2k + 1$ olsun. O zaman

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > (2k+1) + 2k + 1 = 4k + 2 = 2(k+1) + 2k \geq 2(k+1) + 1,$$

çünkü $k \geq 1$ nedeniyle $2k \geq 2 > 1$. Böylece $(k+1)^2 > 2(k+1) + 1$ ve **Teorem 9.3** ile iddia her $n \geq 3$ için doğrudur.

■

Teorem 9.4 (Güçlü Tümevarım). Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $P(n)$ önermesi verilmiş olsun. Eğer $P(1)$ doğruysa ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$P(1), P(2), \dots, P(k) \text{ doğru} \Rightarrow P(k+1) \text{ doğru}$$

ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

İspat.

$Q(n)$: " $j \leq n$ olan her $j \in \mathbb{N}$ için $P(j)$ doğru" önermesini alalım ve Q için sıradan tümevarım yapalım. $j \leq 1$ olan tek doğal sayı 1'dir; $P(1)$ doğru olduğundan $Q(1)$ doğrudur. $Q(k)$ doğru olsun: $P(1), \dots, P(k)$ doğrudur. Varsayım ile $P(k+1)$ doğrudur. $j \leq k+1$ olan bir $j \in \mathbb{N}$ ya $j = k+1$ 'dir ya da $j < k+1$, yani **Önerme 9.3** (4) ile $j \leq k$ 'dir; her iki hâlde $P(j)$ doğrudur. Demek ki $Q(k+1)$ doğrudur. **Teorem 9.1** ile her n için $Q(n)$, özel olarak $P(n)$ doğrudur.

■

Güçlü tümevarım, sıradan tümevarımdan daha güçlü bir ilke değildir — ispat gösteriyor ki ondan çıkar — ama tümevarım adımında **bütün** önceki durumları kullanabilmek bazı ispatları çok kolaylaştırır. Tipik örnek, her terimi önceki iki terime bağlı olan dizilerdir.

Örnek 9.8 (Fibonacci Sayıları). $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ olsun (özyineli tanım: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n < 2^n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Güçlü tümevarım kullanacağız, çünkü F_{k+1} 'i sınırlamak için hem F_k hem F_{k-1} gerekir.

Temel adımlar. $F_1 = 1 < 2 = 2^1$ ve $F_2 = 1 < 4 = 2^2$.

Tümevarım adımı. $k \geq 2$ olsun ve $j \leq k$ olan her j için $F_j < 2^j$ doğru olsun. $k \geq 2$ olduğundan $k-1 \in \mathbb{N}$ ve $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ yazılabilir. Hipotezle

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < 2^k + 2^{k-1} < 2^k + 2^k = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

Ortak adımda $2^{k-1} < 2^{k-1} \cdot 2 = 2^k$ kullanıldı ($2^{k-1} > 0$ olduğundan). Adımı $k \geq 2$ için yazmamız yeterlidir: güçlü tümevarımın $k = 1$ için istediği “ $P(1) \Rightarrow P(2)$ ” koşulu, $P(2)$ temel adımda doğrudan gösterildiği için zaten sağlanır. **Teorem 9.4** ile iddia her n için doğrudur.

■

9.6 Bernoulli Eşitsizliği

Bir kuvvetin alttan basit bir sınırı, analizde sürekli lazım olur: $(1+x)^n$ ifadesi $1+nx$ 'ten küçük değildir. Sezgi, $x \geq 0$ için binom açılımından gelir ($1+nx$ açılımın ilk iki terimidir); ama eşitsizlik $x \geq -1$ için de doğrudur.

Teorem 9.5 (Bernoulli Eşitsizliği). $x \geq -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

İspat.

n üzerinden tümevarım.

Temel adım. $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x$; eşitlik vardır.

Tümevarım adımı. $(1+x)^k \geq 1+kx$ olsun. $x \geq -1$ olduğundan $1+x \geq 0$ 'dır. $1+x = 0$ ise $(1+x)^{k+1} = 0 \geq 1+(k+1)(-1) = -k$, doğrudur. $1+x > 0$ ise hipotezi bu pozitif sayıyla çarpabiliriz (O4):

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2.$$

Önerme 7.12 (1) ile $x^2 \geq 0$ ve $k > 0$ olduğundan $kx^2 \geq 0$; dolayısıyla $1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. Geçişlilikle $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

■

Bernoulli eşitsizliği ne işe yarar? $x > 0$ için $(1+x)^n \geq 1+nx$ sağ tarafı n büyüdükçe her sınırı aşar (bunu bir sonraki bölümde, doğal sayıların üstten sınırsızlığıyla kanıtlayacağız); dolayısıyla 1'den büyük bir sayının kuvvetleri de her sınırı aşar. $x = 1$ için $2^n \geq 1+n$, **Örnek 9.4**'nin başka bir ispatıdır. Dizilerde $q^n \rightarrow 0$ ($|q| < 1$) ve $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ sonuçları doğrudan bu eşitsizlikle kanıtlanacaktır.

i Kesin eşitsizlik

$x > -1$, $x \neq 0$ ve $n \geq 2$ ise eşitsizlik kesindir: $(1+x)^n > 1+nx$. İspat aynıdır; $n = 2$ temel adımında $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ ($x^2 > 0$) ve tümevarım adımında $kx^2 > 0$ kullanılır.

9.7 Binom Teoremi

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ve $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ açılımlarını biliyoruz. Genel n için katsayıları veren sayılar binom katsayılarıdır.

Tanım 9.4 (Binom Katsayısı). $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ için

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sayısına **binom katsayısı** denir ve “ n 'nin k 'lısı” diye okunur. ($k < n$ iken $n-k \in \mathbb{N}$, $k = n$ iken $n-k = 0$ olduğundan payda tanımlıdır.)

Tanımdan hemen çıkan değerler: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ve **simetri** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (payda aynı iki çarpandan oluşur). Binom katsayılarını satır satır dizince Pascal üçgeni ortaya çıkar; her sayı, üstündeki iki sayının toplamıdır:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & 1 \\
& & & 1 & 2 & 1 & \\
& & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & &
\end{array}$$

Bu “üstündeki ikisinin toplamı” kuralı, binom teoreminin ispatındaki temel adımdır.

Lemma 9.1 (Pascal Özdeşliği). $n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k \leq n$ için

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

İspat.

Faktöriyelini özyineli tanımıyla $k! = k \cdot (k-1)!$ ve $(n-k+1)! = (n-k+1) \cdot (n-k)!$ ’dir ($k=1$ ve $k=n$ hâllerinde bu eşitlikler $1! = 1 \cdot 0!$ biçimini alır; iki yan da 1’dir). Ortak paydaya getirelim:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n! \cdot k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!}.$$

Payları toplayınca $n! (k + (n-k+1)) = n! (n+1) = (n+1)! olur; dolayısıyla toplam$

$$\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

■

Teorem 9.6 (Binom Teoremi). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Burada a^0 ve b^0 çarpanları, a ya da b sıfır olsa bile 1 olarak okunur; toplam da $k=0$ ’dan başladığı için **Tanım 9.3** (3)’ün $k=0$ terimi eklenmiş biçimidir.

İspat.

n üzerinden tümevarım.

Temel adım. $n=1$: sağ taraf $\binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b = (a+b)^1$.

Tümevarım adımı. Eşitlik $n=k$ için doğru olsun. Kuvvetin tanımı ve dağılma aksiyomuyla

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \right) a + \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \right) b = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1}.$$

İkinci toplamda $j+1=i$ diyerek indisi kaydıralım; $j, 0$ ’dan k ’ya giderken $i, 1$ ’den $k+1$ ’e gider:

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} b^{j+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^{k+1-i} b^i.$$

Şimdi iki toplamı, ortak $a^{k+1-i} b^i$ terimlerine göre birleştiririm. Birinci toplamın $i=0$ terimi $\binom{k}{0} a^{k+1} = a^{k+1}$, ikincinin $i=k+1$ terimi $\binom{k}{k} b^{k+1} = b^{k+1}$ tektir; $1 \leq i \leq k$ için iki toplamdan birer terim gelir:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] a^{k+1-i} b^i + b^{k+1}.$$

Lemma 9.1 ile köşeli parantez $\binom{k+1}{i}$ ’dir; ayrıca $a^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} b^0$ ve $b^{k+1} = \binom{k+1}{k+1} a^0 b^{k+1}$ yazılabilir. Böylece

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i,$$

yani eşitlik $n = k+1$ için doğrudur.

■

Örnek 9.9 (Binom Teoreminin Uygulamaları).

- $(a+b)^4$ açılımını yazınız.
- Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ve $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ olduğunu gösteriniz.
- $x \geq 0$ için Bernoulli eşitsizliğini binom teoreminden elde ediniz.

Çözüm.

a) Pascal üçgeninin beşinci satırı 1, 4, 6, 4, 1 olduğundan

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

b) Teorem 9.6 içinde $a = b = 1$ alınca $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1$, yani $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. $a = 1$, $b = -1$ alınca $(1+(-1))^n = 0^n = 0$ (çünkü $n \geq 1$) ve sağ taraf $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ olur.

c) $a = 1$, $b = x \geq 0$ alalım: $(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k$ ($n = 1$ için son toplam yoktur). Binom katsayıları pozitif (alıştırma (d)) ve $x^k \geq 0$ olduğundan son toplam negatif değildir; dolayısıyla $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

■

9.8 Genel Üçgen Eşitsizliği

Bölüm 8'de ertelediğimiz ispatı artık yapabiliriz.

Teorem 9.7 (Sonlu Toplamlar İçin Üçgen Eşitsizliği). $n \in \mathbb{N}$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olsun.

- $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$, yani $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.
- $\prod_{k=1}^n |a_k| = \left| \prod_{k=1}^n a_k \right|$; özel olarak her $a \in \mathbb{R}$ için $|a^n| = |a|^n$.

İspat.

Madde (1). n üzerinden tümevarım. $n = 1$ için iki taraf da $|a_1|$ 'dir. Eşitsizlik $n = k$ için (her k terimli toplam için) doğru olsun ve $a_1, \dots, a_{k+1}$ verilsin. Toplam sembolünün özyineli tanımı, Teorem 8.2 ve tümevarım hipoteziyle

$$\left| \sum_{i=1}^{k+1} a_i \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + a_{k+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| + |a_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| + |a_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|.$$

Madde (2). Aynı tümevarım, bu kez Teorem 8.1 (5) ile:

$$\left| \prod_{i=1}^{k+1} a_i \right| = \left| \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \cdot a_{k+1} \right| = \left| \prod_{i=1}^k a_i \right| \cdot |a_{k+1}| = \left(\prod_{i=1}^k |a_i| \right) |a_{k+1}| = \prod_{i=1}^{k+1} |a_i|.$$

Bütün a_i 'ler a 'ya eşit alınırsa $|a^n| = |a|^n$ çıkar.

■

Bu teorem sayesinde sonlu toplamların büyüklüğünü terim terim sınırlayabileceğiz; seriler ve kısmi toplamlar söz konusu olduğunda vazgeçilmez olacaktır.

9.9 Alıştırmalar

Alıştırma 9.1 (Tümevarım Alıştırmaları).

- a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.
- b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.
- c) $n \geq 4$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \geq n^2$ olduğunu gösteriniz.
- d) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ için $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz.
- e) İyi sıralama ilkesini (Teorem 9.2) kullanarak tümevarım ilkesinin önerme biçimini ispatlayınız: $P(1)$ doğru ve her k için $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm.

a) $n = 1$: sol taraf 1, sağ taraf $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Tümevarım adımı: eşitlik k için doğruysa

$$1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1) [k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$ olduğundan sağ taraf $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, yani formülün $n = k+1$ hâlidir.

b) $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. Tümevarım adımı: hipotezle

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Bu, formülün $n = k+1$ hâlidir.

c) Teorem 9.3 ile $n_0 = 4$ 'ten başlayalım. Temel adım: $2^4 = 16 = 4^2$. Tümevarım adımı: $k \geq 4$ ve $2^k \geq k^2$ olsun. O zaman $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2$. $k \geq 4 \geq 3$ olduğundan Örnek 9.7 ile $k^2 > 2k + 1$; dolayısıyla

$$2^{k+1} \geq k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

d) n üzerinden tümevarım; $P(n)$: “her $k \in \{0, \dots, n\}$ için $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ ”. $n = 1$: $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$. $P(n)$ doğru olsun. $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$; $1 \leq k \leq n$ için Lemma 9.1 ile $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, hipotezle iki toplanan da doğal sayıdır ve Önerme 9.2 ile toplamaları da doğal sayıdır. $P(n+1)$ doğrudur.

e) $P(1)$ doğru ve her k için $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ olsun. $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ yanlış}\}$ kümesini alalım ve $S \neq \emptyset$ varsayalım. Teorem 9.2 ile S 'nin en küçük elemanı m vardır. $P(1)$ doğru olduğundan $m \neq 1$; Önerme 9.3 (2) ile $m-1 \in \mathbb{N}$. $m-1 < m$ ve m en küçük olduğundan $m-1 \notin S$, yani $P(m-1)$ doğrudur. Varsayımla $P((m-1)+1) = P(m)$ doğrudur; bu $m \in S$ ile çelişir. Demek ki $S = \emptyset$: her n için $P(n)$ doğrudur. (Bu, iyi sıralama ilkesinin tümevarım ilkesine denk olduğunu gösterir; diğer yön Teorem 9.2'nin ispatıdır.)

■

Doğal sayılar artık elimizde ve “her n için” tümcelerini ispatlayabiliyoruz. Ama şu ana kadarki aksiyomlar reel sayıları rasyonel sayılardan ayırt edemez; hâlâ $\sqrt{2}$ 'nin var olduğunu bile bilmiyoruz. Eksik olan son aksiyom, sayı doğrusunda “boşluk” bulunmadığını söyleyen tamlık aksiyomudur: **Üst Sınır, Supremum ve Tamlık Aksiyomu**.

10. Üst Sınır, Supremum ve Tamlık Aksiyomu

Buraya kadar reel sayılar için iki aksiyom grubu gördük: cebirsel aksiyomlar (Bölüm 6.2) toplama ve çarpmayı, sıralama aksiyomları (Bölüm 7.1) ise “küçüktür” bağıntısını yönetiyordu. Ne var ki bu iki grubun tamamını rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ da sağlar. Yani şimdiye kadar yazdığımız hiçbir aksiyom, $\mathbb{R}$ 'yi $\mathbb{Q}$ 'dan ayırt etmez. Oysa aralarında büyük bir fark vardır: rasyonel sayı doğrusu “deliklidir” — karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur — ama reel sayı doğrusunda böyle bir boşluk bulunmaz.

Bu bölümde işte bu farkı yakalayan üçüncü ve son aksiyomu, **Tamlık Aksiyomu**'nu yazacağız. Aksiyomu ifade edebilmek için önce “üst sınır” ve “en küçük üst sınır (supremum)” kavramlarına ihtiyacımız var. Bölümün sonunda aksiyomun ilk büyük sonuçlarını göreceğiz: doğal sayılar kümesi üstten sınırlı değildir ve iç içe geçmiş kapalı aralıkların ortak bir noktası daima vardır.

10.1 Üst Sınır ve Alt Sınır

Bir kümenin “nereye kadar uzandığını” ölçmenin en basit yolu, kümenin bütün elemanlarını geçen bir sayı bulmaktır. Böyle bir sayı varsa küme yukarıya doğru sonsuza kaçamıyor demektir.

Tanım 10.1 (Üst Sınır ve Alt Sınır). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

- Bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı için her $a \in A$ elemanında $a \leq M$ sağlanıyorsa, M 'ye A kümesinin bir **üst sınırı** (upper bound) denir.
- Bir $m \in \mathbb{R}$ sayısı için her $a \in A$ elemanında $m \leq a$ sağlanıyorsa, m 'ye A kümesinin bir **alt sınırı** (lower bound) denir.

İki noktaya dikkat edelim. Birincisi, üst sınır tek değildir: M bir üst sınırsa M 'den büyük her sayı da üst sınırdır, çünkü $a \leq M \leq M'$ olur. İkincisi, üst sınırın kümeye ait olması gerekmez; aşağıdaki örneklerde bunu göreceğiz.

Üst sınırı olan küme yukarıya, alt sınırı olan küme aşağıya doğru “kaçamaz”; bu durumları adlandıralım.

Tanım 10.2 (Sınırlı Küme). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

- A 'nın en az bir üst sınırı varsa A 'ya **üstten sınırlı** (bounded above),
- A 'nın en az bir alt sınırı varsa A 'ya **alttan sınırlı** (bounded below),
- A hem üstten hem alttan sınırlıysa A 'ya **sınırlı** (bounded) küme denir.

Üstten sınırlı olmayan kümeye **üstten sınırsız**, sınırlı olmayan kümeye **sınırsız** denir.

İ Sınırlılığın mutlak değerle ifadesi

A kümesi sınırlıdır ancak ve ancak her $a \in A$ için $|a| \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı vardır. Gerçekten, m bir alt sınır ve M bir üst sınır olsun; $K = \max\{|m|, |M|\} + 1$ alalım. Mutlak değer özelliklerinden (Teorem 8.1) — $|m| \leq m$ ve $M \leq |M|$ olduğundan her $a \in A$ için

$$-K < -|m| \leq m \leq a \leq M \leq |M| < K$$

yani $|a| < K$ olur. Tersine, her a için $|a| \leq K$ ise $-K \leq a \leq K$ olduğundan $-K$ bir alt, K bir üst sınırdır. Bu ifade, sınırlılığı tek bir eşitsizlikle denetlemeyi sağladığı için ileride dizilerde sıkça kullanılacaktır.

Örnek 10.1 (Üst ve Alt Sınır Örnekleri). Aşağıdaki kümelerin üstten ve alttan sınırlı olup olmadıklarını inceleyelim; sınırlıysa birer üst ve alt sınır bulalım.

- a) $A = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$
 b) $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
 c) $C = (-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$
 d) $D = \{2, 5, 7\}$

Çözüm.

a) Her $x \in A$ için $0 \leq x$ olduğundan 0 bir alt sınırdır; her $x \in A$ için $x < 1$ olduğundan 1 bir üst sınırdır. Demek ki A sınırlıdır. 1 sayısı A 'nın elemanı değildir; ama bu, üst sınır olmasına engel değildir. 0 ise hem alt sınır hem de A 'nın elemanıdır. 1, 5, 2, 100 sayıları da üst sınırdır; -3 de bir alt sınırdır.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 1$ 'dir (Önerme 9.3); $n = 1$ ise $\frac{1}{n} = 1$, $n > 1$ ise Önerme 7.10 gereği $\frac{1}{n} < 1$ olur. Her iki hâlde $\frac{1}{n} \leq 1$ 'dir; $1 = \frac{1}{1} \in B$ olduğundan 1 hem üst sınır hem de kümenin elemanıdır. Her n için $\frac{1}{n} > 0$ olduğundan (Önerme 7.9) 0 bir alt sınırdır; B sınırlıdır. 0 kümeye ait değildir, çünkü hiçbir n için $\frac{1}{n} = 0$ olmaz.

c) 2 bir üst sınırdır ve $2 \in C$ 'dir. Alt sınır ise yoktur: m herhangi bir reel sayı olsun. $m \leq 2$ ise $m - 1 < m \leq 2$ olduğundan $m - 1 \in C$ ve $m - 1 < m$; $m > 2$ ise $2 \in C$ ve $2 < m$. Her iki hâlde de C 'nin m 'den küçük bir elemanı vardır, yani m alt sınır değildir. Demek ki C üstten sınırlı ama alttan sınırsızdır; dolayısıyla sınırsız bir kümedir.

d) $2 \leq 5 \leq 7$ olduğundan 7 bir üst, 2 bir alt sınırdır ve her ikisi de kümenin elemanıdır. D sınırlıdır. ■

10.2 Maksimum ve Minimum

Tanım 7.4'de iki sayının maksimumunu ve minimumunu tanımlamıştık. Şimdi aynı fikri kümelerle taşıyalım: bir kümenin "en büyük elemanı", hem kümeye ait olan hem de bütün elemanları geçen sayıdır.

Tanım 10.3 (Kümenin Maksimumu ve Minimumu). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

- $M \in A$ ve M , A 'nın bir üst sınırı ise M 'ye A 'nın **maksimumu** (en büyük elemanı) denir ve $M = \max A$ yazılır.
- $m \in A$ ve m , A 'nın bir alt sınırı ise m 'ye A 'nın **minimumu** (en küçük elemanı) denir ve $m = \min A$ yazılır.

Maksimum varsa tektir: M_1 ve M_2 iki maksimum olsa, $M_1 \in A$ ve M_2 üst sınır olduğundan $M_1 \leq M_2$; simetrik biçimde $M_2 \leq M_1$; dolayısıyla $M_1 = M_2$ olur. Aynı akıl yürütme minimum için de geçerlidir.

Örnek 10.1'ndeki kümelerle dönelim. $A = [0, 1)$ için $\min A = 0$ 'dır, ama $\max A$ **yoktur**: 1 kümeye ait değildir ve kümeye ait hiçbir sayı üst sınır olamaz, çünkü $x \in A$ ise Önerme 7.11 gereği $x < \frac{x+1}{2} < 1$ olur; $x \geq 0$ nedeniyle $\frac{x+1}{2} > 0$ olduğundan $\frac{x+1}{2} \in A$ 'dır ve x 'i geçer. B kümesi için $\max B = 1$ 'dir; minimum yoktur, çünkü $\frac{1}{n} \in B$ ise $\frac{1}{n+1} \in B$ daha küçüktür. $D = \{2, 5, 7\}$ için $\max D = 7$, $\min D = 2$ 'dir.

Sonuncu örnek genel bir olgunun parçasıdır: elemanları $a_1, \dots, a_n$ diye sonlu bir liste hâlinde yazılabilen, yani **sonlu** her küme için maksimum ve minimum vardır.

Önerme 10.1 (Sonlu Kümelerde Maksimum ve Minimum). $n \in \mathbb{N}$ olsun. Elemanları $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan her $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ kümesinin maksimumu ve minimumu vardır.

İspat.

n üzerinden tümevarım yapalım (Teorem 9.1). $n = 1$ için $A = \{a_1\}$ ve $\max A = \min A = a_1$ 'dir.

İddia n elemanlı kümeler için doğru olsun; $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ alalım. $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$ kümesinin tümevarım varsayımıyla bir maksimumu vardır, buna M' diyelim. $M = \max\{M', a_{n+1}\}$ olsun (Tanım 7.4). M , A 'nın elemanıdır, çünkü ya M' ya da a_{n+1} 'e eşittir. Ayrıca M bir üst sınırdır: $a_i \in A'$ için $a_i \leq M' \leq M$ ve $a_{n+1} \leq M$. Demek ki $M = \max A$. Minimum için aynı akıl yürütme $\min\{m', a_{n+1}\}$ ile yapılır. ■

10.3 Supremum ve İnfimum

$[0, 1)$ kümesinin maksimumu yoktur; ama 1 sayısı bu küme için “en büyük eleman” rolünü neredeyse üstlenir: bütün elemanları geçer ve ondan küçük hiçbir sayı bunu başaramaz. Bu gözlem, maksimum olmadığında da işe yarayan bir kavrama götürür: üst sınırların en küçüğü.

Tanım 10.4 (Supremum ve İnfimum). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

- Bir $s \in \mathbb{R}$ sayısı şu iki koşulu sağlıyorsa s 'ye A 'nın **supremumu** (en küçük üst sınırı, least upper bound) denir ve $s = \sup A$ yazılır:

(S1) s , A 'nın bir üst sınırıdır: her $a \in A$ için $a \leq s$.

(S2) s , üst sınırların en küçüğüdür: M , A 'nın herhangi bir üst sınırı ise $s \leq M$.

- Bir $t \in \mathbb{R}$ sayısı şu iki koşulu sağlıyorsa t 'ye A 'nın **infimumu** (en büyük alt sınırı, greatest lower bound) denir ve $t = \inf A$ yazılır:

(I1) t , A 'nın bir alt sınırıdır: her $a \in A$ için $t \leq a$.

(I2) t , alt sınırların en büyüğüdür: m , A 'nın herhangi bir alt sınırı ise $m \leq t$.

(S2) koşulunun karşıt tersi çoğu zaman daha kullanışlıdır: $M < s$ ise M bir üst sınır değildir, yani s 'den küçük her M için $M < a$ olan bir $a \in A$ vardır. Supremumu bulurken hep bu iki şeyi gösteririz: verilen sayı bir üst sınırdır ve ondan küçük hiçbir sayı üst sınır değildir.

Önerme 10.2 (Supremumun Tekliği). Bir kümenin supremumu varsa tektir; aynı şey infimum için de geçerlidir.

İspat.

s_1 ve s_2 , A 'nın iki supremumu olsun. s_1 bir üst sınırdır ve s_2 bütün üst sınırlardan küçük ya da eşittir; dolayısıyla $s_2 \leq s_1$. Rollerini değiştirince $s_1 \leq s_2$. Hem $s_2 \leq s_1$ hem $s_1 \leq s_2$ olduğundan üçlem yasası (O1) ile $s_1 = s_2$. İnfimum için ispat aynıdır.

■

Önerme 10.3 (Maksimum ile Supremumun İlişkisi). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

- $\max A$ varsa $\sup A$ da vardır ve $\sup A = \max A$.
- $\sup A$ var ve $\sup A \in A$ ise $\max A$ vardır ve $\max A = \sup A$.

Aynı ifadeler min ve inf için de doğrudur.

İspat.

1. $M = \max A$ olsun. Tanım gereği M bir üst sınırdır; (S1) sağlanır. M' herhangi bir üst sınır olsun; $M \in A$ olduğundan $M \leq M'$ olur; (S2) sağlanır. Demek ki $M = \sup A$.

2. $s = \sup A \in A$ olsun. s hem kümenin elemanı hem de üst sınırdır; bu tam olarak maksimumun tanımıdır.

■

Yani maksimum varsa supremumla çakışır; supremumun fazladan sunduğu şey, maksimum **olmadığında** da bir “üst uç” belirleyebilmesidir.

Örnek 10.2 (Yarı Açık Aralığın Supremumu). $A = [0, 1)$ kümesi için $\inf A = \min A = 0$ ve $\sup A = 1$ olduğunu gösterelim; $\max A$ 'nın olmadığını görelim.

Çözüm.

$0 \in A$ ve 0 bir alt sınır olduğundan $\min A = 0$; Önerme 10.3 gereği $\inf A = 0$ 'dır.

$\sup A = 1$ için iki koşulu denetleyelim.

(S1) Her $x \in A$ için $x < 1$; dolayısıyla 1 bir üst sınırdır.

(S2) $M < 1$ olan hiçbir M 'nin üst sınır olmadığını gösterelim. $M < 0$ ise $0 \in A$ elemanı M 'yi geçer.

$0 \leq M < 1$ ise Önerme 7.11 gereği

$$M < \frac{M+1}{2} < 1$$

olur; ayrıca $\frac{M+1}{2} \geq \frac{0+1}{2} > 0$ olduğundan $\frac{M+1}{2} \in A$ 'dır ve M 'yi geçer. Her iki hâlde de M üst sınır değildir. O hâlde 1 üst sınırların en küçüğüdür: $\sup A = 1$.

$1 \notin A$ olduğundan **Önerme 10.3** gereği $\max A$ yoktur (olsaydı 1'e eşit olurdu).

■

Bu örnekteki **(S2)** adımı, “supremumun hemen altına inince kümeye rastlarız” fikrine dayanıyordu. Bu fikri ε diliyle yazmak, supremum ispatlarının standart aracıdır.

Teorem 10.1 (Supremum için Epsilon Ölçütü). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. $s = \sup A$ olması için gerek ve yeter koşul şudur:

1. s , A 'nın bir üst sınırıdır ve
2. her $\varepsilon > 0$ için $s - \varepsilon < a$ olacak biçimde bir $a \in A$ vardır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $s = \sup A$ olsun. **(S1)** gereği s üst sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $s - \varepsilon < s$ olduğundan **(S2)**'nin karşıtıyla $s - \varepsilon$ bir üst sınır değildir; yani $s - \varepsilon < a$ olan bir $a \in A$ vardır.

($\Leftarrow$ yönü) İki koşul sağlansın. **(S1)** zaten verilmiştir. **(S2)** için $M < s$ olan bir M 'nin üst sınır olamayacağını gösterelim: $\varepsilon = s - M > 0$ alalım. İkinci koşuldaki $s - \varepsilon < a$ olan bir $a \in A$ vardır; ama $s - \varepsilon = M$ 'dir, yani $M < a$. Demek ki M üst sınır değildir. O hâlde her üst sınır M için $s \leq M$ olur ve $s = \sup A$ 'dır.

■

Teorem şunu söyler: $\sup A$, kümenin elemanlarının “istenildiği kadar yaklaştığı” üst sınırdır. $s - \varepsilon$ ile s arasındaki aralık ne kadar dar olursa olsun, içinde kümeden bir eleman bulunur. İnfimum için ayna görüntüsü geçerlidir.

Teorem 10.2 (İnfimum için Epsilon Ölçütü). $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $t \in \mathbb{R}$ olsun. $t = \inf A$ olması için gerek ve yeter koşul şudur:

1. t , A 'nın bir alt sınırıdır ve
2. her $\varepsilon > 0$ için $a < t + \varepsilon$ olacak biçimde bir $a \in A$ vardır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $t = \inf A$ olsun; **(I1)** ilk koşulu verir. $\varepsilon > 0$ için $t < t + \varepsilon$ olduğundan **(I2)** gereği $t + \varepsilon$ bir alt sınır olamaz (olsaydı $t + \varepsilon \leq t$ gerekirdi). Alt sınır olmaması, $a < t + \varepsilon$ sağlayan bir $a \in A$ bulunması demektir.

($\Leftarrow$ yönü) İki koşul sağlansın. **(I1)** ilk koşulun kendisidir. **(I2)** için m , A 'nın herhangi bir alt sınırı olsun; $m \leq t$ göstermeliyiz. Tersini varsayalım: $t < m$. $\varepsilon = m - t > 0$ alınca ikinci koşuldaki $a < t + \varepsilon = m$ olan bir $a \in A$ bulunur; bu, m 'nin alt sınır olmasıyla çelişir. Demek ki $m \leq t$ ve $t = \inf A$.

■

10.4 Tamlık Aksiyomu

Şimdiye kadar supremumun ne olduğunu tanımladık, ama var olduğunu söylemedik. Var olmayabilir de: $\mathbb{Q}$ içinde çalışsaydık, $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ kümesi üstten sınırlı olduğu hâlde rasyonel bir supremuma sahip olmazdı; bunu ileride kanıtlayacağız (**Sonuç 13.1**). Reel sayıları reel sayı yapan, bu durumun $\mathbb{R}$ 'de asla ortaya çıkmamasıdır. Bu bir aksiyomdur; ispatlanmaz, kabul edilir.

! Tamlık Aksiyomu

Reel sayıların üstten sınırlı ve boş olmayan her A alt kümesinin bir supremumu vardır. Yani $A \neq \emptyset$ ve A üstten sınırlıysa $\sup A \in \mathbb{R}$ vardır.

Aksiyomun iki hipotezi de gereklidir: boş kümenin her reel sayı üst sınırı olduğundan en küçük üst sınırı olamaz; üstten sınırsız kümenin ise hiç üst sınırı yoktur. Aksiyom yalnızca supremumdan söz eder; infimum için ayrı bir aksiyom gerekmez, çünkü kümeyi “aynalarak” supremuma indirgeyebiliriz. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için

$$-A = \{-a : a \in A\}$$

yazalım; $-A$, A 'nın elemanlarının toplamsal terslerinden oluşan kümedir.

Teorem 10.3 (İnfimumun Varlığı). *Altta sınırlı ve boş olmayan her $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin infimumu vardır ve*

$$\inf A = -\sup(-A).$$

İspat.

m , A 'nın bir alt sınırı olsun. Her $a \in A$ için $m \leq a$; eksi almak eşitsizliğin yönünü çevirir: $m < a$ hâlinde **Önerme 7.3** gereği $-a < -m$, $m = a$ hâlinde ise $-a = -m$ olur. Her iki hâlde $-a \leq -m$ 'dir. Demek ki $-m$, $-A$ kümesinin bir üst sınırıdır. $A \neq \emptyset$ olduğundan $-A \neq \emptyset$ 'dir. Tamlık Aksiyomu gereği $s = \sup(-A)$ vardır. $\inf A = -s$ olduğunu gösterelim.

(I1) $a \in A$ olsun. $-a \in -A$ ve s üst sınır olduğundan $-a \leq s$, yani $-s \leq a$. Demek ki $-s$ bir alt sınırıdır.

(I2) m' , A 'nın herhangi bir alt sınırı olsun. Yukarıdaki gibi $-m'$, $-A$ 'nın bir üst sınırıdır; s en küçük üst sınır olduğundan $s \leq -m'$, yani $m' \leq -s$.

Her iki koşul sağlandığından $\inf A = -s = -\sup(-A)$.

■

Bu teorem sayesinde “altta sınırlı, boş olmayan her kümenin infimumu vardır” ifadesi de elimizdedir; ileride ikisini birlikte “Tamlık Aksiyomu gereği” diyerek kullanacağız.

10.4.1 Doğal Sayılar Üstten Sınırlı Değildir

Tamlık Aksiyomu'nun ilk uygulaması, sezgisel olarak apaçık ama aksiyomlardan çıkarılması gereken bir olgudur: 1, 2, 3, ... sayılarının hepsini geçen bir reel sayı yoktur. Bu, cebirsel ve sıralama aksiyomlarından çıkmaz; ispatta tamlık gerçekten kullanılır.

Teorem 10.4 (Doğal Sayılar Kümesi Üstten Sınırlı Değildir). $\mathbb{N}$ kümesi üstten sınırlı değildir. Başka bir deyişle, her $x \in \mathbb{R}$ için $n > x$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım: $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olsun. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ olduğundan Tamlık Aksiyomu gereği $s = \sup \mathbb{N}$ vardır. **Teorem 10.1**'i $\varepsilon = 1$ ile uygulayalım: $s - 1 < n$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Her iki tarafa 1 ekleyince $s < n + 1$ olur. Ama **Önerme 9.2** gereği $n + 1 \in \mathbb{N}$ 'dir; yani $\mathbb{N}$ 'nin bir elemanı, üst sınır olan s 'yi geçmiştir. Bu bir çelişkidir. O hâlde $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

İkinci ifade birincisinin yeniden yazılışıdır: $x \in \mathbb{R}$ verilsin; $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olmadığından x bir üst sınır değildir, yani $n > x$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

■

Bu teorem, “her pozitif ε için $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak kadar büyük bir n vardır” biçimindeki sayısız limit hesabının temelidir. Sonraki bölümlerde aynı olgu **Arşimet özelliği** adıyla genelleştirilecek (**Teorem 12.1**); burada teoremi doğrudan kullanarak iki temel kümenin supremum ve infimumunu bulalım.

Örnek 10.3 (Bir Eksi Bir Bölü n Kümesi). $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ kümesi için $\inf A = \min A = 0$ ve $\sup A = 1$ olduğunu gösterelim.

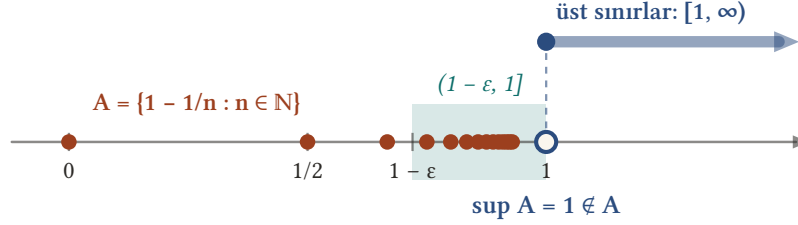
Çözüm.

İnfimum. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan ($n \geq 1$ 'dir; $n = 1$ ise eşitlik, $n > 1$ ise **Önerme 7.10**) $1 - \frac{1}{n} \geq 0$; yani 0 bir alt sınırıdır. $n = 1$ için $1 - \frac{1}{1} = 0 \in A$. Kümeye ait bir alt sınır minimumdur: $\min A = 0$ ve **Önerme 10.3** gereği $\inf A = 0$.

Supremum. **Teorem 10.1**'in iki koşulunu denetleyelim.

Üst sınır: Her n için $\frac{1}{n} > 0$ olduğundan $1 - \frac{1}{n} < 1$. Demek ki 1 bir üst sınırıdır.

Epsilon koşulu: $\varepsilon > 0$ verilsin. $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$ olacak bir n arıyoruz; bu eşitsizlik $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ile denktir. **Teorem 10.4** gereği $n > \frac{1}{\varepsilon}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. n ve ε pozitif olduğundan her iki tarafı $\frac{\varepsilon}{n} > 0$ ile çarpmak $\varepsilon > \frac{1}{n}$ verir. Bu n için $1 - \frac{1}{n} \in A$ ve $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$ olur. Her iki koşul sağlandığından $\sup A = 1$. $1 \notin A$ 'dır, çünkü $1 - \frac{1}{n} = 1$ olması $\frac{1}{n} = 0$ gerektirir; dolayısıyla $\max A$ yoktur.



Şekil 10.1: $A = \{1 - 1/n\}$ kümesinin elemanları 1'e soldan yığılır; 1 kümeye ait olmayan (içi boş) en küçük üst sınırdır. 1'in sağındaki her sayı üst sınırdır ve 1'in hemen solundaki her $(1 - \varepsilon, 1]$ penceresi kümeden en az bir eleman içerir.

Şekil, durumu özetliyor: kümenin elemanları 1'e soldan yığılır, 1'in sağındaki her sayı üst sınırdır ve 1'in hemen solundaki her $(1 - \varepsilon, 1]$ penceresi kümeden en az bir eleman içerir.

Örnek 10.4 (Bir Bölü n Kümesinin İnfimumu). $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi için $\sup B = \max B = 1$ ve $\inf B = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Örnek 10.1'nde 1'in kümeye ait bir üst sınır olduğunu görmüştük; dolayısıyla $\max B = \sup B = 1$. $\inf B = 0$ için **Teorem 10.2**'i kullanalım. 0 bir alt sınırdır, çünkü her n için $\frac{1}{n} > 0$. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$ olan bir n gerekiyor. Bir önceki örnekteki gibi **Teorem 10.4** ile $n > \frac{1}{\varepsilon}$ seçilir ve $\frac{1}{n} < \varepsilon$ elde edilir. O hâlde $\inf B = 0$; $0 \notin B$ olduğundan $\min B$ yoktur.

10.5 Supremumun Özellikleri

Supremum, kümeler üzerindeki basit işlemlerle uyumludur. Aşağıdaki özellikler ileride dizilerin limitleriyle ilgili teoremlerde defalarca kullanılacaktır. Gösterimi sabitleyelim: $A, B \subset \mathbb{R}$ boş olmayan kümeler ve $c \in \mathbb{R}$ için

$$cA = \{ca : a \in A\}, \quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Önerme 10.4 (Supremumun Özellikleri). $A, B \subset \mathbb{R}$ boş olmayan kümeler olsun.

1. **Alt küme.** $A \subset B$ ve B üstten sınırlıysa A da üstten sınırlıdır ve $\sup A \leq \sup B$. Benzer biçimde B alttan sınırlıysa $\inf B \leq \inf A$.
2. **Pozitif sabitle çarpma.** $c > 0$ ve A üstten sınırlıysa $\sup(cA) = c \sup A$; A alttan sınırlıysa $\inf(cA) = c \inf A$.
3. **Aynalama.** A alttan sınırlıysa $\sup(-A) = -\inf A$; A üstten sınırlıysa $\inf(-A) = -\sup A$.
4. **Toplam.** A ve B üstten sınırlıysa $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; alttan sınırlıysa $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

İspat.

1. $\sup B$, B 'nin bir üst sınırdır; $A \subset B$ olduğundan her $a \in A$ aynı zamanda B 'nin elemanıdır ve $a \leq \sup B$ sağlar. Demek ki $\sup B$, A 'nın da bir üst sınırdır; A üstten sınırlıdır ve Tamlık Aksiyomu gereği $\sup A$ vardır. (S2) koşuluyla $\sup A \leq \sup B$. İnfimum ifadesi aynı biçimde (I2) ile elde edilir.

2. $s = \sup A$ olsun; $cs = \sup(cA)$ olduğunu [Teorem 10.1](#) ile gösterelim. Her $a \in A$ için $a \leq s$ ve $c > 0$ olduğundan $ca \leq cs$; yani cs, cA 'nın bir üst sınırıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\frac{\varepsilon}{c} > 0$ olduğundan [Teorem 10.1](#) gereği $s - \frac{\varepsilon}{c} < a$ olan bir $a \in A$ vardır; c ile çarpınca $cs - \varepsilon < ca$ olur ve $ca \in cA$ 'dır. Her iki koşul sağlandı: $\sup(cA) = cs$. İnfimum için aynı ispat [Teorem 10.2](#) ile tekrarlanır.

3. İlk eşitlik [Teorem 10.3](#)'ta kanıtlandı: $\inf A = -\sup(-A)$, yani $\sup(-A) = -\inf A$. İkincisi için bu eşitliği $-A$ kümesine uygulayalım: A üstten sınırlıysa $-A$ alttan sınırlıdır ve $-(-A) = A$ olduğundan

$$\sup A = \sup(-(-A)) = -\inf(-A)$$

elde edilir; buradan $\inf(-A) = -\sup A$.

4. $s = \sup A$ ve $t = \sup B$ olsun. Her $a \in A, b \in B$ için $a \leq s$ ve $b \leq t$; taraf tarafa toplayınca $a + b \leq s + t$. Demek ki $s + t, A + B$ 'nin bir üst sınırıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. [Teorem 10.1](#)'i $\frac{\varepsilon}{2}$ ile iki kez uygulayalım: $s - \frac{\varepsilon}{2} < a$ olan bir $a \in A$ ve $t - \frac{\varepsilon}{2} < b$ olan bir $b \in B$ vardır. Toplayınca

$$(s + t) - \varepsilon < a + b \in A + B$$

olur. [Teorem 10.1](#) gereği $\sup(A + B) = s + t$. İnfimum ifadesi, üçüncü özellik yardımıyla $-(A + B) = (-A) + (-B)$ eşitliğinden ya da doğrudan [Teorem 10.2](#) ile elde edilir.

■

⚠ Negatif sabitle çarpma

$c < 0$ ise çarpma sıralamayı çevirdiği için roller değişir: $\sup(cA) = c \inf A$ ve $\inf(cA) = c \sup A$. Bunu görmek için $cA = (-c)(-A)$ yazıp ikinci ve üçüncü özellikleri art arda uygulamak yeterlidir; $-c > 0$ olduğundan $\sup(cA) = (-c) \sup(-A) = (-c)(-\inf A) = c \inf A$.

10.6 İç İç Aralıklar

Tamlık Aksiyomu'nun geometrik bir yüzü vardır: reel doğru üzerinde giderek daralan kapalı aralıklar alırsak, hepsinin içinde kalan en az bir nokta bulunur. Sezgi şöyledir: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ aralıklarının sol uçları sağa, sağ uçları sola doğru ilerler; sol uçlar hiçbir sağ ucu geçemez. Sol uçların "ulaştığı en sağ nokta" olan $\sup\{a_n\}$ bütün aralıklarda kalır.

Tanım 10.5 (İç İç Aralıklar). Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olmak üzere $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun ([Tanım 7.3](#)). Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_{n+1} \subset I_n$ sağlanıyorsa $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indisli ailesine ([Tanım 3.8](#)) **iç içe aralıklar** (nested intervals) denir.

İç içe olma koşulu uç noktalar cinsinden şöyle okunur: $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$ olduğundan $a_n \leq a_{n+1}$; benzer biçimde $b_{n+1} \leq b_n$. Yani

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

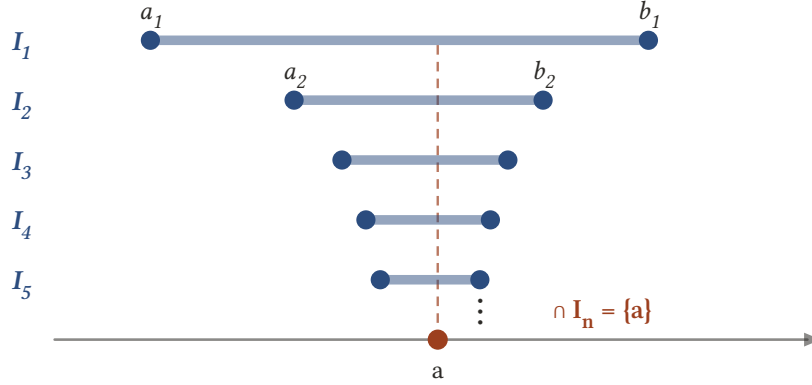
Teorem 10.5 (İç İç Aralıklar Teoremi (Cantor)). $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}, I_n = [a_n, b_n]$ biçiminde iç içe kapalı aralıklar olsun.

1. Bu aralıkların kesişimi boş değildir. Daha kesin olarak $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ vardır, $a \leq b$ 'dir ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b].$$

2. Ayrıca aralıkların uzunlukları istenildiği kadar küçülüyorsa — yani her $\varepsilon > 0$ için $b_n - a_n < \varepsilon$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ varsa — kesişim tek noktadan oluşur:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$$



Şekil 10.2: İç içe kapalı aralıklar $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$: sol uçlar artar, sağ uçlar azalır ve uzunluklar sıfıra gider. Kesişim boş değildir; tek bir a noktasından oluşur.

İspat.

Adım 1: Her sol uç, her sağ ucun solundadır. $n, m \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_m$ olduğunu gösterelim. Önce $n \leq m$ ise $a_n \leq a_m$ olduğunu görelim. n sabit olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ üzerinden tümevarımla (Teorem 9.1) $a_n \leq a_{n+k}$ elde edilir: $k = 1$ için bu, $a_n \leq a_{n+1}$ eşitsizliğidir; $a_n \leq a_{n+k}$ ise $a_{n+k} \leq a_{n+k+1}$ ile birlikte (O2) $a_n \leq a_{n+k+1}$ verir. Şimdi $n \leq m$ olsun: $n = m$ ise $a_n \leq a_m$ açıktır; $n < m$ ise Önerme 9.3 (4) ile $k = m - n \in \mathbb{N}$ ve $a_n \leq a_{n+k} = a_m$. Aynı biçimde $n \leq m$ için $b_m \leq b_n$. Şimdi:

- $n \leq m$ ise $a_n \leq a_m \leq b_m$;
- $m < n$ ise $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Her iki hâlde $a_n \leq b_m$.

Adım 2: a ve b vardır ve $a \leq b$. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ boş değildir ve Adım 1 gereği b_1 (aslında her b_m) bir üst sınırdır. Tamlık Aksiyomu ile $a = \sup A$ vardır. Benzer biçimde $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ boş değildir ve her a_n bir alt sınırdır; Teorem 10.3 ile $b = \inf B$ vardır. Her m için b_m , A 'nın üst sınırı olduğundan (S2) ile $a \leq b_m$; yani a , B 'nin bir alt sınırıdır ve (I2) ile $a \leq b$.

Adım 3: Kesişim $[a, b]$ 'dir. $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Leftrightarrow \text{her } n \text{ için } a_n \leq x \leq b_n.$$

“Her n için $a_n \leq x$ ” demek, x 'in A 'nın bir üst sınırı olması demektir; bu da (S1)–(S2) gereği $a \leq x$ ile denktir (bir yönü: a en küçük üst sınırdır; diğer yönü: $a_n \leq a \leq x$). Aynı biçimde “her n için $x \leq b_n$ ”, $x \leq b$ ile denktir. Dolayısıyla x kesişimdedir ancak ve ancak $a \leq x \leq b$ ise; kesişim $[a, b]$ 'dir ve $a \leq b$ olduğundan boş değildir (a bu kümededir).

Adım 4: Uzunluklar küçülüyorsa tek nokta. $a < b$ olsa $\varepsilon = b - a > 0$ alalım. Hipotez gereği $b_n - a_n < \varepsilon$ olan bir n vardır. Ama Adım 3'e göre $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, dolayısıyla

$$b - a \leq b_n - a_n < \varepsilon = b - a$$

olur; bu bir çelişkidir. O hâlde $a = b$ ve kesişim $[a, a] = \{a\}$ 'dir.

■

Teorem, “reel doğrudan boşluk yoktur” cümlesinin en somut hâlidir: aralıkları daraltarak bir noktayı sıkıştırdığımızda o nokta gerçekten oradadır. İleride bu teoremle Bolzano–Weierstrass teoremini (Teorem 24.5) ve Heine–Borel teoremini (Teorem 18.5) kanıtlayacağız; dizilerin limitini öğrendikten sonra hipotezdeki “her ε için $b_n - a_n < \varepsilon$ olan n var” koşulu, monoton yakınsaklık teoremi (Teorem 23.1) yardımıyla $\lim(b_n - a_n) = 0$ biçiminde yeniden yazılacak ve teorem bu dille yeniden ispatlanacaktır (Teorem 24.7).

⚠ Aralıklar kapalı olmak zorundadır

Teoremdaki “kapalı” sözcüğü süs değildir. $J_n = (0, \frac{1}{n})$ açık aralıkları da iç içedir ($\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$) ve uzunlukları $\frac{1}{n}$ küçülür; ama kesişimleri **boş**dur. Gerçekten, bir x bütün J_n ’lerde olsaydı $x > 0$ ve her n için $x < \frac{1}{n}$ olurdu. İkinci eşitsizliği $\frac{n}{x} > 0$ ile çarpınca her $n \in \mathbb{N}$ için $n < \frac{1}{x}$ elde edilir; yani $\frac{1}{x}$, $\mathbb{N}$ ’nin bir üst sınırı olurdu. Bu, [Teorem 10.4](#) ile çelişir.

Sınırlılık da gereklidir: $[n, \infty)$ kapalı ama sınırsız aralıkları iç içedir ve kesişimleri yine boşdur. Gerçekten, bir x bütün $[n, \infty)$ aralıklarında olsaydı her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq x$ olur, yani x , $\mathbb{N}$ ’nin bir üst sınırı olurdu; bu, [Teorem 10.4](#) ile çelişir. Bu tür kesişim ve birleşimleri sonraki bölümlerde Arşimet özelliğiyle daha ayrıntılı inceleyeceğiz.

Örnek 10.5 (Sıfıra Daralan Aralıklar). $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ aralıklarının iç içe olduğunu gösterelim ve kesişimlerini bulalım.

Çözüm.

$n < n+1$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ve $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$; dolayısıyla $I_{n+1} \subset I_n$ ’dir. Aralıklar kapalı ve sınırlıdır.

Uzunluk koşulunu denetleyelim: $b_n - a_n = \frac{2}{n} \cdot \varepsilon > 0$ verilsin; [Teorem 10.4](#) ile $n > \frac{2}{\varepsilon}$ olan bir n seçersek $\frac{2}{n} < \varepsilon$ olur. [Teorem 10.5](#) gereği kesişim tek bir noktadır: $\{a\}$, $a = \sup\{-\frac{1}{n}\}$.

a ’yı bulalım. [Örnek 10.4](#)’da $\inf\{\frac{1}{n}\} = 0$ bulmuştuk; [Önerme 10.4](#) (aynalama) ile $\sup\{-\frac{1}{n}\} = -\inf\{\frac{1}{n}\} = 0$. O hâlde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}.$$

Doğrudan da görülebilir: 0 her aralıktadır; $x \neq 0$ ise $|x| > 0$ ve $n > \frac{1}{|x|}$ seçildiğinde $\frac{1}{n} < |x|$ olduğundan $x \notin I_n$.

■

10.7 Alıştırmalar

Alıştırma 10.1 (Supremum ve İnfimum Alıştırmaları).

- $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin supremumunu ve infimumunu bulunuz; maksimum ve minimumunun olup olmadığını belirleyiniz.
- $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi için $\sup B$ ve $\inf B$ değerlerini ispatlayarak bulunuz.
- A ve B üstten sınırlı, boş olmayan kümeler olsun. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ olduğunu gösteriniz.
- $A, B \subset \mathbb{R}$ boş olmayan kümeler ve her $a \in A, b \in B$ için $a \leq b$ olsun. $\sup A$ ve $\inf B$ ’nin var olduğunu ve $\sup A \leq \inf B$ sağlandığını gösteriniz.
- A sınırlı ve boş olmayan bir küme olsun. $D = \{a - a' : a, a' \in A\}$ kümesi için $\sup D = \sup A - \inf A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ yazalım.

İnfimum: $n = 1$ için $\frac{1}{2} \in A$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1}$ olduğunu görelim: paydalar pozitif olduğundan bu eşitsizlik $n+1 \leq 2n$, yani $1 \leq n$ ile denktir ve doğrudur. Demek ki $\frac{1}{2}$ kümeye ait bir alt sınırdır: $\min A = \inf A = \frac{1}{2}$.

Supremum: $\frac{1}{n+1} > 0$ olduğundan her eleman 1’den küçüktür; 1 üst sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. [Teorem 10.4](#) ile $n > \frac{1}{\varepsilon}$ olan bir n seçelim; $n+1 > n$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ve $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1} \in A$. [Teorem 10.1](#) gereği $\sup A = 1$. $\frac{n}{n+1} = 1$ olması $n = n+1$, yani $0 = 1$ gerektirdiğinden $1 \notin A$; maksimum yoktur.

b) **Supremum:** $n, m \geq 1$ olduğundan $\frac{1}{n} \leq 1$ ve $\frac{1}{m} \leq 1$; toplam en çok 2’dir. $n = m = 1$ için $2 \in B$. O hâlde $\max B = \sup B = 2$.

İnfimum: Bütün elemanlar pozitif olduğundan 0 bir alt sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $n > \frac{2}{\varepsilon}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ alıp $m = n$ seçelim:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon = 0 + \varepsilon.$$

Teorem 10.2 gereği $\inf B = 0$. Pozitif sayıların toplamı 0 olamayacağından $0 \notin B$; minimum yoktur.

c) $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$ ve $s = \max\{\alpha, \beta\}$ olsun.

Üst sınır: $x \in A \cup B$ ise ya $x \in A$ ve $x \leq \alpha \leq s$, ya da $x \in B$ ve $x \leq \beta \leq s$. Her hâlde $x \leq s$.

En küçük üst sınır: M , $A \cup B$ 'nin herhangi bir üst sınırı olsun. $A \subset A \cup B$ olduğundan M , A 'nın da üst sınırıdır; **(S2)** ile $\alpha \leq M$. Aynı biçimde $\beta \leq M$. İkisinin büyüğü de M 'yi aşamaz: $s \leq M$. Demek ki $s = \sup(A \cup B)$.

d) $B \neq \emptyset$ olduğundan bir $b_0 \in B$ seçelim; hipotez gereği her $a \in A$ için $a \leq b_0$, yani A üstten sınırlıdır ve Tamlık Aksiyomu ile $\sup A$ vardır. Benzer biçimde herhangi bir $a_0 \in A$, B 'nin alt sınırıdır; **Teorem 10.3** ile $\inf B$ vardır.

Şimdi keyfi bir $b \in B$ alalım. Her $a \in A$ için $a \leq b$ olduğundan b , A 'nın bir üst sınırıdır; **(S2)** ile $\sup A \leq b$. Bu her $b \in B$ için doğru olduğundan $\sup A$, B 'nin bir alt sınırıdır; **(I2)** ile $\sup A \leq \inf B$.

e) $D = A + (-A)$ olduğuna dikkat edelim: $a - a' = a + (-a')$ ve $-a' \in -A$. A sınırlı olduğundan $-A$ da sınırlıdır. **Önerme 10.4**'nin dördüncü ve üçüncü maddeleriyle

$$\sup D = \sup A + \sup(-A) = \sup A + (-\inf A) = \sup A - \inf A.$$

■

Tamlık Aksiyomu ile reel sayıların aksiyom listesi tamamlandı. Bundan sonraki bölümlerde bu aksiyomların içinde yaşayan tanıdık sayı kümelerini inceleyeceğiz: önce tam sayılar ve rasyonel sayılar — **Tam Sayılar ve Rasyonel Sayılar**.

11. Tam Sayılar ve Rasyonel Sayılar

Reel sayıların aksiyomlarını tamamladık ve önceki bölümde doğal sayılar kümesini bu aksiyomların içinde inşa ettik. Ne var ki $\mathbb{N}$ toplama ve çarpma altında kapalı olsa da çıkarmaya ve bölmeye izin vermez: $3 - 5$ ya da $\frac{3}{5}$ doğal sayı değildir. Bu bölümde doğal sayıları iki adımda genişletiyoruz. Önce toplamsal tersleri ve sıfırı ekleyerek **tam sayılar** kümesi $\mathbb{Z}$ 'yi, sonra bölümleri ekleyerek **rasyonel sayılar** kümesi $\mathbb{Q}$ 'yu tanımlayacağız.

Her iki küme için aynı soruları soracağız: Hangi işlemler altında kapalıdır? Sınırlı mıdır? Supremum ve infimum bu kümelerde nasıl davranır? Tam sayılar için verilecek **maksimum ilkesi**, ileride taban fonksiyonunu ve bölme algoritmasını kuracak; rasyonel sayıların bir **sıralı cisim** oluşu ise reel sayılardan tek farkının tamlık olduğunu gösterecek.

11.1 Tam Sayılar Kümesi

Doğal sayılar reel sayıların alt kümesi olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ sayısının tek bir toplamsal tersi $-n$ vardır (Önerme 6.2). Bu terslerin kümesini

$$-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

ile gösterelim. Tam sayılar, doğal sayılar ile bunların terslerini ve sıfırı bir araya getirir.

Tanım 11.1 (Tam Sayılar Kümesi). Doğal sayılardan, doğal sayıların toplamsal terslerinden ve sıfırdan oluşan kümeye **tam sayılar kümesi** (set of integers) denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ya da } x \in \mathbb{N} \text{ ya da } -x \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathbb{N}$ 'nin elemanlarına **pozitif tam sayılar** da denir ve $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ yazılır; $-\mathbb{N}$ 'nin elemanlarına **negatif tam sayılar** denir ve $\mathbb{Z}^- = -\mathbb{N}$ yazılır. Böylece $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ olur.

Adlar yerindedir: $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 1 > 0$ (Önerme 9.3 ve Önerme 7.7), dolayısıyla $-n < 0$ 'dır. Yani $\mathbb{Z}^+$ 'nin elemanları gerçekten pozitif, $\mathbb{Z}^-$ 'nin elemanları gerçekten negatiftir ve üç parça birbirinden ayrıktır. Tanımdan doğrudan $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ görülür.

Tam sayıların toplama ve çarpma altında kapalı olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için doğal sayılara ilişkin, önceki bölümde kanıtladığımız küçük ama önemli bir olguyu hatırlayalım (Önerme 9.3): $m, b \in \mathbb{N}$ ve $b < m$ ise $m - b \in \mathbb{N}$ 'dir; yani büyük bir doğal sayıdan küçüğünü çıkarınca yine doğal sayı elde edilir. Aynı önerme $m \neq 1$ için $m - 1 \in \mathbb{N}$ olduğunu da söyler.

Önerme 11.1 (Tam Sayılar İşlemler Altında Kapalıdır). $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

1. $-m \in \mathbb{Z}$,
2. $m + n \in \mathbb{Z}$ ve $m - n \in \mathbb{Z}$,
3. $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

İspat.

1. $m = 0$ ise $-m = 0 \in \mathbb{Z}$. $m \in \mathbb{N}$ ise $-m \in -\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. $m \in -\mathbb{N}$ ise $m = -a$ olacak bir $a \in \mathbb{N}$ vardır ve $-m = a \in \mathbb{N}$.

2. **Toplam için durumlara ayıralım.**

Durum 1: En az biri sıfır. $m = 0$ ise $m + n = n \in \mathbb{Z}$; $n = 0$ hâli aynıdır.

Durum 2: İkisi de pozitif ($m, n \in \mathbb{N}$). Önerme 9.2 gereği $m + n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Durum 3: İkisi de negatif ($m, n \in -\mathbb{N}$). $m = -a, n = -b$ olacak $a, b \in \mathbb{N}$ vardır ve

$$m + n = (-a) + (-b) = -(a + b).$$

$a + b \in \mathbb{N}$ olduğundan $-(a + b) \in -\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Durum 4: Biri pozitif, diğeri negatif. *Toplama değişmeli olduğundan* $m \in \mathbb{N}$ ve $n \in -\mathbb{N}$ alabiliriz; $n = -b$, $b \in \mathbb{N}$ olsun. $m + n = m - b$ 'dir. Üçlem yasasına göre (Bölüm 7.1) üç alt durum vardır:

- $m > b$ ise **Önerme 9.3** ile $m - b \in \mathbb{N}$.
- $m < b$ ise aynı önermeyle $b - m \in \mathbb{N}$ ve $m - b = -(b - m) \in -\mathbb{N}$.
- $m = b$ ise $m - b = 0 \in \mathbb{Z}$.

Bütün durumlarda $m + n \in \mathbb{Z}$. Fark için: $-n \in \mathbb{Z}$ (birinci madde) ve $m - n = m + (-n)$ iki tam sayının toplamıdır.

3. Çarpım için de durumlara ayıralım. Biri sıfırsa çarpım $0 \in \mathbb{Z}$ 'dir (**Önerme 6.9**). İkisi de $\mathbb{N}$ 'deyse **Önerme 9.2** gereği çarpım $\mathbb{N}$ 'dedir. İkisi de negatifse $m = -a$, $n = -b$ ile işaret kuralları (**Önerme 6.12**) gereği $mn = (-a)(-b) = ab \in \mathbb{N}$. Biri pozitif biri negatifse, $m \in \mathbb{N}$ ve $n = -b$ diyelim: yine **Önerme 6.12** ile $mn = m(-b) = -(mb)$ ve $mb \in \mathbb{N}$ olduğundan $mn \in -\mathbb{N}$.

■

Bu önerme, tam sayılarla toplama, çıkarma ve çarpma yaparken kümeden çıkmadığımızı garanti eder. Bölme ise böyle değildir; bunu anlamak için tam sayıların “içinde” hangi tam sayıların bulunmadığını bilmemiz gerekir.

Lemma 11.1 (Ardışık Tam Sayılar Arasında Tam Sayı Yoktur).

1. $k \in \mathbb{Z}$ ve $k > 0$ ise $k \in \mathbb{N}$ 'dir; dolayısıyla $k \geq 1$ 'dir. Özel olarak $0 < k < 1$ olan bir tam sayı yoktur.
2. $n \in \mathbb{Z}$ için $n < k < n + 1$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ yoktur.

İspat.

1. $k \in \mathbb{Z}$ ve $k > 0$ olsun. $k \neq 0$ 'dır. $k \in -\mathbb{N}$ olsaydı $k = -a$, $a \in \mathbb{N}$ olurdu; ama $a \geq 1 > 0$ olduğundan $k = -a < 0$ olurdu, bu $k > 0$ ile çelişir. Geriye $k \in \mathbb{N}$ kalır; **Önerme 9.3** gereği $1 = \min \mathbb{N}$ olduğundan $k \geq 1$.

2. $n < k < n + 1$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ olsaydı, $j = k - n$ sayısı **Önerme 11.1** ile bir tam sayı olur ve $0 < j < 1$ sağlardı. Bu, birinci maddeyle çelişir.

■

i Tam sayılar toplamada gruptur, çarpmada değildir

Bir G kümesi üzerindeki bir $*$ işlemi *birleşmeli* ise, G 'de bir *birim eleman* varsa ve her elemanın G içinde bir *tersi* varsa $(G, *)$ ikilisine **grup** (group) denir; işlem ayrıca değişmeli ise gruba **değişmeli grup** denir.

$(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli bir gruptur: toplama **Önerme 11.1** ile $\mathbb{Z}$ 'de kalır, birleşme ve değişme özellikleri reel sayılardan miras alınır, $0 \in \mathbb{Z}$ birim elemandır ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $-m \in \mathbb{Z}$ 'dir.

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ise grup **değildir**. Sıfırın çarpımsal tersi hiç yoktur. $m \in \mathbb{N}$ ve $m \neq 1$ ise $m \geq 2 > 1$ 'dir (**Önerme 9.3**); **Önerme 7.9** ile $\frac{1}{m} > 0$ ve $m > 1$ eşitsizliğini $\frac{1}{m} > 0$ ile çarparak $1 > \frac{1}{m}$ buluruz. Yani $0 < \frac{1}{m} < 1$, dolayısıyla **Lemma 11.1** gereği $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$. $m \in -\mathbb{N}$ ve $m \neq -1$ ise $\frac{1}{m} = -\frac{1}{-m}$ için $-1 < \frac{1}{m} < 0$ olur; -1 ile 0 ardışık tam sayılar olduğundan yine **Lemma 11.1** gereği $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$. Çarpımsal tersi tam sayı olan yalnızca 1 ve -1 'dir.

$\mathbb{N}$ ise ne toplamada ne çarpmada gruptur: $0 \notin \mathbb{N}$ olduğundan toplamsal birim eleman yoktur; 2 'nin çarpımsal tersi $\frac{1}{2}$ doğal sayı değildir.

11.2 Tam Sayılarda Sınırlılık ve Maksimum İlkesi

Doğal sayıların üstten sınırlı olmadığını Tamlık Aksiyomu'ndan çıkarmıştık (**Teorem 10.4**). Tam sayılar her iki yönde de sınırsızdır.

Teorem 11.1 (Tam Sayılar Kümesi Sınırsızdır). $\mathbb{Z}$ ne üstten ne alttan sınırlıdır; dolayısıyla sınırsız bir kümedir.

İspat.

Üstten sınırsızlık. $M, \mathbb{Z}$ 'nin bir üst sınırı olsaydı, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq M$ olur ve $M, \mathbb{N}$ 'nin de üst sınırı olurdu. Bu, [Teorem 10.4](#) ile çelişir.

Altta sınırsızlık. $m, \mathbb{Z}$ 'nin bir alt sınırı olsaydı, $-\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq -n$, yani $n \leq -m$ olurdu. O zaman $-m, \mathbb{N}$ 'nin bir üst sınırı olurdu; yine [Teorem 10.4](#) ile çelişki.

Tanım 10.2 gereği bir küme ancak hem üstten hem alttan sınırlıysa sınırlıdır; $\mathbb{Z}$ ikisini de sağlamadığından sınırsızdır.

⚠ İyi sıralama ilkesi tam sayılarda geçersizdir

Teorem 9.2, $\mathbb{N}$ 'nin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı olduğunu söyler. Bu ilke $\mathbb{Z}$ 'ye taşınmaz, çünkü $\mathbb{Z}$ alttan sınırlı değildir. Örneğin $-\mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1\}$ kümesinin minimumu yoktur: $-n \in -\mathbb{N}$ ise $-(n+1) \in -\mathbb{N}$ daha küçüktür. Ancak alttan sınırlılık eklenince ilke geri gelir; aşağıdaki teorem ve sonucu bunu söyler.

Tam sayıların supremumla ilgili en önemli özelliği, supremumun kümeden “kaçamamasıdır”: reel sayılarda $[0, 1)$ gibi bir kümenin supremumu kümeye ait olmayabilirken, tam sayı kümelerinde supremum daima kümenin elemanıdır.

Teorem 11.2 (Tam Sayılar için Maksimum İlkesi). *Tam sayıların üstten sınırlı ve boş olmayan her alt kümesinin bir en büyük elemanı (maksimumu) vardır.*

İspat.

$A \subset \mathbb{Z}$ boş olmayan ve üstten sınırlı bir küme olsun. A aynı zamanda $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesi olduğundan Tamlik Aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği $\alpha = \sup A$ vardır. $\alpha \in A$ olduğunu göstereceğiz; o zaman [Önerme 10.3](#) ile $\alpha = \max A$ olur.

Olmayana ergi yöntemiyle $\alpha \notin A$ varsayalım. α üst sınır olduğundan her $n \in A$ için $n \leq \alpha$; $\alpha \notin A$ olduğundan bu eşitsizlik kesindir: her $n \in A$ için $n < \alpha$.

[Teorem 10.1](#)'i $\varepsilon = 1$ ile uygulayalım: $\alpha - 1 < n_1$ olan bir $n_1 \in A$ vardır ve yukarıdaki gözlemle $n_1 < \alpha$ 'dır. Şimdi $n_1 < \alpha = \sup A$ olduğundan n_1, A 'nın bir üst sınırı olamaz (olsaydı en küçük üst sınır $\alpha \leq n_1$ gerekirdi). Demek ki $n_1 < k$ olan bir $k \in A$ vardır; $k \in A$ olduğundan yine $k < \alpha$. Eşitsizlikleri birleştirelim:

$$\alpha - 1 < n_1 < k < \alpha.$$

Buradan $0 < k - n_1 < 1$ çıkar. Ama $k, n_1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan [Önerme 11.1](#) ile $k - n_1 \in \mathbb{Z}$ 'dir; 0 ile 1 arasında tam sayı bulunması [Lemma 11.1](#) ile çelişir. O hâlde varsayımımız yanlıştır: $\alpha \in A$ ve $\max A = \alpha$.

Teorem, tam sayı kümelerinde “supremum” ile “maksimum” arasındaki farkı ortadan kaldırır. Bir sonraki bölümde bu ilkeyle her reel sayının altındaki en büyük tam sayıyı, yani taban fonksiyonunu tanımlayacağız ([Teorem 12.3](#)).

Sonuç 11.1 (Tam Sayılar için Minimum İlkesi). *Tam sayıların alttan sınırlı ve boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı (minimumu) vardır.*

İspat.

$A \subset \mathbb{Z}$ boş olmayan ve alttan sınırlı olsun; m bir alt sınır olsun. $B = -A = \{-a : a \in A\}$ kümesini düşünelim. [Önerme 11.1](#) ile $B \subset \mathbb{Z}$ 'dir ve $A \neq \emptyset$ olduğundan $B \neq \emptyset$ 'dir. Her $a \in A$ için $m \leq a$ olduğundan $-a \leq -m$; yani $-m, B$ 'nin bir üst sınırıdır. [Teorem 11.2](#) gereği $\beta = \max B$ vardır.

$-\beta = \min A$ olduğunu gösterelim. $\beta \in B$ olduğundan $\beta = -a_0$ olacak bir $a_0 \in A$ vardır, yani $-\beta = a_0 \in A$. Her $a \in A$ için $-a \in B$ ve β üst sınır olduğundan $-a \leq \beta$, yani $-\beta \leq a$. Demek ki $-\beta, A$ 'ya ait bir alt sınırdır: $\min A = -\beta$.

Örnek 11.1 (Bir Tam Sayı Kümesinin Maksimumu). $A = \{m \in \mathbb{Z} : 3m < 20\}$ kümesinin maksimumunu bulalım.

Çözüm.

A boş değildir ($0 \in A$) ve üstten sınırlıdır: $m \in A$ ise $3m < 20$ eşitsizliğini $\frac{1}{3} > 0$ ile çarparak $m < \frac{20}{3}$ buluruz. Teorem 11.2 gereği $\max A$ vardır; bulalım.

$3 \cdot 6 = 18 < 20$ olduğundan $6 \in A$. $m \geq 7$ olan bir tam sayı için $3m \geq 21 > 20$ olduğundan $m \notin A$. Demek ki A 'nın her elemanı 6'dan küçük ya da eşittir (bir tam sayı 7'den küçükse 6'dan büyük olamaz; Lemma 11.1). Kümeye ait bir üst sınır olan 6, maksimumdur: $\max A = 6$.

Dikkat edelim: A 'yı reel sayılarda tanımlasaydık, $\{x \in \mathbb{R} : 3x < 20\}$ kümesinin supremumu $\frac{20}{3}$ olur ama maksimumu olmazdı. Tam sayılara kısıtlamak supremumu 6'ya çekti ve onu kümeye ait kıldı.

■

11.3 Tek ve Çift Sayılar

Tam sayıların ikiye bölünüp bölünmemesine göre ayrılması, sayılar teorisinin ve birçok ispatın temel aracıdır; ileride $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olmadığı bu ayrımla kanıtlayacağız (Teorem 13.3).

Tanım 11.2 (Tek ve Çift Sayılar). $m \in \mathbb{Z}$ olsun.

- $m = 2k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa m 'ye **çift sayı** (even number) denir.
- $m = 2k + 1$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa m 'ye **tek sayı** (odd number) denir.

Çift sayılar kümesi $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, tek sayılar kümesi $\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ 'tür.

Tanım, her tam sayının bu iki sınıftan tam olarak birine düştüğünü kendiliğinden söylemez; bunu kanıtlamak gerekir.

Önerme 11.2 (Her Tam Sayı Ya Tektir Ya Çifttir). Her tam sayı ya tektir ya çifttir; hiçbir tam sayı hem tek hem çift değildir.

İspat.

Hiçbiri ikisi birden değildir. $m = 2k = 2j + 1$ olsaydı $2(k - j) = 1$, yani $k - j = \frac{1}{2}$ olurdu. $k - j \in \mathbb{Z}$ 'dir (Önerme 11.1) ve $0 < \frac{1}{2} < 1$ olduğundan (Önerme 7.11, $0 < 1$ için) bu, Lemma 11.1 ile çelişir.

Her tam sayı en az biridir. E , tek ya da çift olan tam sayıların kümesi olsun. Önce $\mathbb{N} \subset E$ olduğunu, " $n \in E$ " önermesi üzerinden tümevarımla görelim: $1 = 2 \cdot 0 + 1$ tektir, dolayısıyla $1 \in E$. $n \in \mathbb{N}$ ve $n \in E$ olsun. $n = 2k$ ise $n + 1 = 2k + 1$ tektir; $n = 2k + 1$ ise $n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ çifttir ve $k + 1 \in \mathbb{Z}$ 'dir. Her iki hâlde $n + 1 \in E$; Teorem 9.1 ile her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in E$, yani $\mathbb{N} \subset E$.

$0 = 2 \cdot 0$ çifttir. Son olarak $m \in -\mathbb{N}$ olsun; $m = -p$, $p \in \mathbb{N} \subset E$. $p = 2k$ ise $m = 2(-k)$ çifttir. $p = 2k + 1$ ise

$$m = -2k - 1 = 2(-k - 1) + 1$$

tektir ve $-k - 1 \in \mathbb{Z}$ 'dir. Böylece $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}) \subset E$.

■

Bu önerme, bir sonraki bölümde kanıtlayacağımız bölme algoritmasının (Teorem 12.4) $b = 2$ özel hâlidir. Şimdi karelerin tek-çiftliğine bakalım.

Önerme 11.3 (Karenin Tek--Çiftliği). $m \in \mathbb{Z}$ olsun. m çifttir ancak ve ancak m^2 çiftse. Benzer biçimde m tektir ancak ve ancak m^2 tekse.

İspat.

Çift ise karesi çifttir. $m = 2k$ olsun. $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ve $2k^2 \in \mathbb{Z}$; demek ki m^2 çifttir.

Tek ise karesi tektir. $m = 2k + 1$ olsun.

$$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ve $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$; demek ki m^2 tektir.

Karesi çift ise çifttir. m^2 çift olsun. m çift olmasaydı **Önerme 11.2** ile tek olurdu; o zaman yukarıdaki gibi m^2 tek olurdu. Ama m^2 hem tek hem çift olamaz. Demek ki m çifttir.
Karesi tek ise tektir. m^2 tek olsun. m tek olmasaydı çift olurdu ve m^2 çift olurdu; bu, m^2 'nin tek olmasıyla çelişir. Demek ki m tektir.

■

Örnek 11.2 (Ardışık İki Tam Sayının Çarpımı). Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n(n+1)$ sayısının çift olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Önerme 11.2 gereği n ya tek ya çifttir.

n çift ise $n = 2k$ ve $n(n+1) = 2k(n+1) = 2(k(n+1))$; $k(n+1) \in \mathbb{Z}$ olduğundan çarpım çifttir.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$; dolayısıyla $n(n+1) = 2((k+1)n)$ çifttir.

■

11.4 Bölünebilme ve Asal Sayılar

Tek-çift ayrımı, “2 ile bölünüp bölünmemeye” fikrinin özel hâlidir. Genel kavramı tanımlayalım.

Tanım 11.3 (Bölünebilme). $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ olsun. $m = k \cdot n$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa m sayısı n ile **bölünebilir** (divisible) ya da n , m 'nin bir **bölenidir** (divisor) denir ve $n \mid m$ yazılır. Aksi hâlde $n \nmid m$ yazılır.

Örneğin $3 \mid 12$ ($12 = 4 \cdot 3$), $-4 \mid 12$ ($12 = (-3)(-4)$), ama $5 \nmid 12$ 'dir: $12 = 5k$ olsaydı $k = \frac{12}{5}$ olurdu ve $2 < \frac{12}{5} < 3$ olduğundan k tam sayı olamazdı (**Lemma 11.1**). Her $n \neq 0$ için $n \mid 0$ ($0 = 0 \cdot n$) ve her m için $1 \mid m$ ($m = m \cdot 1$) sağlanır.

i Tek-çift ve 2 ile bölünebilme

Çift sayılar tam olarak 2 ile bölünebilen tam sayılardır; bu, tanımın kendisidir. Tek sayılar ise 2 ile bölünemeyen tam sayılardır: **Önerme 11.2** gereği bir tam sayı 2 ile bölünemiyorsa (çift değilse) tektir ve tek ise çift değildir. Böylece “her tam sayı ya tek ya çifttir” cümlesi, “2 her tam sayıyı ya böler ya bölmez” biçiminde de okunabilir.

Çarpma işleminin “yapı taşları”, 1 dışında, kendisinden küçük doğal sayıların çarpımı olarak parçalanamayan sayılardır.

Tanım 11.4 (Asal Sayı). $p \in \mathbb{N}$ ve $p \neq 1$ olsun. p 'nin doğal sayılar içindeki bölenleri yalnızca 1 ve p ise p 'ye **asal sayı** (prime number) denir. Asal sayılar kümesi $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ 'dir.

İki $m, n \in \mathbb{Z}$ tam sayısının ortak bölenleri yalnızca 1 ve -1 ise bu sayılara **aralarında asal** (relatively prime, coprime) denir.

Örneğin 8 ile 15 aralarında asaldır (8'in bölenleri $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$; 15'in bölenleri $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$), ama 8 ile 12 aralarında asal değildir (4 ikisini de böler).

i Aritmetiğin temel teoremi

Her $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ doğal sayısı, $p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılar olmak üzere $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ biçiminde yazılabilir ve çarpanların sırası dışında bu yazılış tektir. Bu yazılışa n 'nin **asal çarpanlara ayrılışı** denir. Teoremin ispatı sayılar teorisinin konusudur ve bu dersin dışında kalır; biz yalnızca ifadesini not ediyoruz ve ileride kullanmayacağız.

11.5 Tam Sayı Kuvvetleri

Bir reel sayının doğal sayı kuvvetlerini “kendisiyle tekrar tekrar çarpma” olarak düşünürüz; bu düşüncüyü kesin bir tanıma dönüştürmenin yolu tümevarımdır. Sıfırdan farklı sayılar için negatif kuvvetler de terslerle tanımlanır.

Tanım 11.5 (Tam Sayı Kuvveti). $a \in \mathbb{R}$ olsun. a ’nın doğal sayı kuvvetleri tümevarımla tanımlanır:

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$a \neq 0$ ise ayrıca

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

tanımlanır. Böylece $a \neq 0$ için a^m her $m \in \mathbb{Z}$ için tanımlıdır. 0^0 ve 0 ’ın negatif kuvvetleri **tanımsızdır**.

Tanımdan hemen çıkan bir gözlem: $a \neq 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \neq 0$ ’dır. Gerçekten $a^1 = a \neq 0$ ve $a^n \neq 0$ ise $a^{n+1} = a^n a$ iki sıfırdan farklı sayının çarpımı olarak sıfırdan farklıdır (Önerme 6.13). Dolayısıyla $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ anlamlıdır ve o da sıfırdan farklıdır. Benzer biçimde $a > 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n > 0$ ’dır: $a^1 = a > 0$ ’dır ve $a^n > 0$ ise $a^{n+1} = a^n a$ iki pozitif sayının çarpımı olarak pozitifdir (Önerme 7.5 (1)). Ayrıca $a^0 = 1 > 0$ (Önerme 7.7) ve $a^{-n} = \frac{1}{a^n} > 0$ (Önerme 7.9) olduğundan, $a > 0$ iken her $m \in \mathbb{Z}$ için $a^m > 0$ ’dır.

Kuvvet kurallarının ispatı için, tanımdaki $a^{n+1} = a^n a$ adımının negatif üsler için de geçerli olduğunu görmemiz gerekir.

Lemma 11.2 (Üssü Bir Artırma). $a \neq 0$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$a^{m+1} = a^m \cdot a \quad \text{ve} \quad a^{m-1} = a^m \cdot a^{-1}.$$

İspat.

İlk eşitlik için m ’nin üç hâline bakalım. $m \in \mathbb{N}$ ise bu, tanımın kendisidir. $m = 0$ ise $a^1 = a = 1 \cdot a = a^0 a$. $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. $k = 1$ ise $a^{m+1} = a^0 = 1$ ve $a^{-1} a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$; eşitlik sağlanır. $k \geq 2$ ise Önerme 9.3 ile $k - 1 \in \mathbb{N}$ ve tanım gereği $a^k = a^{k-1} a$; dolayısıyla

$$a^{-k} \cdot a = \frac{a}{a^k} = \frac{a}{a^{k-1} \cdot a} = \frac{1}{a^{k-1}} = a^{-(k-1)} = a^{m+1}.$$

İkinci eşitlik, ilkinin $m - 1$ için yazılmış hâlidir: $a^m = a^{m-1} a$; her iki tarafı a^{-1} ile çarpınca $a^m a^{-1} = a^{m-1}$.

■

Teorem 11.3 (Tam Sayı Kuvvetlerinin Kuralları). a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

1. $a^m a^n = a^{m+n}$,
2. $a^n b^n = (ab)^n$,
3. $(a^m)^n = a^{mn}$,
4. $n > 0$ ve $0 < a, 0 < b$ ise: $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

Birinci, ikinci ve üçüncü kurallar $a = 0$ ya da $b = 0$ iken de, ifadedeki bütün kuvvetler tanımlı olmak koşuluyla (yani $m, n \in \mathbb{N}$ için) geçerlidir.

İspat.

Birinci ve dördüncü kuralı burada, ikinci ve üçüncüyü bölüm sonundaki alıştırmada (Alıştırma 11.1) kanıtlıyoruz.

1. $m \in \mathbb{Z}$ sabit olsun; n üzerinde üç adım atacağız.

Adım A: $n \in \mathbb{N}$. n üzerinden tümevarım. $n = 1$ için $a^m a^1 = a^m a = a^{m+1}$ (Lemma 11.2). $a^m a^n = a^{m+n}$ olsun; o zaman

$$a^m a^{n+1} = a^m (a^n a) = (a^m a^n) a = a^{m+n} a = a^{m+n+1}$$

olur; ilk ve son adımda tanım ile [Lemma 11.2](#), ortada çarpmanın birleşme özelliği kullanıldı.

Adım B: $n = 0$. $a^m a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$.

Adım C: $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$. Adım A'yı m yerine $m - k$ ve n yerine k ile uygulayalım: $a^{m-k} a^k = a^{(m-k)+k} = a^m$. $a^k \neq 0$ olduğundan her iki tarafı a^k 'ye bölebiliriz:

$$a^{m-k} = \frac{a^m}{a^k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = a^m a^{-k}.$$

Bu tam olarak $a^m a^n = a^{m+n}$ 'dir. Üç adım birlikte her $n \in \mathbb{Z}$ 'yi kapsar. $a = 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ hâlinde Adım A'daki tümevarım kelimesi kelimesine geçerlidir.

4. $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < a$, $0 < b$ olsun.

($\Rightarrow$ yönü) $a < b$ olsun; $a^n < b^n$ olduğunu n üzerinden tümevarımla gösterelim. $n = 1$ için ifade hipotezin kendisidir. $a^n < b^n$ olsun. $a > 0$ olduğundan $a^n < b^n$ eşitsizliğini a ile çarpabiliriz: $a^n a < b^n a$. $b^n > 0$ olduğundan $a < b$ eşitsizliğini b^n ile çarpabiliriz: $b^n a < b^n b$. Geçişlilikle

$$a^{n+1} = a^n a < b^n a < b^n b = b^{n+1}.$$

($\Leftarrow$ yönü) Karşıt tersini gösterelim: $a < b$ değilse, üçlem yasasıyla $a = b$ ya da $b < a$ 'dır. $a = b$ ise $a^n = b^n$; $b < a$ ise az önce kanıtlanan yönle $b^n < a^n$. Her iki hâlde $a^n < b^n$ sağlanmaz. Demek ki $a^n < b^n$ ise $a < b$.

■

Dördüncü kuralın önemli bir yan ürünü vardır: pozitif a, b için $a^n = b^n$ ise $a = b$ 'dir (üçlem yasası ve iki yön). Bu, ileride n -inci köklerin **tekliğini** verecek ([Teorem 13.2](#)): karesi 2 olan en çok bir pozitif reel sayı vardır.

Örnek 11.3 (Eksi Birin Kuvvetleri). Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(-1)^n$ sayısının, n çiftse 1, tekse -1 olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Önce $n \in \mathbb{N}$ için tümevarımla: $(-1)^1 = -1$ ve 1 tektir. n için doğru olsun. n çiftse $(-1)^n = 1$ ve $(-1)^{n+1} = 1 \cdot (-1) = -1$; $n + 1$ tektir. n tekse $(-1)^{n+1} = (-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$ ([Önerme 6.12](#)) ve $n + 1$ çifttir. $n = 0$ için $(-1)^0 = 1$ ve 0 çifttir.

$n = -k$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. $(-1)^{-k} = \frac{1}{(-1)^k}$ 'dir. $k = 2j$ çiftse $n = -k = 2(-j)$ de çifttir ve $(-1)^n = \frac{1}{1} = 1$; $k = 2j + 1$ tekse $n = -k = -2j - 1 = 2(-j - 1) + 1$ tektir ve $(-1)^n = \frac{1}{-1} = -1$.

Özel olarak $(-1)^{2k} = 1$ ve $(-1)^{2k+1} = -1$; bu, ileride $(-1)^n$ dizisinin ıraksaklığını incelerken ([Örnek 20.6](#)) kullanılacaktır.

■

11.6 Rasyonel Sayılar

Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ sayısının çarpımsal tersi $x^{-1} = \frac{1}{x}$ vardır ve her $y \in \mathbb{R}$ için $yx^{-1} = \frac{y}{x}$ tanımlıdır (Bölüm 6.2). Pay ve paydayı tam sayılardan seçince rasyonel sayıları elde ederiz.

Tanım 11.6 (Rasyonel Sayılar Kümesi). $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $x = \frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilen reel sayılara **rasyonel sayı** (rational number) denir. Rasyonel sayılar kümesi

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

ile gösterilir.

$n = 1$ alınırsa her $m \in \mathbb{Z}$ için $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ görülür; yani $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Tanım gereği $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 'dir.

Aynı rasyonel sayı çok farklı biçimlerde yazılabilir: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$. İki yazılışın ne zaman aynı sayıyı verdiğini kesinleştirelim.

Önerme 11.4 (Rasyonel Sayıların Eşitliği). $m, k \in \mathbb{Z}$ ve $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun.

1. $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml = kn$.

2. $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $\frac{m}{n} = \frac{mj}{nj}$.

İspat.

1. $nl \neq 0$ 'dır (Önerme 6.13). $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ eşitliğinin her iki tarafını nl ile çarpalım:

$$\frac{m}{n} \cdot nl = mn^{-1}nl = ml, \quad \frac{k}{l} \cdot nl = kl^{-1}ln = kn.$$

Demek ki eşitlik $ml = kn$ 'yi verir. Tersine $ml = kn$ ise her iki tarafı $(nl)^{-1} = n^{-1}l^{-1}$ ile çarpmak $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ verir.

2. $(mj)(n) = (m)(nj)$ olduğundan birinci maddeyle $\frac{m}{n} = \frac{mj}{nj}$. Doğrudan da görülebilir:

$$\frac{mj}{nj} = (mj)(nj)^{-1} = (mj)(j^{-1}n^{-1}) = m(jj^{-1})n^{-1} = mn^{-1} = \frac{m}{n}.$$

■

İkinci madde, kesirleri **genişletme** ve **sadeleştirme** kuralıdır. Sadeleştirmeyi sonuna kadar götürürsek pay ile paydası aralarında asal bir yazılışa ulaşırız.

Önerme 11.5 (Rasyonel Sayının En Sade Biçimi). Her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı, $n \in \mathbb{N}$ ve m, n aralarında asal olmak üzere $x = \frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir.

İspat.

$x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ olsun. $q < 0$ ise Önerme 11.4 ile $x = \frac{-p}{-q}$ yazarak paydayı pozitif yapabiliriz; o hâlde x 'in paydası doğal sayı olan en az bir yazılışı vardır. $D = \{n \in \mathbb{N} : \text{bir } m \in \mathbb{Z} \text{ için } x = m/n\}$ kümesi boş değildir; Teorem 9.2 gereği en küçük elemanı n_0 vardır. $x = \frac{m_0}{n_0}$ olsun.

m_0 ile n_0 'ın aralarında asal olduğunu gösterelim. Aksine, $d \neq \pm 1$ ortak böleni olsun; $-d$ de ortak bölen olduğundan $d \in \mathbb{N}$ ve $d \geq 2$ alabiliriz. $m_0 = dm'$, $n_0 = dn'$ yazalım ($m', n' \in \mathbb{Z}$). $n_0 > 0$ ve $d > 0$ olduğundan $n' = \frac{n_0}{d} > 0$; $n' \in \mathbb{Z}$ olduğundan Lemma 11.1 (1) ile $n' \in \mathbb{N}$. Önerme 11.4 ile $x = \frac{dm'}{dn'} = \frac{m'}{n'}$, dolayısıyla $n' \in D$. Ama $n_0 = dn' \geq 2n' > n'$; bu, n_0 'ın D 'nin en küçük elemanı olmasıyla çelişir.

■

Şimdi rasyonel sayıların dört işlem altında kapalı olduğunu görelim.

Önerme 11.6 (Rasyonel Sayılar Dört İşlem Altında Kapalıdır). $x, y \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman $x + y$, $x - y$ ve xy rasyoneldir. Ayrıca $x \neq 0$ ise $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ 'dur; dolayısıyla $y \neq 0$ için $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

İspat.

$x = \frac{m}{n}$ ve $y = \frac{k}{l}$ olsun; $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $l \neq 0$.

Toplama. Önerme 11.4 ile paydaları eşitleyelim:

$$x + y = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml}{nl} + \frac{kn}{nl} = \frac{ml + kn}{nl}.$$

Son adım, $(ml)(nl)^{-1} + (kn)(nl)^{-1} = (ml + kn)(nl)^{-1}$ dağılma özelliğidir. Önerme 11.1 gereği $ml + kn \in \mathbb{Z}$ ve $nl \in \mathbb{Z}$; $n \neq 0$, $l \neq 0$ olduğundan $nl \neq 0$. Demek ki $x + y \in \mathbb{Q}$.

Çıkarma. Önerme 6.12 ile $-y = -(kl^{-1}) = (-k)l^{-1} = \frac{-k}{l} \in \mathbb{Q}$ ($-k \in \mathbb{Z}$) ve $x - y = x + (-y)$ iki rasyonelin toplamıdır.

Çarpma.

$$xy = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = (mn^{-1})(kl^{-1}) = (mk)(n^{-1}l^{-1}) = (mk)(nl)^{-1} = \frac{mk}{nl}.$$

$mk \in \mathbb{Z}$ ve $nl \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olduğundan $xy \in \mathbb{Q}$.

Çarpımsal ters. $x = \frac{m}{n} \neq 0$ olsun; o zaman $m \neq 0$ 'dır (çünkü $m = 0$ ise $x = 0$). Çarpımın tersi terslerin çarpımıdır (Önerme 6.14) ve tersin tersi sayının kendisidir (Önerme 6.10):

$$x^{-1} = (mn^{-1})^{-1} = m^{-1}(n^{-1})^{-1} = m^{-1}n = \frac{n}{m}.$$

$n, m \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ olduğundan $x^{-1} \in \mathbb{Q}$. Bölme için $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ iki rasyonelin çarpımıdır.

■

11.6.1 Rasyonel Sayılarda Sıralama

Rasyonel sayılar reel sayıların alt kümesi olduğundan aralarındaki sıralama zaten $\mathbb{R}$ 'den gelir. Yine de iki kesri karşılaştırmanın tam sayılara indirgenmiş bir yolu vardır; okuldan bildiğimiz “içler dışlar çarpımı” kuralı tam olarak budur.

Önerme 11.7 (Rasyonel Sayılarda Sıralama (İçler Dışlar Çarpımı)). $m, k \in \mathbb{Z}$ ve $n, l \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml < kn.$$

İspat.

$n, l > 0$ olduğundan $nl > 0$ 'dır. Sıralama aksiyomlarına göre (Bölüm 7.1) pozitif bir sayıyla çarpmak eşitsizliği korur; pozitif bir sayıya bölmek de öyle. $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$ eşitsizliğinin iki tarafını nl ile çarparsak **Önerme 11.4**'in ispatındaki hesaplara sol taraf ml , sağ taraf kn olur: $ml < kn$. Tersine $ml < kn$ ise iki tarafı $\frac{1}{nl} > 0$ ile çarpmak $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$ verir.

■

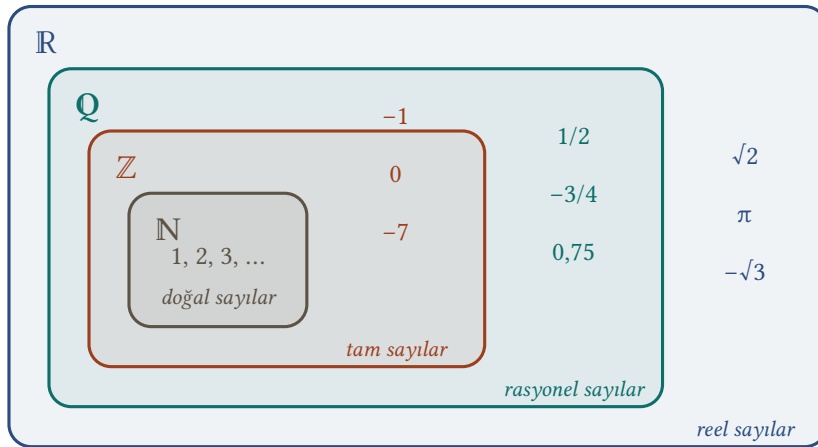
Her rasyonel sayı pozitif paydayla yazılabildiğinden (**Önerme 11.5**) bu kural genel bir karşılaştırma yöntemidir. Örneğin $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ tür, çünkü $5 \cdot 4 = 20 < 21 = 3 \cdot 7$.

11.6.2 Rasyonel Sayılar Sıralı Bir Cisimdir

Artık sayı kümelerimizin yapısını toplu hâlde ifade edebiliriz. Bir kümeye, üzerindeki toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte cebirsel aksiyomların tamamını sağlıyorsa **cisim** (field), ayrıca sıralama aksiyomlarını da sağlayan bir “<” bağıntısı taşıyorsa **sıralı cisim** (ordered field) denir. Bir cismin, işlemler kısıtlandığında yine cisim olan alt kümesine o cismin **alt cismi** (subfield) denir.

Teorem 11.4 (Rasyonel Sayılar Sıralı Bir Cisimdir).

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ sıralı bir cisimdir.
2. $\mathbb{Q}$, reel sayılar cisminin bir alt cismidir.
3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ kapsamaları geçerlidir ve her biri öz kapsamadır.



Şekil 11.1: Sayı kümeleri iç içedir: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Her katmanda bir öncekinde olmayan sayılar vardır: 0 ve negatifler $\mathbb{Z}$ 'ye, kesirler $\mathbb{Q}$ 'ya, $\sqrt{2}$ ve π gibi irrasyoneller $\mathbb{R}$ 'ye özgüdür.

İspat.

1 ve 2. Cebirsel aksiyomları (Bölüm 6.2) tek tek denetleyelim. Toplama ve çarpma **Önerme 11.6** ile $\mathbb{Q}$ 'da kalır. Birleşme, değişme ve dağılma özellikleri bütün reel sayılar için geçerli olduğundan rasyonel sayılar için de geçerlidir. Birim elemanlar $0 = \frac{0}{1}$ ve $1 = \frac{1}{1}$ rasyoneldir. Her $x \in \mathbb{Q}$ için $-x \in \mathbb{Q}$ ve $x \neq 0$ için $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ olduğunu **Önerme 11.6**'da gördük. Demek ki $\mathbb{Q}$ bir cisimdir; $\mathbb{R}$ 'nin işlemlerini kullandığı için $\mathbb{R}$ 'nin bir alt cisimidir.

Sıralama aksiyomları (Bölüm 7.1) — üçlem yasası, geçişlilik, toplama ve pozitif sayıyla çarpma ile uyumluluk — reel sayılardaki “<” bağıntısı için doğrudur; $\mathbb{Q}$ üzerindeki bağıntı bunun kısıtlanması olduğundan ve toplam ile çarpım $\mathbb{Q}$ 'da kaldığından aynı aksiyomlar $\mathbb{Q}$ 'da da sağlanır. O hâlde $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ sıralı bir cisimdir.

3. Kapsamaları zaten gördük: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ tanım gereği, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ paydayı 1 alarak, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tanım gereği. Her birinin öz kapsama olduğunu, sağdaki kümede olup soldakinde olmayan birer eleman bularak gösterelim.

- $0 \in \mathbb{Z}$ ama $0 \notin \mathbb{N}$: hiçbir doğal sayı 1'den küçük değildir (**Önerme 9.3**), oysa $0 < 1$. Dolayısıyla $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$.
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ ama $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$: $0 < \frac{1}{2} < 1$ ve **Lemma 11.1**. Dolayısıyla $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$.
- Karesi 2 olan pozitif bir reel sayı vardır (**Teorem 13.1**) ama bu sayı rasyonel değildir (**Teorem 13.3**); her iki olgu da ilerideki bir bölümde kanıtlanacaktır. Dolayısıyla $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

■

Teoremin asıl mesajı şudur: $\mathbb{Q}$, cebirsel ve sıralama aksiyomlarının **hepsini** sağlar. Reel sayıları rasyonel sayılardan ayıran tek aksiyom, Tamlik Aksiyomu'dur (Bölüm 10.4) ve bunun $\mathbb{Q}$ 'da geçersiz olduğunu ileride göreceğiz (**Sonuç 13.1**). Yani $\sqrt{2}$ 'nin varlığı gibi analizin bütün “limit” içeren sonuçları, işte bu tek aksiyoma dayanır.

Örnek 11.4 (İki Rasyonel Sayı Arasında Rasyonel Sayı). $x, y \in \mathbb{Q}$ ve $x < y$ olsun. x ile y arasında bir rasyonel sayı bulunduğunu gösterelim; buradan iki farklı rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı olduğunu çıkaralım.

Çözüm.

$z = \frac{x+y}{2}$ alalım. **Önerme 11.6** ile $x + y \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ olduğundan $z = (x + y) \cdot \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 'dur. **Önerme 7.11** gereği $x < z < y$.

Sonsuz çokluk için aynı adımı tekrarlayalım: $z_1 = \frac{x+y}{2}$, $z_2 = \frac{x+z_1}{2}$, $z_3 = \frac{x+z_2}{2}$, ... biçiminde tanımlanan sayıların her biri rasyoneldir ve $x < \dots < z_3 < z_2 < z_1 < y$ sağlar; yani birbirinden farklıdır. $z_0 = y$ diyelim; tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in \mathbb{Q}$ ve $x < z_n < z_{n-1}$ olduğu görülür. Böylece (x, y) aralığında n farklı rasyonel sayı bulunur ve n keyfi olduğundan sonlu sayıda olamazlar.

Bu örneğin bir sonucu: $\mathbb{Q}$ 'da “ardışık” rasyonel sayı diye bir şey yoktur. Tam sayılarda n 'den sonra gelen ilk tam sayı $n + 1$ 'dir; rasyonellerde ise bir sayının “hemen sağındaki” sayı yoktur. İleride çok daha güçlü bir ifadeyi kanıtlayacağız: herhangi iki **reel** sayı arasında da bir rasyonel sayı vardır (**Teorem 13.5**).

■

11.7 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (Tam Sayılar ve Rasyonel Sayılar Alıştırmaları).

- $a, b \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $(ab)^n = a^n b^n$ olduğunu gösteriniz (**Teorem 11.3**, ikinci kural).
- $a \neq 0$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $(a^m)^n = a^{mn}$ olduğunu gösteriniz (**Teorem 11.3**, üçüncü kural).
- m tek bir tam sayı ise $8 \mid m^2 - 1$ olduğunu gösteriniz.
- $A = \{m \in \mathbb{Z} : m^2 < 10\}$ kümesinin maksimumunu ve minimumunu bulunuz.
- $P = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ kümesinin minimumunun olmadığını, ama $\inf P = 0$ olduğunu gösteriniz. Buradan iyi sıralama ilkesinin $\mathbb{Q}$ 'da geçersiz olduğunu çıkarınız.

Çözüm.

a) Önce $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım: $n = 1$ için $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$. $(ab)^n = a^n b^n$ olsun; çarpmanın birleşme ve değişme özellikleriyle

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) = a^n b^n ab = (a^n a)(b^n b) = a^{n+1} b^{n+1}.$$

Bu tümevarımda $a \neq 0$, $b \neq 0$ koşulu hiç kullanılmadı; yalnızca tanımdaki $x^{n+1} = x^n x$ adımıyla çarpmanın birleşme ve değişme özellikleri kullanıldı. Dolayısıyla ikinci kural, $n \in \mathbb{N}$ iken $a = 0$ ya da $b = 0$ hâlinde de geçerlidir.

$n = 0$ için iki taraf da 1'dir. $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$ için, çarpımın tersinin terslerin çarpımı olduğunu kullanalım (Önerme 6.14):

$$(ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} b^{-k}.$$

b) Önce yardımcı bir gözlem: her $j \in \mathbb{Z}$ için $\frac{1}{a^j} = a^{-j}$. Gerçekten $j \in \mathbb{N}$ için bu tanımdır; $j = 0$ için $\frac{1}{1} = 1 = a^0$; $j = -k$ için $\frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{1/a^k} = a^k = a^{-(-k)}$.

$m \in \mathbb{Z}$ sabit olsun; n üzerinden ilerleyelim. $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım: $n = 1$ için $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$. $(a^m)^n = a^{mn}$ olsun; tanım ve birinci kuralla

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Bu tümevarım da $a \neq 0$ koşulunu kullanmaz; $m, n \in \mathbb{N}$ iken yalnızca tanım ile birinci kuralın Adım A'sı kullanılıyor ve ikisi de $a = 0$ için geçerlidir. Dolayısıyla üçüncü kural, $m, n \in \mathbb{N}$ iken $a = 0$ hâlinde de doğrudur; $a \neq 0$ koşulu ancak m ya da n negatif olduğunda gerekir.

$n = 0$ için $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$ ($a^m \neq 0$ olduğundan sol taraf tanımlıdır). $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$ için yardımcı gözlemle

$$(a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)}.$$

c) $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$m^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1).$$

Örnek 11.2 gereği $k(k + 1)$ çifttir: $k(k + 1) = 2j$ olacak bir $j \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla $m^2 - 1 = 4 \cdot 2j = 8j$, yani $8 \mid m^2 - 1$. Örneğin $m = 7$ için $49 - 1 = 48 = 8 \cdot 6$.

d) $0 \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$. $m \in \mathbb{Z}$ ve $m \geq 4$ ise $m \cdot m \geq 4 \cdot m \geq 4 \cdot 4 = 16 > 10$ (pozitif sayılarla çarpma sıralamayı korur), dolayısıyla $m \notin A$. Demek ki A 'nın her elemanı 4'ten küçüktür; tam sayı olduğundan **Lemma 11.1** ile 3'ten küçük ya da eşittir. $3^2 = 9 < 10$ olduğundan $3 \in A$; kümeye ait bir üst sınır maksimumdur: $\max A = 3$.

Minimum için $m \leq -4$ olan bir tam sayı alalım; $-m \geq 4$ ve $m^2 = (-m)^2 \geq 16 > 10$ olduğundan $m \notin A$. Yani A 'nın her elemanı -3 'ten büyük ya da eşittir; $(-3)^2 = 9 < 10$ ile $-3 \in A$. Böylece $\min A = -3$ ve $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Bu, **Teorem 11.2** ve **Sonuç 11.1**'nin somut bir örneğidir: A sınırlı olduğu için maksimum ve minimumun var olacağı önceden biliniyordu; biz yalnızca değerlerini hesapladık.

e) Minimum yoktur. $x \in P$ olsun. $\frac{x}{2} = x \cdot \frac{1}{2}$, **Önerme 11.6** ile rasyoneldir ve **Önerme 7.11** (0 ile x için) gereği $0 < \frac{x}{2} < x$; yani $\frac{x}{2} \in P$ ve x 'ten küçüktür. Demek ki P 'nin hiçbir elemanı alt sınır değildir; minimum yoktur.

$\inf P = 0$. 0 bir alt sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin; **Teorem 10.4** ile $n > \frac{1}{\varepsilon}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu eşitsizliğin iki yanını pozitif $\frac{\varepsilon}{n}$ sayısıyla çarpınca $\varepsilon > \frac{1}{n}$ çıkar; ayrıca $\frac{1}{n} > 0$ (**Önerme 7.9**). 1, $n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ 'dur; yani $\frac{1}{n} \in P$ ve $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$. **Teorem 10.2** gereği $\inf P = 0$.

İyi sıralama. P , $\mathbb{Q}$ 'nun boş olmayan ve alttan sınırlı bir alt kümesidir ama en küçük elemanı yoktur. Dolayısıyla "boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümenin bir en küçük elemanı vardır" ilkesi, tam sayılar için doğru olduğu hâlde (**Sonuç 11.1**) rasyonel sayılar için yanlıştır.

■

Tam sayılar ve rasyonel sayılar artık aksiyomlar içinde yerini aldı. Bir sonraki bölümde doğal sayıların üstten sınırsızlığını Arşimet özelliği biçiminde genelleştirecek ve tam sayıların maksimum ilkesinden taban fonksiyonu ile bölme algoritmasını çıkaracağız — **Arşimet Özelliği ve Sonuçları**.

12. Arşimet Özelliği ve Sonuçları

Önceki bölümde doğal sayılardan tam sayılara, oradan rasyonel sayılara geçtik ve $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ zincirini kurduk. Daha önce tamlık aksiyomunun (Bölüm 10.4) ilk sonucunu da görmüştük: doğal sayılar kümesi üstten sınırlı değildir (Teorem 10.4). Bu bölümde, o küçük görünen sonucun aslında ne kadar iş gördüğünü göreceğiz.

Bölümün ana teoremi **Arşimet özelliği**dir: pozitif bir sayı ne kadar küçük olursa olsun, onu kendisiyle yeterince çok kez toplayarak istediğimiz kadar büyük bir sayıyı geçebiliriz. Bu özellik, analizde sürekli karşımıza çıkacak olan “yeterince büyük n için $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ” cümlesinin arkasındaki güvencedir. Bölümün sonunda Arşimet özelliğinin iki somut ürününü inceleyeceğiz: her reel sayıyı iki ardışık tam sayı arasına yerleştiren **taban fonksiyonu** ve tam sayılarda **bölme algoritması**.

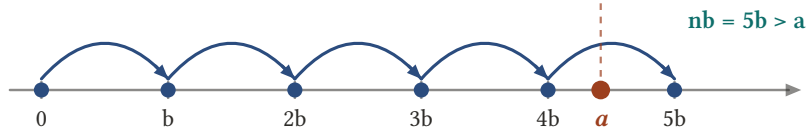
12.1 Arşimet Özelliği

Sayı doğrusunda $b > 0$ uzunluğunda adımlarla yürüdüğümüzü düşünelim: $b, 2b, 3b, \dots$ Sezgimiz, b ne kadar küçük olursa olsun bu adımlarla her a sayısını eninde sonunda geçeceğimizi söyler. Bu sezgi doğrudur; ama nedeni aksiyomlardan çıkar ve kaynağı tamlık aksiyomudur. Adı, Antik Yunan matematikçisi Arşimet’in (M.Ö. 287–212) uzunlukları karşılaştırırken kullandığı bir ilkedен gelir (Archimedean property).

Teorem 12.1 (Arşimet Özelliği). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. O zaman

$$nb > a$$

olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.



Şekil 12.1: $b > 0$ ne kadar küçük olursa olsun $b, 2b, 3b, \dots$ adımları sayı doğrusunda ilerler ve sonunda a 'yı geçer; örnekte $5b > a$. Arşimet özelliği böyle bir n 'nin her zaman var olduğunu söyler.

İspat.

$b > 0$ olduğundan $\frac{a}{b}$ bir reel sayıdır. Teorem 10.4 gereği $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir; dolayısıyla $\frac{a}{b}$ sayısı $\mathbb{N}$ için bir üst sınır olamaz. Yani

$$n > \frac{a}{b}$$

olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu eşitsizliğin iki yanını pozitif b sayısı ile çarparsak (sıralama aksiyomu O4, bkz. Bölüm 7.1) yön değişmez:

$$nb > \frac{a}{b} b = a.$$

Aynı ispat olmayana ergi diliyle de anlatılabilir: her $n \in \mathbb{N}$ için $nb \leq a$ olsaydı, $\frac{1}{b} > 0$ ile çarparak (Önerme 7.9) her n için $n \leq \frac{a}{b}$ elde ederdik; bu, $\frac{a}{b}$ sayısının $\mathbb{N}$ için bir üst sınır olması demektir ve Teorem 10.4 ile çelişir. ■

Teoremin gücü, b üzerinde hiçbir küçüklük sınırı koymamasındadır: $b = 10^{-100}$ olsa bile uygun bir n vardır. Analizde bu teorem çoğunlukla aşağıdaki iki özel biçimde kullanılır.

Sonuç 12.1 (Her Reel Sayıyı Aşan Doğal Sayı). Her $x \in \mathbb{R}$ için $n > x$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat.

Teorem 12.1 teoreminde $a = x$ ve $b = 1$ alalım. $1 > 0$ olduğundan (**Önerme 7.7**) teorem uygulanabilir ve $n \cdot 1 > x$, yani $n > x$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

■

Sonuç 12.2 (Bir Bölü n Her Pozitif Sayının Altına İner). Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat.

Teorem 12.1 teoreminde $a = 1$ ve $b = \varepsilon > 0$ alalım: $n\varepsilon > 1$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $n \geq 1 > 0$ olduğundan $\frac{1}{n} > 0$ 'dır (**Önerme 7.9**). $n\varepsilon > 1$ eşitsizliğinin iki yanını $\frac{1}{n} > 0$ ile çarparsak $\varepsilon > \frac{1}{n}$ elde ederiz. Böylece $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

■

🔗 Analizde en çok kullanılan biçim

Sonuç 12.2, ileride limit ispatlarının vazgeçilmezi olacak. Bir de küçük bir gözlem: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ sağlayan bir n bulduysak, $m \geq n$ olan her m için de $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ olur. Yani eşitsizlik yalnızca tek bir n için değil, o n 'den sonraki bütün doğal sayılar için geçerlidir. “Yeterince büyük n için” deyişi tam olarak bunu anlatır.

Şimdiye kadar gördüğümüz ifadelerin hepsi aslında aynı olgunun farklı kılıklarıdır. Bunu bir teoremler kayda geçirelim; ispatı, dört ifadenin birbirini döngü hâlinde gerektirdiğini göstermekten ibarettir.

Teorem 12.2 (Arşimet Özelliğinin Denk Biçimleri). Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1. $\mathbb{N}$ kümesi üstten sınırlı değildir.
2. Her $x > 0$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $nx > y$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.
3. Her $x \in \mathbb{R}$ için $n > x$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.
4. Her $x > 0$ için $0 < \frac{1}{n} < x$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) döngüsünü göstereceğiz; böylece herhangi ikisi birbirini gerektirmiş olur.

(1) $\Rightarrow$ (2). Bu, **Teorem 12.1** teoreminin ispatının kendisidir: $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olmadığından $\frac{y}{x}$ bir üst sınır değildir, $n > \frac{y}{x}$ olan bir n vardır ve $x > 0$ ile çarpınca $nx > y$ çıkar.

(2) $\Rightarrow$ (3). $x \in \mathbb{R}$ verilsin. (2)'yi pozitif sayı olarak 1 ve keyfi sayı olarak x ile uygulayalım: $n \cdot 1 > x$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

(3) $\Rightarrow$ (4). $x > 0$ verilsin. **Önerme 7.9** gereği $\frac{1}{x} > 0$ 'dır; (3)'ü $\frac{1}{x}$ sayısına uygulayalım: $n > \frac{1}{x}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n için $n \geq 1 > 0$ olduğundan, yine **Önerme 7.9** gereği $\frac{1}{n} > 0$ 'dır. Şimdi $n > \frac{1}{x}$ eşitsizliğinin iki yanını $x > 0$ ile çarparsak $nx > 1$, sonra $\frac{1}{n} > 0$ ile çarparsak $x > \frac{1}{n}$ elde ederiz; böylece $0 < \frac{1}{n} < x$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Olmayana ergi: $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olsun ve M bir üst sınır olsun. $1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $M \geq 1 > 0$, dolayısıyla $\frac{1}{M} > 0$ 'dır. (4)'ü $x = \frac{1}{M}$ için uygulayalım: $\frac{1}{n} < \frac{1}{M}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. İki yanı pozitif nM sayısıyla çarparsak $M < n$ buluruz. Ama M bir üst sınırdı, $n \leq M$ olmalıydı; çelişki. Demek ki $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

■

Bu teorem sayesinde, dört ifadeden hangisi elimizde uygunsa onu “Arşimet özelliği” diye anıp kullanabiliriz. Reel sayılarda dördü de doğrudur, çünkü (1) tamlik aksiyomundan çıkmıştı.

i Arşimet özelliği bedava değildir

Arşimet özelliği cebirsel ve sıralama aksiyomlarından tek başına çıkmaz; ispatımızda tamlık aksiyomunu (üzerinden [Teorem 10.4](#) ile) kullandık. Gerçekten de bütün cebirsel ve sıralama aksiyomlarını sağladığı hâlde Arşimet özelliğini sağlamayan sıralı cisimler vardır: bunlarda “sonsuz küçük” pozitif elemanlar bulunur ve $\frac{1}{n}$ dizisi onların altına hiç inemez. Bu tür yapılar dersimizin dışındadır; ama tamlığın sıradan görünen bu özelliği bile garanti eden şey olduğunu bilmek önemlidir.

12.2 Supremum ve İnfimum İspatlarında Arşimet Özelliği

Bir kümenin supremumunu ya da infimumunu tahmin etmek çoğu zaman kolaydır; zor olan tahmini ispatlamaktır. İspatın kalıbı, [Teorem 10.1](#) teoreminden gelir: s 'nin supremum olduğunu göstermek için önce s 'nin bir üst sınır olduğunu, sonra her $\varepsilon > 0$ için $s - \varepsilon$ 'dan büyük bir küme elemanı bulunduğunu göstermek gerekir. İkinci adımda “uygun bir n var” demek için hemen her zaman Arşimet özelliğine başvururuz.

Örnek 12.1 (Bir Eksi Bir Bölü n Kümesi). $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ kümesinin infimumunu ve supremumunu bulunuz.

Çözüm.

İnfimum. $n = 1$ için $1 - \frac{1}{1} = 0 \in A$ 'dır. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \leq 1$, yani $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ olduğundan 0 bir alt sınırdır. Kümeye ait olan bir alt sınır en küçük elemandır ([Tanım 10.3](#)); dolayısıyla

$$\min A = \inf A = 0.$$

Supremum. İddiamız $\sup A = 1$. İki adım var.

Üst sınır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} > 0$, dolayısıyla $1 - \frac{1}{n} < 1$. Yani 1, A için bir üst sınırdır.

En küçük üst sınır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $1 - \varepsilon < a$ olacak bir $a \in A$ bulmalıyız; yani

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

olacak bir $n \in \mathbb{N}$ arıyoruz. [Sonuç 12.2](#) tam olarak böyle bir n 'nin varlığını söyler. Bu n için $a = 1 - \frac{1}{n} \in A$ ve $a > 1 - \varepsilon$ 'dur. [Teorem 10.1](#) gereği $\sup A = 1$.

Son bir gözlem: $1 \notin A$ 'dır, çünkü $1 - \frac{1}{n} = 1$ olması $\frac{1}{n} = 0$ demek olurdu ki bu imkânsızdır. Demek ki A 'nın supremumu vardır ama maksimumu yoktur.

■

Örnek 12.2 (Üçe Yaklaşan Bir Küme). $A = \{\frac{3n^2}{n^2+n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ kümesi için $\sup A = 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce paydanın pozitif olduğunu görelim: $n \geq 2$ için $n^2 + n - 1 \geq 4 + 2 - 1 = 5 > 0$. Dolayısıyla kümenin elemanları iyi tanımlı ve pozitifdir.

Üst sınır. $n \geq 2$ için $n - 1 \geq 1 > 0$, yani $n^2 + n - 1 > n^2$. Pozitif bir sayıyı daha büyük bir pozitif sayıya bölmek sonucu küçültür:

$$\frac{3n^2}{n^2 + n - 1} < \frac{3n^2}{n^2} = 3.$$

Demek ki 3 bir üst sınırdır (ve kümeye ait değildir).

En küçük üst sınır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $3 - \varepsilon < \frac{3n^2}{n^2+n-1}$ olacak bir $n \geq 2$ arıyoruz; bu, $3 - \frac{3n^2}{n^2+n-1} < \varepsilon$ demektir. Sol tarafı hesaplayalım ve yukarıdan sınırlayalım:

$$3 - \frac{3n^2}{n^2 + n - 1} = \frac{3n^2 + 3n - 3 - 3n^2}{n^2 + n - 1} = \frac{3n - 3}{n^2 + n - 1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Buradaki eşitsizlikte payı büyüttük ($3n - 3 < 3n$) ve paydayı küçülttük ($n^2 + n - 1 > n^2$); ikisi de kesri büyütür. Şimdi $\frac{3}{n} < \varepsilon$, yani $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak bir n yeter. **Sonuç 12.2** gereği böyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır; gerekirse $n = \max\{n_0, 2\}$ olarak $n \geq 2$ koşulunu da sağlarız (büyük n için $\frac{1}{n}$ daha da küçüktür). Bu n için

$$3 - \frac{3n^2}{n^2 + n - 1} < \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

yani kümede $3 - \varepsilon$ 'dan büyük bir eleman vardır. **Teorem 10.1** gereği $\sup A = 3$.

💡 Supremum ispatının reçetesi

İki örnekte de aynı yolu izledik:

1. Tahmin edilen s sayısının bir üst sınır olduğunu cebirsel bir eşitsizlikle göster.
2. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ al; $s - \varepsilon < a_n$ eşitsizliğini n cinsinden çöz ya da (ikinci örnekteki gibi) $s - a_n$ farkını $\frac{\varepsilon}{n}$ biçiminde daha basit bir ifadeyle yukarıdan sınırla.
3. $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{c}$ sağlayan n 'nin varlığını **Sonuç 12.2** ile garanti et.

İnfimum için **Teorem 10.2** kullanılır ve eşitsizliklerin yönü ters çevrilir.

12.3 Aralık Ailelerinin Kesişimi ve Birleşimi

Arşimet özelliğinin bir başka tipik kullanımı, sonsuz çoklukta aralığın kesişimini ya da birleşimini hesaplamaktır. Buradaki temel fikir hep aynıdır: bir noktanın aileye ait **her** aralıkta bulunması, o noktanın " $\frac{1}{n}$ 'den küçük" her mesafeye dayanabilmesi demektir; Arşimet özelliği ise pozitif bir mesafenin buna dayanamayacağını söyler.

Örnek 12.3 (Sağa Kayan Işınlarmın Kesişimi). $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Olmayana ergi: kesişimde bir x elemanı bulunsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in [n, \infty)$, yani $x \geq n$ 'dir. Bu, x 'in $\mathbb{N}$ kümesi için bir üst sınır olması demektir. Ama **Sonuç 12.1** gereği $n > x$ olan bir doğal sayı vardır; çelişki. Demek ki kesişim boştur.

Örnek 12.4 (Kapalı Aralıkların Birleşimi Yarı Açık Aralık). $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n}{n+1}\right] = [0, 1)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Küme eşitliğini iki kapsamayla gösteririz.

($\subseteq$) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{n+1} < 1$ 'dir (çünkü $n < n+1$). Dolayısıyla $\left[0, \frac{n}{n+1}\right] \subseteq [0, 1)$ olur; bu aralıkların birleşimi de $[0, 1)$ içinde kalır.

($\supseteq$) $x \in [0, 1)$ alalım. $x < 1$ olduğundan $1 - x > 0$ 'dır. **Sonuç 12.2** gereği

$$\frac{1}{n} < 1 - x$$

olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < 1 - x$, yani

$$x < 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$0 \leq x$ de verildiğinden $x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, dolayısıyla x birleşime aittir.

Aynı düşünce, herhangi bir $[a, b]$ aralığını “dıştan daraltan” ve “içten genişleten” ailelere de uygulanır.

Önerme 12.1 (Kapalı ve Açık Aralıkları Üreten Aileler). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. O zaman

1. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right] = [a, b]$,
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right] = (a, b)$.

(İkinci ailede küçük n değerleri için $a + \frac{1}{n} > b - \frac{1}{n}$ olabilir; bu durumda o aralık boş kümedir ve birleşime katkısı yoktur.)

İspat.

- (1). $(\supseteq) x \in [a, b]$ ise her n için $a - \frac{1}{n} < a \leq x \leq b < b + \frac{1}{n}$, yani x ailenin her aralığındadır.
 $(\subseteq) x$ ailenin her aralığında olsun. $x < a$ olamayacağını gösterelim: $x < a$ olsaydı $a - x > 0$ olur ve [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < a - x$ sağlayan bir n bulunurdu; bu n için $x < a - \frac{1}{n}$, yani $x \notin \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right]$ olurdu – çelişki. Tamamen benzer biçimde $x > b$ olsaydı $\frac{1}{n} < x - b$ sağlayan bir n için $x > b + \frac{1}{n}$ olur, yine çelişirdi. Demek ki $a \leq x \leq b$.
 (2). $(\subseteq) x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$ ise $a < a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n} < b$, yani $x \in (a, b)$.
 $(\supseteq) x \in (a, b)$ alalım. $x - a > 0$ ve $b - x > 0$ olduğundan $\delta = \min\{x - a, b - x\}$ pozitiftir. [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < \delta$ olan bir n seçelim. O zaman $\frac{1}{n} < x - a$ verir $a + \frac{1}{n} < x$; $\frac{1}{n} < b - x$ verir $x < b - \frac{1}{n}$. Yani $x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$ ve x birleşime aittir.

■

Bu önerme ileride topolojide işimize yarayacak: kapalı bir aralığın, onu dıştan saran ve gitgide daralan aralıkların kesişimi; açık bir aralığın da içindeki kapalı aralıkların birleşimi olarak yazılabildiğini söyler. (1) ayrıca [Teorem 10.5](#) teoremiyle uyumludur: iç içe kapalı aralıkların kesişimi boş değildir ve burada tam olarak $[a, b]$ 'ye eşittir.

12.4 Taban Fonksiyonu

Arşimet özelliğinin en doğrudan sonuçlarından biri, her reel sayının iki ardışık tam sayı arasına düştüğüdür. Sezgisel olarak açık görünen bu olgu, tam sayıların üstten sınırlı boş olmayan her alt kümesinin maksimumu olduğu gerçeğine ([Teorem 11.2](#)) dayanır.

Önce bu bölümde birkaç kez kullanacağımız küçük bir gözlemi ayıralım; bu, önceki bölümdeki “ardışık tam sayılar arasında tam sayı yoktur” olgusunun ([Lemma 11.1](#)) mutlak değerle yazılmış hâlidir.

Lemma 12.1 (Mutlak Değeri Birden Küçük Tam Sayı). $k \in \mathbb{Z}$ ve $|k| < 1$ ise $k = 0$ 'dır. Dolayısıyla $p, p' \in \mathbb{Z}$ ve $|p - p'| < 1$ ise $p = p'$ olur.

İspat.

$k \neq 0$ olsun. $|k| < 1$ olduğundan iki durum vardır. $0 < k < 1$ ise, [Lemma 11.1](#) (1) gereği 0 ile 1 arasında tam sayı bulunmadığından çelişki çıkar. $-1 < k < 0$ ise $0 < -k < 1$ olur; $-k$ da bir tam sayıdır ([Önerme 11.1](#)) ve aynı çelişkiye düşeriz. Demek ki $k = 0$.

İkinci ifade için $k = p - p'$ alınır: tam sayılar çıkarma altında kapalıdır ([Önerme 11.1](#)), $|k| < 1$ olduğundan $k = 0$, yani $p = p'$.

■

Teorem 12.3 (Her Reel Sayı İki Ardışık Tam Sayı Arasındadır). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$p \leq x < p + 1$$

olacak biçimde **bir ve yalnız bir** $p \in \mathbb{Z}$ tam sayısı vardır.

İspat.

Varlık. $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ kümesini düşünelim.

A boş değildir: [Sonuç 12.1](#) gereği $m > -x$ olacak bir $m \in \mathbb{N}$ vardır; o zaman $-m < x$ ve $-m \in \mathbb{Z}$, yani $-m \in A$.

A üstten sınırlıdır: tanımı gereği her elemanı x 'i aşmaz.

Öyleyse [Teorem 11.2](#) gereği A 'nın bir en büyük elemanı vardır; ona p diyelim. $p \in A$ olduğundan $p \leq x$ 'tir. Şimdi $x < p + 1$ olduğunu görelim: aksi hâlde $p + 1 \leq x$ olurdu; $p + 1$ bir tam sayıdır ([Önerme](#)

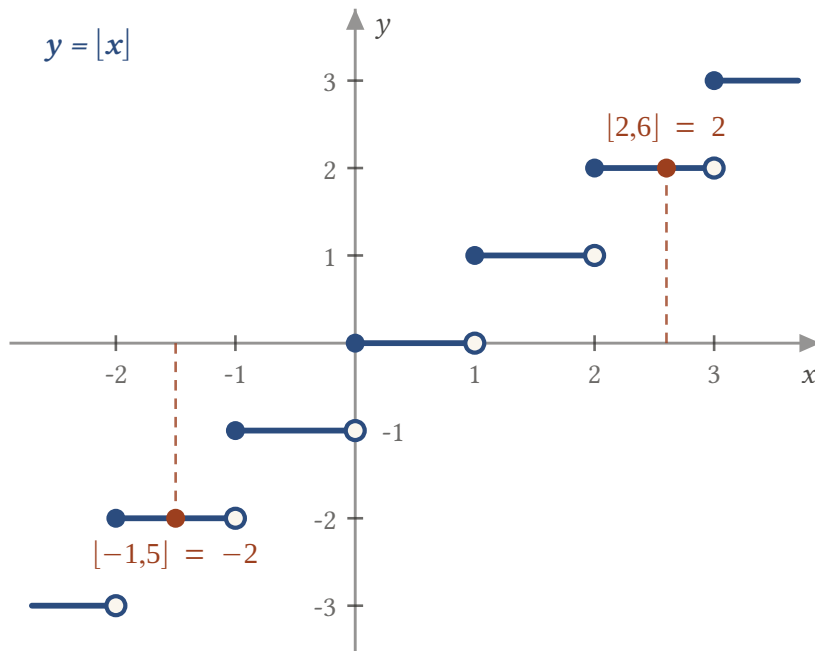
11.1), dolayısıyla $p + 1 \in A$ olurdu. Ama $p + 1 > p$ ve p , A 'nın en büyük elemanıydı — çelişki. Demek ki $p \leq x < p + 1$.

Teklik. p ve p' tam sayıların ikisi de koşulu sağlasın: $p \leq x < p + 1$ ve $p' \leq x < p' + 1$. İlkinden $p \leq x$ ve ikincisinden $x < p' + 1$ alırsak $p < p' + 1$, yani $p - p' < 1$. Rollerini değiştirince $p' - p < 1$. Demek ki $|p - p'| < 1$ ve **Lemma 12.1** gereği $p = p'$.

■

Bu teorem, her reel sayıya “hemen altındaki tam sayıyı” eşleyen bir fonksiyon tanımlamamıza izin verir.

Tanım 12.1 (Taban Fonksiyonu). $x \in \mathbb{R}$ olsun. $p \leq x < p + 1$ koşulunu sağlayan tek $p \in \mathbb{Z}$ tam sayısına x 'in **tabanı** (floor) denir ve $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ kuralıyla tanımlanan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonuna **taban fonksiyonu** (floor function) ya da **tam değer fonksiyonu** denir.



Şekil 12.2: Taban fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$ bir merdivendir: her $[p, p + 1)$ aralığında sabit p değerini alır. Sol uç dolu (değer alınır), sağ uç içi boştur (bir üst basamağa sıçar): $[2, 6] = 2$ ve $[-1, 5] = -2$.

Tanımın iyi tanımlı olması, yani her x için böyle bir p 'nin hem var hem tek olması, tam olarak **Teorem 12.3** ile güvence altındadır. Taban fonksiyonunun grafiği bir merdiven gibidir: her $[p, p + 1)$ aralığında sabit p değerini alır, sol uçta o değeri alır (dolu nokta), sağ uca ulaşmadan bir üst basamağa sıçar (içi boş nokta).

Örnek 12.5 (Taban Değerleri). $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor$, $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor$, $\lfloor 5 \rfloor$, $\lfloor -0, 2 \rfloor$ ve $m \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere $\lfloor \frac{1}{m} \rfloor$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Her seferinde $p \leq x < p + 1$ koşulunu sağlayan tam sayıyı arıyoruz.

- $1 \leq \frac{3}{2} < 2$ olduğundan $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$.
- $-2 \leq -\frac{3}{2} < -1$ olduğundan $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor = -2$. Dikkat: negatif sayılarda taban, “virgülden sonrasını atmak” değildir; -1 değil -2 çıkar, çünkü $-1 \leq -\frac{3}{2}$ yanlıştır.
- $5 \leq 5 < 6$ olduğundan $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Genel olarak $x \in \mathbb{Z}$ ise $\lfloor x \rfloor = x$ 'tir.
- $-1 \leq -0, 2 < 0$ olduğundan $\lfloor -0, 2 \rfloor = -1$.

- $m \geq 2$ için $0 < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} < 1$, dolayısıyla $\lfloor \frac{1}{m} \rfloor = 0$. Bu, önceki bölümde gördüğümüz bir olguyu yeniden verir: $m \geq 2$ olan bir tam sayının çarpmaya göre tersi $\frac{1}{m}$, 0 ile 1 arasında kaldığı için tam sayı olamaz (Lemma 12.1).

■

Taban fonksiyonunun sık kullanılan özelliklerini toplayalım.

Sonuç 12.3 (Taban Fonksiyonunun Özellikleri). $x \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{Z}$ olsun.

1. $\lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow p \leq x < p + 1$.
2. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$; buna denk olarak $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
3. $x = \lfloor x \rfloor + \theta$ olacak biçimde tek bir $\theta \in [0, 1)$ vardır (θ 'ya x 'in **kesir kısmı** denir).
4. $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.
5. $m \in \mathbb{Z}$ ise $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.
6. $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

İspat.

(1) tanımın kendisidir; p 'nin tekliği Teorem 12.3 ile verilmiştir.

(2) (1)'de $p = \lfloor x \rfloor$ alınca $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ çıkar. Sağdaki eşitsizlikten 1 çıkarınca $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ elde edilir.

(3) $\theta = x - \lfloor x \rfloor$ alalım. (2)'den $0 \leq \theta < 1$. Teklik: $x = \lfloor x \rfloor + \theta = \lfloor x \rfloor + \theta'$ ise $\theta = \theta'$.

(4) Teorem 12.3 ispatındaki $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ kümesinin maksimumunun tam olarak $p = \lfloor x \rfloor$ olduğunu gördük.

(5) $p = \lfloor x \rfloor$ olsun: $p \leq x < p + 1$. Her yana m ekleyince $p + m \leq x + m < (p + m) + 1$ olur ve $p + m \in \mathbb{Z}$ 'dir. (1) gereği $\lfloor x + m \rfloor = p + m$.

(6) $\lfloor x \rfloor = x$ ise x bir tam sayıdır, çünkü $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Tersine $x \in \mathbb{Z}$ ise $x \leq x < x + 1$ sağlanır ve (1) gereği $\lfloor x \rfloor = x$.

■

i Tavan fonksiyonu

Benzer biçimde x 'in hemen üstündeki tam sayıya **tavan** (ceiling) denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir: $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. Tavan için ayrı bir varlık teoremi gerekmez, çünkü $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ 'tir: $p = \lfloor -x \rfloor$ dersek $p \leq -x < p + 1$, yani $-p - 1 < x \leq -p$ olur; demek ki $-p$ tam sayısı tavan koşulunu sağlar (ve teklik, taban için olduğu gibi Lemma 12.1 ile çıkar). Limit ispatlarında " $n_\epsilon = \lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1$ " gibi seçimlerle hem taban hem tavan sıkça karşımıza çıkacak.

12.5 Bölme Algoritması

İlkokuldan bildiğimiz kalanlı bölme – “17’yi 5’e bölünce bölüm 3, kalan 2” – aslında taban fonksiyonunun bir uygulamasıdır. Onu, bölünen sayı negatif olsa bile geçerli olacak biçimde kesinleştirelim.

Teorem 12.4 (Bölme Algoritması). $n, b \in \mathbb{Z}$ ve $b > 0$ olsun. O zaman

$$n = bq + r \quad \text{ve} \quad 0 \leq r < b$$

olacak biçimde **bir ve yalnız bir** (q, r) tam sayı çifti vardır. q 'ya **bölüm**, r 'ye **kalan** denir.

İspat.

Varlık. $x = \frac{n}{b}$ reel sayısını ve $q = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tam sayısını alalım. Sonuç 12.3 (2) gereği $q \leq x < q + 1$, yani

$$0 \leq x - q < 1.$$

Her yanı $b > 0$ ile çarparsak (O4) $0 \leq bx - bq < b$, ve $bx = n$ olduğundan

$$0 \leq n - bq < b.$$

$r = n - bq$ koyalım. r , tam sayıların farkı ve çarpımı olarak bir tam sayıdır (Önerme 11.1); $n = bq + r$ ve $0 \leq r < b$ sağlanır.

Teklilik. $n = bq + r = bq' + r'$ ve $0 \leq r, r' < b$ olsun. Taraf tarafa çıkarınca

$$b(q - q') = r' - r.$$

$0 \leq r < b$ ve $0 \leq r' < b$ olduğundan $-b < r' - r < b$, yani $|r' - r| < b$. Buradan $b \mid q - q' \mid < b$ ve $b > 0$ ile bölünce $|q - q'| < 1$ çıkar. $q - q'$ bir tam sayı olduğundan Lemma 12.1 gereği $q = q'$, dolayısıyla $r = n - bq = n - bq' = r'$.

■

İspat yalnızca varlığı değil, bölümün ve kalanın nasıl hesaplanacağını da söyler:

$$q = \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \quad r = n - bq.$$

Kalanın 0 olması, $n = bq$ demektir; yani $r = 0 \Leftrightarrow b \mid n$ (Tanım 11.3). Böylece bölünebilme, bölme algoritmasının özel durumu olarak yeniden görünür.

Örnek 12.6 (Bölüm ve Kalan Hesabı). $n = 17$ ve $n = -17$ sayılarını $b = 5$ 'e bölerek bölüm ve kalanı bulunuz.

Çözüm.

$n = 17$ için $x = \frac{17}{5} = 3,4$ ve $q = [3,4] = 3$; kalan $r = 17 - 5 \cdot 3 = 2$. Gerçekten $17 = 5 \cdot 3 + 2$ ve $0 \leq 2 < 5$.

$n = -17$ için $x = -3,4$ ve $q = [-3,4] = -4$ (çünkü $-4 \leq -3,4 < -3$); kalan $r = -17 - 5 \cdot (-4) = -17 + 20 = 3$. Gerçekten $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$ ve $0 \leq 3 < 5$.

Dikkat: $-17 = 5 \cdot (-3) - 2$ yazmak da doğrudur ama kalan -2 negatif olduğu için teoremin istediği biçim değildir; teorem kalanın daima $0 \leq r < b$ aralığında olmasını ister ve bu koşul altında (q, r) çifti tektir.

■

i Bölme algoritması ne işe yarar?

Bölme algoritması, her tam sayının b 'ye bölümünden kalanına göre sınıflandırılmasını sağlar: $b = 2$ için her tam sayı ya $2k$ ya da $2k + 1$ biçimindedir (çift ya da tek; Tanım 11.2), $b = 3$ için her tam sayı $3k$, $3k + 1$ ya da $3k + 2$ biçimindedir. Bir sonraki bölümün alıştırmalarında $\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu gösterirken bu üçlü ayrımı kullanacağız.

12.6 Alıştırmalar

Alıştırma 12.1 (Arşimet Özelliği ve Taban Fonksiyonu Alıştırmaları).

- $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ için $\inf A = 0$ olduğunu ve A 'nın minimumunun olmadığını gösteriniz.
- $B = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ için $\sup B = 2$ olduğunu gösteriniz.
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ olduğunu gösteriniz.
- Her $x \in \mathbb{R}$ için $[x] + [-x]$ toplamının $x \in \mathbb{Z}$ iken 0, $x \notin \mathbb{Z}$ iken -1 olduğunu gösteriniz.
- Her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} > 0$ olduğundan 0 bir alt sınırdır. Teorem 10.2 gereği $\inf A = 0$ olması için her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$ olan bir eleman bulmak yeter; bu tam olarak Sonuç 12.2'dir. Demek ki $\inf A = 0$. Minimum yoktur: minimum olsaydı infimuma eşit, yani 0 olurdu; ama $0 \notin A$, çünkü hiçbir n için $\frac{1}{n} = 0$ olmaz.

b) $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ yazalım. $\frac{1}{n+1} > 0$ olduğundan her eleman 2'den küçüktür; 2 bir üst sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olan bir n seçersek $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, dolayısıyla

$$2 - \frac{1}{n+1} > 2 - \varepsilon.$$

Yani B' 'de $2 - \varepsilon$ 'dan büyük bir eleman vardır; [Teorem 10.1](#) gereği $\sup B = 2$.

c) *Birinci kesişim.* Kesişimde bir x olsun. Her n için $0 < x < \frac{1}{n}$, özellikle $x > 0$. [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < x$ olan bir n vardır; bu n için $x \notin (0, \frac{1}{n})$ — çelişki. Kesişim boştur.

İkinci kesişim. 0, her $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ aralığındadır; demek ki $\{0\}$ kesişimin alt kümesidir. Tersine, $x \neq 0$ olsun; $|x| > 0$ ([Teorem 8.1](#)) ve [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < |x|$ olan bir n vardır. [Önerme 8.6](#) gereği $x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ olması $|x - 0| = |x| < \frac{1}{n}$ demektir; bu ise seçtiğimiz n için yanlıştır. Yani $x \neq 0$ olan hiçbir sayı kesişimde değildir ve kesişim tam olarak $\{0\}$ 'dir.

d) $x \in \mathbb{Z}$ ise $-x \in \mathbb{Z}$ ve [Sonuç 12.3](#) (6) gereği $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0$.

$x \notin \mathbb{Z}$ olsun ve $p = \lfloor x \rfloor$ diyelim. $p \leq x < p + 1$ ve $x \neq p$ olduğundan $p < x < p + 1$ 'dir. Her yanı -1 ile çarpınca (yön değişir) $-p - 1 < -x < -p$ elde ederiz; yani $-x$, ardışık $-p - 1$ ve $-p$ tam sayıları arasındadır ve [Sonuç 12.3](#) (1) gereği $\lfloor -x \rfloor = -p - 1$. Böylece $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = p + (-p - 1) = -1$.

e) [Teorem 9.5](#) gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n > n$, dolayısıyla $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ olur. [Sonuç 12.2](#) ile $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olan bir n seçersek $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ elde ederiz.

■

Arşimet özelliği, tamlık aksiyomunun “doğal sayılar her şeyi aşar” yönünü kullandı. Sıradaki bölümde aynı aksiyomun öbür yüzünü göreceğiz: reel sayı doğrusunda boşluk yoktur — $x^2 = 2$ denkleminin bir çözümü vardır, ama bu çözüm rasyonel değildir; yine de rasyonel sayılar doğrunun her yerine sokulur. [Köklerin Varlığı, İrrasyonel Sayılar ve Yoğunluk](#).

13. Köklerin Varlığı, İrrasyonel Sayılar ve Yoğunluk

Önceki bölümde tamlık aksiyomunun “doğal sayılar her reel sayıyı aşar” yönünü, yani Arşimet özelliğini işledik. Bu bölümde aynı aksiyomun asıl karakterini belirleyen öbür yüzüne bakıyoruz: reel sayı doğru-sunda **boşluk yoktur**. Rasyonel sayılarla çalışırken $x^2 = 2$ gibi masum bir denklemin çözümü yoktur; reel sayılarda ise tamlık aksiyomu bu çözümü üretir. Böylece $\sqrt{2}$ 'yi gerçekten tanımlayabilecek, sonra da onun rasyonel olmadığını göstererek $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ olduğunu ispatlayacağız.

Bölümün ikinci yarısı, rasyonel ve irrasyonel sayıların doğru üzerinde nasıl iç içe geçtiğini anlatır: birbirinden farklı herhangi iki reel sayının arasında hem rasyonel hem irrasyonel sayılar vardır, üstelik sonsuz çoklukta. Bu **yoğunluk** olgusu, ileride limit ve süreklilik kavramlarında sık sık kullanılacak.

13.1 Karekök İkisinin Varlığı

Tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) “üstten sınırlı boş olmayan her kümenin supremumu vardır” der. Bir denklemin çözümünü bulmak için bu aksiyomu şöyle kullanırız: çözümün “altında kalan” sayıların kümesini yazar, bu kümenin supremumunu alır ve supremumun tam olarak aradığımız çözüm olduğunu gösteririz. İlk ve en ünlü örnek $x^2 = 2$ denklemdir.

Teorem 13.1 (Karekök İkisinin Varlığı). $x^2 = 2$ olacak biçimde **bir ve yalnız bir** pozitif reel sayı x vardır. Bu sayı $\sqrt{2}$ ile gösterilir.

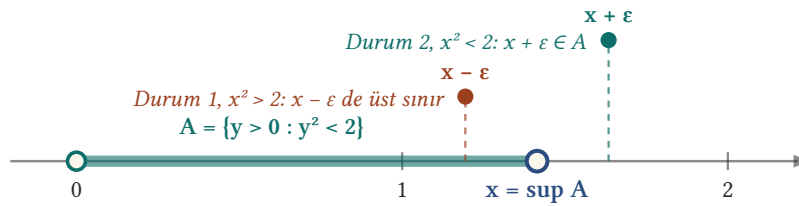
İspat.

Varlık. $A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^2 < 2\}$ kümesini alalım.

A boş değildir: $1 > 0$ ve $1^2 = 1 < 2$ olduğundan $1 \in A$.

A üstten sınırlıdır ve 2 bir üst sınırdır: $y \geq 2$ olsaydı $y^2 \geq 2y \geq 4 > 2$ olur, $y \notin A$ olurdu. Demek ki her $y \in A$ için $y < 2$.

Tamlık aksiyomu gereği $x = \sup A$ vardır. $1 \in A$ olduğundan $x \geq 1 > 0$. Şimdi $x^2 = 2$ olduğunu göstereceğiz; üçlem yasına göre (Bölüm 7.1) $x^2 > 2$, $x^2 < 2$ ya da $x^2 = 2$ 'dir. İlk ikisinin çelişkiye götürdüğünü göstereceğiz.



Şekil 13.1: $A = \{y > 0 : y^2 < 2\}$ kümesi ve en küçük üst sınırı x . $x^2 > 2$ olsaydı biraz küçüğü $x - \varepsilon$ de üst sınır olurdu (x en küçük olamaz); $x^2 < 2$ olsaydı biraz büyüğü $x + \varepsilon$ kümeye düşerdi (x üst sınır olamaz). Geriye $x^2 = 2$ kalır.

Durum 1: $x^2 > 2$. Bu durumda x 'ten biraz küçük bir sayının da A için üst sınır olduğunu, böylece x 'in en küçük üst sınır olamayacağını göstereceğiz. Küçük bir $\varepsilon > 0$ için

$$(x - \varepsilon)^2 = x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > x^2 - 2x\varepsilon$$

olur. Sağ tarafın 2'den büyük ya da eşit olması için $x^2 - 2x\varepsilon \geq 2$, yani $\varepsilon \leq \frac{x^2 - 2}{2x}$ yeter. O hâlde

$$\varepsilon = \frac{x^2 - 2}{2x}$$

seçelim; $x^2 > 2$ ve $x > 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ 'dır. Ayrıca $\varepsilon < \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} < x$, dolayısıyla $x - \varepsilon > 0$. Bu seçimle

$$(x - \varepsilon)^2 > x^2 - 2x\varepsilon = x^2 - (x^2 - 2) = 2.$$

Şimdi $y \in A$ keyfi olsun: $y > 0$ ve $y^2 < 2 < (x - \varepsilon)^2$. İki pozitif sayıdan karesi küçük olan kendisi de küçüktür (Önerme 7.12 (4)'ün karşıt tersi: $y \geq x - \varepsilon > 0$ olsaydı $y^2 \geq (x - \varepsilon)^2$ olurdu), yani $y < x - \varepsilon$. Demek ki $x - \varepsilon$, A için bir üst sınırdır. Ama $x - \varepsilon < x = \sup A$ ve supremum en küçük üst sınırdır — çelişki.

Durum 2: $x^2 < 2$. Bu kez x 'ten biraz büyük bir sayının hâlâ A 'da olduğunu, böylece x 'in üst sınır olamayacağını göstereceğiz. $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$ olduğundan

$$(x + \varepsilon)^2 = x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 \leq x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon = x^2 + \varepsilon(2x + 1).$$

Sağ tarafın 2'den küçük olması için $\varepsilon(2x + 1) < 2 - x^2$ yeter. O hâlde

$$\varepsilon = \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

seçelim; $x^2 < 2$ olduğundan $\varepsilon > 0$ 'dır. $\varepsilon \leq 1$ koşulunu da kontrol edelim: $x \geq 1$ olduğundan $2 - x^2 \leq 1$ ve $2x + 1 \geq 3$, yani $\varepsilon \leq \frac{1}{3} < 1$. Üstelik $0 < \varepsilon < 1$ olduğundan $\varepsilon^2 < \varepsilon$ eşitsizliği **kesindir**; dolayısıyla yukarıdaki açılım da kesin eşitsizlik verir:

$$(x + \varepsilon)^2 < x^2 + \varepsilon(2x + 1) = x^2 + (2 - x^2) = 2.$$

Ayrıca $x + \varepsilon > 0$. Demek ki $x + \varepsilon \in A$. Ama $x + \varepsilon > x = \sup A$, oysa supremum A 'nın her elemanından büyük ya da eşittir — çelişki.

Her iki durum da çelişki verdiği için $x^2 = 2$ 'dir.

Teklilik. $x, y > 0$ ve $x^2 = y^2 = 2$ olsun. $x < y$ olsaydı Önerme 7.12 gereği $x^2 < y^2$ olurdu; $y < x$ olsaydı $y^2 < x^2$ olurdu. İkisi de $x^2 = y^2$ ile çelişir; üçlem yasaından $x = y$.

■

💡 Epsilon seçimleri nereden geldi?

İspattaki ε değerleri gökten inmedi. Her iki durumda da önce $(x \mp \varepsilon)^2$ ifadesini açtık, ε^2 terimini uygun yönde bir eşitsizlikle attık ve geriye kalan ε 'a **göre doğrusal** ifadeyi 2 ile karşılaştırdık. Doğrusal eşitsizliği ε için çözmek, seçimi verir. İkinci durumda $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$ diyebilmek için $\varepsilon \leq 1$ gerekiyordu; seçimin bunu otomatik sağladığını ayrıca kontrol ettik. Bu “önce aç, doğrusallaştır, sonra çöz” tekniği analizde çok sık kullanılır.

Teoremin asıl mesajı şudur: tamlık aksiyomu, denklemleri “yaklaşık çözümlerin supremumu” olarak çözmemize izin verir. Aynı yöntem her pozitif sayının her mertebeden köküne uygulanabilir.

13.2 n-inci Köklerin Varlığı

Genel durumda $(x + \varepsilon)^n$ açılımıyla uğraşmak yerine, kuvvet farklarını denetleyen basit bir özdeşlik kullanacağız.

Lemma 13.1 (Kuvvet Farkı Özdeşliği). $n \in \mathbb{N}$ ve $u, v \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$v^n - u^n = (v - u)(v^{n-1} + v^{n-2}u + \dots + v u^{n-2} + u^{n-1}) = (v - u) \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-1-k} u^k.$$

Toplamdaki u^0 ve v^0 çarpanları, u ya da v sıfır olsa bile 1 olarak okunur; Tanım 11.5 0^0 'ı tanımsız bıraktığından özdeşliğin **her** $u, v \in \mathbb{R}$ için geçerli olması bu uzlaşımı gerektirir. Örneğin $n = 1$ için toplam tek terimden ibarettir ve özdeşlik $v - u = (v - u) \cdot 1$ olur.

Özel olarak $0 < u < v$ ise

$$v^n - u^n \leq (v - u) n v^{n-1}.$$

İspat.

Sağ taraftaki çarpımı dağıtalım:

$$(v - u) \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-1-k} u^k = \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k} u^k - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-1-k} u^{k+1}.$$

İkinci toplamda $j = k + 1$ yazarsak $\sum_{j=1}^n v^{n-j} u^j$ olur. İlk toplam $j = 0, 1, \dots, n-1$, ikincisi $j = 1, \dots, n$ terimlerini içerir; ortak $j = 1, \dots, n-1$ terimleri birbirini götürür ve geriye $v^n u^0 - v^0 u^n = v^n - u^n$ kalır.

Eşitsizlik için $0 < u < v$ olsun. **Teorem 11.3** gereği her $k \geq 1$ için $u^k < v^k$, dolayısıyla toplamdaki her terim $v^{n-1-k} u^k \leq v^{n-1-k} v^k = v^{n-1}$ sağlar ($k = 0$ için eşitlik vardır). Toplamda n terim olduğundan toplam $\leq n v^{n-1}$ 'dir; $v - u > 0$ ile çarpınca istenen eşitsizlik çıkar.

■

Teorem 13.2 (n-inci Kökün Varlığı). $a > 0$ bir reel sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $x^n = a$ olacak biçimde bir ve yalnız bir pozitif reel sayı x vardır. Bu sayıya a 'nın **n-inci kökü** denir ve

$$x = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

ile gösterilir. Ayrıca $0^{1/n} = 0$ tanımlanır; $n = 2$ için $\sqrt{a}$ yazılır.

İspat.

Varlık. $A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^n < a\}$ olsun.

A boş değildir: $y_0 = \frac{a}{1+a}$ alalım. $0 < y_0 < 1$ ve $y_0 < a$ 'dır (çünkü $1 + a > 1$). $0 < y_0 < 1$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $y_0^k < 1^k = 1$ (**Teorem 11.3** (4)); $n = 1$ için de $y_0^0 = 1$. Dolayısıyla $y_0^n = y_0^{n-1} y_0 \leq y_0 < a$; yani $y_0 \in A$.

A üstten sınırlıdır ve $1 + a$ bir üst sınırdır: $y \geq 1 + a > 1$ olsaydı, $y > 1$ için $y^{n-1} \geq 1$ olduğundan (yine (4) ile; $n = 1$ için $y^0 = 1$) $y^n = y \cdot y^{n-1} \geq y \geq 1 + a > a$ olurdu, yani $y \notin A$.

Tamlik aksiyomu gereği $x = \sup A$ vardır ve $x \geq y_0 > 0$. Yine üçlem yasasıyla $x^n < a$ ve $x^n > a$ durumlarını çürüteceğiz.

Durum 1: $x^n < a$. x 'ten biraz büyük bir sayının A 'da olduğunu göstereceğiz. $0 < h < 1$ olsun. **Lemma 13.1** eşitsizliğini $u = x, v = x + h$ için uygularsak

$$(x + h)^n - x^n \leq h n (x + h)^{n-1} \leq h n (x + 1)^{n-1}$$

olur (ikinci adımda $x + h < x + 1$ ve **Teorem 11.3** kullanıldı; $n = 1$ için üs sıfırdır ve iki taraf 1'e eşittir). Şimdi

$$0 < h < 1 \quad \text{ve} \quad h < \frac{a - x^n}{n(x + 1)^{n-1}}$$

koşullarının ikisini de sağlayan bir h seçelim (sağdaki sayı pozitifdir; iki pozitif sayının küçüğünün yarısı işimizi görür). O zaman

$$(x + h)^n \leq x^n + h n (x + 1)^{n-1} < x^n + (a - x^n) = a,$$

yani $x + h \in A$. Ama $x + h > x = \sup A$ — çelişki.

Durum 2: $x^n > a$. x 'ten biraz küçük bir sayının A için üst sınır olduğunu göstereceğiz.

$$k = \frac{x^n - a}{n x^{n-1}}$$

alalım. $x^n > a$ olduğundan $k > 0$; $x^n - a < x^n$ olduğundan $k < \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x}{n} \leq x$. Demek ki $0 < x - k < x$. **Lemma 13.1** eşitsizliğini $u = x - k, v = x$ için uygularsak

$$x^n - (x - k)^n \leq k n x^{n-1} = x^n - a,$$

yani $(x - k)^n \geq a$. Şimdi $t \geq x - k$ olan herhangi bir $t > 0$ için **Teorem 11.3** gereği $t^n \geq (x - k)^n \geq a$, dolayısıyla $t \notin A$. Karşıt tersi: her $y \in A$ için $y < x - k$. Yani $x - k$, A 'nın bir üst sınırıdır; ama $x - k < x = \sup A$ — çelişki.

Her iki durum çelişki verdiğinden $x^n = a$ 'dır.

Teklik. $x, y > 0$ ve $x^n = y^n = a$ olsun. $x < y$ olsaydı **Teorem 11.3** gereği $x^n < y^n$ olurdu; $y < x$ olsaydı tersi. İkisi de $x^n = y^n$ ile çelişir; dolayısıyla $x = y$.

■

Bu teoremle $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a}$ gibi ifadeler artık iyi tanımlı reel sayılardır. Pozitif olmayan sayıların kökleri içinse n 'nin tek ya da çift olması belirleyicidir.

Önerme 13.1 (Negatif Sayının Çift Mertebeden Kökü Yoktur). $a < 0$ ve n çift bir doğal sayı ise $x^n = a$ olacak bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur.

İspat.

$n = 2k$ olsun ($k \in \mathbb{N}$). Her $x \in \mathbb{R}$ için **Teorem 11.3** gereği $x^n = x^{2k} = (x^k)^2$ 'dir ve bir reel sayının karesi negatif olamaz (**Önerme 7.12**): $x^n \geq 0$. Demek ki $x^n = a < 0$ olması imkânsızdır.

■

Önerme 13.2 (Negatif Sayının Tek Mertebeden Kökü). $a < 0$ ve n tek bir doğal sayı ise $x^n = a$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $x \in \mathbb{R}$ vardır ve bu x negatiftir. Bu durumda da $x = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ yazılır.

İspat.

Varlık. $b = -a > 0$ olsun. **Teorem 13.2** gereği $y^n = b$ olan tek bir $y > 0$ vardır. $x = -y$ alalım. n tek olduğundan $n = 2k + 1$ yazılır ve **Teorem 11.3** ile $(-1)^n = ((-1)^2)^k (-1) = 1^k \cdot (-1) = -1$ 'dir; yine aynı teoremle

$$x^n = (-y)^n = (-1)^n y^n = -b = a.$$

Teklik. $x^n = a < 0$ olan herhangi bir x alalım. $x \geq 0$ olsaydı $x^n \geq 0$ olurdu; demek ki $x < 0$ ve $-x > 0$. O zaman $(-x)^n = (-1)^n x^n = -a = b$, yani $-x$, b 'nin pozitif n -inci köküdür. Bu kök tek olduğundan $-x = y$, yani $x = -y$.

■

Örnek 13.1 (Kökleri Teklikle Hesaplama). Teklik teoremlerini kullanarak $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-27} = -3$ ve $16^{1/4} = 2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Kökün tekliği, bir sayının kök olduğunu göstermek için yalnızca iki şeyi kontrol etmemiz gerektiğini söyler: işareti ve kuvvetini.

$\sqrt{8}$. $2\sqrt{2} > 0$ ve $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$. Demek ki $2\sqrt{2}$, 8'in pozitif karekökü, yani **Teorem 13.2**'teki teklik gereği $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\sqrt[3]{-27}$. $(-3)^3 = -27$ ve $-3 < 0$. **Önerme 13.2** gereği $x^3 = -27$ denkleminin tek çözümü -3 'tür.

$16^{1/4}$. $2 > 0$ ve $2^4 = 16$. Teklikten $16^{1/4} = 2$.

■

13.3 Karekök İki Rasyonel Değildir

Artık $\sqrt{2}$ gerçek bir sayı. Peki rasyonel mi? Bu sorunun yanıtı Pisagorcuları sarsmıştı; ispatı ise kısa ve zariftir. Daha önce ispat yöntemlerini işlerken bu ispatla karşılaşmıştık (**Örnek 2.7**); şimdi onu, elimizdeki kesin tanımlarla yeniden yazalım.

Teorem 13.3 (Karekök İki Rasyonel Değildir). $x^2 = 2$ olacak bir rasyonel sayı x yoktur. Başka bir deyişle $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

İspat.

Olmayana ergi: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olsun. Her rasyonel sayı, paydası doğal sayı ve payı ile paydası aralarında asal olacak biçimde, yani sadeleştirilmiş olarak yazılabilir (Önerme 11.5). $\sqrt{2} > 0$ ve payda pozitif olduğundan pay da pozitifdir; demek ki

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, m \text{ ile } n \text{ aralarında asal}$$

yazabiliriz. Karesini alırsak $2 = \frac{m^2}{n^2}$, yani

$$m^2 = 2n^2.$$

Bu, m^2 'nin çift olduğunu söyler. Önerme 11.3 gereği o zaman m de çifttir: $m = 2p$ olacak bir $p \in \mathbb{Z}$ vardır. Yerine koyarsak $4p^2 = 2n^2$, yani

$$n^2 = 2p^2.$$

Demek ki n^2 çifttir ve yine Önerme 11.3 gereği n çifttir. Hem m hem n çift; yani 2 ikisinin ortak bölenidir. Bu, m ile n 'nin aralarında asal olmasıyla çelişir. Demek ki $\sqrt{2}$ rasyonel değildir.

■

Bu teorem önceki bölümde açık bırakılan bir noktayı da kapatır: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ kapsaması özdür, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Teorem 11.4). Ama daha derin bir sonuç var: rasyonel sayılar tamlık aksiyomunu sağlamaz. Yani $\mathbb{Q}$ da bir sıralı cisimdir ama “delikli” bir sıralı cisimdir.

Sonuç 13.1 (Tamlık Aksiyomu Rasyonellerde Geçersizdir). $B = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ kümesi boş değildir ve $\mathbb{Q}$ içinde üstten sınırlıdır; ama B 'nin rasyonel sayılar içinde en küçük üst sınırı yoktur. Yani “üstten sınırlı boş olmayan her kümenin supremumu vardır” ifadesi $\mathbb{Q}$ 'da yanlıştır.

İspat.

$1 \in B$ olduğundan $B \neq \emptyset$; Teorem 13.1 ispatındaki gibi 2 rasyonel bir üst sınırdır.

Olmayana ergi: $s \in \mathbb{Q}$, B 'nin rasyonel sayılar içindeki en küçük üst sınırı olsun; yani s bir üst sınır ve s 'den küçük hiçbir rasyonel sayı üst sınır değil. $1 \in B$ olduğundan $s \geq 1 > 0$. Üçlem yasasına göre üç durum vardır.

$s^2 = 2$ **olamaz**, çünkü s rasyoneldir ve Teorem 13.3 bunu yasaklar.

$s^2 > 2$ **olamaz**. Teorem 13.1 ispatının birinci durumundaki gibi $\varepsilon = \frac{s^2-2}{2s}$ alalım. s rasyonel olduğundan ε de rasyoneldir (Önerme 11.6) ve $0 < \varepsilon < s$. Aynı hesaplama $(s - \varepsilon)^2 > 2$ ve dolayısıyla her $q \in B$ için $q < s - \varepsilon$: $s - \varepsilon$, B 'nin rasyonel bir üst sınırıdır ve s 'den küçüktür — s 'nin en küçük olmasıyla çelişir.

$s^2 < 2$ **olamaz**. İkinci durumdaki gibi $\varepsilon = \frac{2-s^2}{2s+1}$ alalım; yine rasyoneldir, $0 < \varepsilon < 1$ ve $(s + \varepsilon)^2 < 2$. Demek ki $s + \varepsilon \in B$; ama $s + \varepsilon > s$, yani s bir üst sınır değildir — çelişki.

Üç durum da imkânsız olduğundan böyle bir s yoktur.

■

Sonuç, $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ arasındaki farkın tam olarak nerede olduğunu gösterir: cebirsel ve sıralama aksiyomları iki kümede de geçerlidir; ayrılık yalnızca tamlık aksiyomundadır. Reel sayı kavramının bütün gücü bu tek aksiyomdan gelir.

13.4 İrrasyonel Sayılar

Reel sayı doğrusunda rasyonel sayıların kapatamadığı noktalar olduğunu artık biliyoruz; bu “geri kalan” sayılara bir ad verelim.

Tanım 13.1 (İrrasyonel Sayı). Rasyonel olmayan reel sayılara **irrasyonel sayı** (irrational number) denir. İrrasyonel sayıların kümesi

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

ile gösterilir. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ 'dir.

Teorem 13.3 gereği $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır; demek ki $\mathbb{I} \neq \emptyset$. Yeni irrasyonel sayılar üretmenin en kolay yolu, bir irrasyonel sayıyı rasyonellerle “karıştırmaktır”.

Önerme 13.3 (Rasyonel ile İrrasyonelin Toplamı ve Çarpımı). $x \in \mathbb{Q}$ ve $y \in \mathbb{I}$ olsun.

1. $x + y$ irrasyoneldir.
2. $x \neq 0$ ise xy irrasyoneldir.

İspat.

(1) Olmayana ergi: $x + y = q \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman $y = q - x$ iki rasyonel sayının farkıdır; rasyonel sayılar çıkarma altında kapalı olduğundan (Önerme 11.6) $y \in \mathbb{Q}$. Bu, y 'nin irrasyonel olmasıyla çelişir.

(2) Olmayana ergi: $xy = q \in \mathbb{Q}$ olsun. $x \neq 0$ olduğundan x^{-1} vardır ve rasyoneldir (Önerme 11.6). O zaman $y = q \cdot x^{-1}$ iki rasyonelin çarpımı olarak rasyoneldir — çelişki.

■

⚠ İki irrasyonelin toplamı ve çarpımı

Önerme, bir rasyonel ile bir irrasyoneli birleştirir. İki **irrasyonel** sayının toplamı ya da çarpımı ise rasyonel de irrasyonel de olabilir:

- Toplam: $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ ve $-\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ (ikincisi önermenin (2) maddesinden), ama $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.
- Çarpım: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.
- Öte yandan $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$; ilki irrasyonel, ikincisi rasyoneldir.

Yani $\mathbb{I}$, toplama ve çarpma altında kapalı **değildir**; $\mathbb{Q}$ 'nun tersine bir cisim değildir.

Örnek 13.2 (İrrasyonel Olduğu Gösterilen Sayılar). $3 - \sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$3 - \sqrt{2}$. Önerme 13.3 (2) gereği $-\sqrt{2} = (-1) \cdot \sqrt{2}$ irrasyoneldir; (1) gereği $3 + (-\sqrt{2})$ de irrasyoneldir. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bu sayı $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ 'dir; $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ sıfırdan farklı olduğundan (2) gereği irrasyoneldir. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ olduğundan bir önceki maddeye indirgenir. Genel olarak, irrasyonel bir $y \neq 0$ için $\frac{1}{y}$ de irrasyoneldir: $\frac{1}{y} = q \in \mathbb{Q}$ olsaydı $q \neq 0$ ve $y = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ olurdu.

■

13.5 Rasyonel Üsler

Kökler tanımlandığına göre $a^{1/n}$ anlamlıdır; tam sayı kuvvetlerle (Tanım 11.5) birleştirerek rasyonel üsleri tanımlayabiliriz.

Tanım 13.2 (Rasyonel Kuvvet). $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a 'nın $\frac{m}{n}$ -inci kuvveti şu koşullarla tanımlanır:

- $a > 0$ ise $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$.
- $a = 0$ ve $m > 0$ ise $0^{m/n} = 0$; $m \leq 0$ için $0^{m/n}$ tanımsızdır.
- $a < 0$ ise önce $\frac{m}{n}$ kesri sadeleştirilir (m ile n aralarında asal alınır). n tek ise $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$, burada $a^{1/n}$ Önerme 13.2 ile verilen negatif köktür.
- $a < 0$ ve (sadeleştirilmiş kesirde) n çift ise $a^{m/n}$ **tanımsızdır**.

i Tanım tutarlı mı?

Tanımda iki şüphe doğar; önce ikisini de $a > 0$ için giderelim, sonra $a < 0$ hâline bakalım. ($a < 0$ için tanımı yalnızca sadeleştirilmiş kesre uyguladığımızdan orada temsil sorunu zaten doğmaz.)
 $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$ midir? $y = a^{1/n} > 0$ olsun. **Teorem 11.3** gereği $(y^m)^n = y^{mn} = (y^n)^m = a^m$ ve $y^m > 0$; demek ki y^m, a^m 'nin pozitif n -inci köküdür ve teklikten $y^m = (a^m)^{1/n}$. Yani önce kök sonra kuvvet ile önce kuvvet sonra kök aynı sonucu verir.
 Sonuç kesrin yazılışına bağlı mı? $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ ($k \in \mathbb{N}$) için $a^{mk/(nk)} = a^{m/n}$ olmalı. $z = a^{1/(nk)} > 0$ olsun. $(z^k)^n = z^{nk} = a$ olduğundan teklikle $z^k = a^{1/n}$. O hâlde $a^{mk/(nk)} = z^{mk} = (z^k)^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n}$. Demek ki tanım, $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısının hangi temsille yazıldığından bağımsızdır.
 Negatif tabanda da “önce kök” ile “önce kuvvet” aynı mı? Evet, sadeleştirilmiş $\frac{m}{n}$ kesrinde n tek iken de aynı denklik geçerlidir. $y = (a^{1/n})^m$ diyelim; **Teorem 11.3** gereği $y^n = ((a^{1/n})^n)^m = a^m$ ’dir. $a^{1/n} < 0$ olduğundan m çift ise $y > 0$ ve $a^m > 0$; teklik (**Teorem 13.2**) $y = (a^m)^{1/n}$ verir. m tek ise $y < 0$ ve $a^m < 0$; bu kez aynı sonucu **Önerme 13.2**’teki teklik verir.

Tam sayı üsler için bildiğimiz kurallar rasyonel üslere de aktarılır.

Teorem 13.4 (Rasyonel Üs Kuralları). $a, b > 0$ reel sayılar ve $p, q \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$,
2. $a^p \cdot b^p = (ab)^p$,
3. $(a^p)^q = a^{pq}$.

İspat.

$p = \frac{m}{n}$ ve $q = \frac{k}{l}$ olsun ($m, k \in \mathbb{Z}; n, l \in \mathbb{N}$). Her adımda **Teorem 11.3** (tam sayı üsler) ile köklerin tekliğini (**Teorem 13.2**) kullanacağız.

(1) Ortak paydaya geçelim: $p = \frac{ml}{nl}$, $q = \frac{kn}{nl}$. $N = nl$ ve $u = a^{1/N} > 0$ olsun. Yukarıdaki callout gereği $a^p = u^{ml}$ ve $a^q = u^{kn}$; dolayısıyla

$$a^p a^q = u^{ml} u^{kn} = u^{ml+kn} = a^{(ml+kn)/N} = a^{p+q}.$$

(2) $y = a^{1/n}$, $z = b^{1/n}$ olsun. $(yz)^n = y^n z^n = ab$ ve $yz > 0$; teklikten $yz = (ab)^{1/n}$. O zaman

$$a^p b^p = y^m z^m = (yz)^m = ((ab)^{1/n})^m = (ab)^{m/n} = (ab)^p.$$

(3) $v = a^{1/(nl)} > 0$ olsun. $(v^l)^n = v^{nl} = a$ olduğundan teklikle $v^l = a^{1/n}$; dolayısıyla $w = a^p = (v^l)^m = v^{lm}$. Şimdi $(v^m)^l = v^{ml} = w$ ve $v^m > 0$, teklikle $w^{1/l} = v^m$. Böylece

$$(a^p)^q = w^{k/l} = (w^{1/l})^k = (v^m)^k = v^{mk} = a^{mk/(nl)} = a^{pq}.$$

■

⚠ Negatif tabanlarda dikkat

Kurallar $a, b > 0$ için ispatlandı. Negatif tabanlarda çift paydalı üsler tanımsız olduğu için kurallar bozulabilir. Örneğin (3) kuralı $p = 2$, $q = \frac{1}{6}$ için $((-8)^2)^{1/6} = (-8)^{2 \cdot \frac{1}{6}} = (-8)^{1/3} = -2$ vermek isterdi ($\frac{2}{6}$ 'nın sadeleştirilmiş biçimi $\frac{1}{3}$ ’tür); oysa sol taraf $64^{1/6} = 2$ ’dir. Sorunun kaynağı, çift bir kuvvetin tabanın işaretini silmesidir: $(-8)^2 = 64 = 8^2$ olduğundan altıncı kök artık -8 ile 8 ’i birbirinden ayırt edemez ve pozitif olanı verir. (Kesir sadeleştirilmeden bırakılsaydı da bir şey kazanmazdık: paydası çift olduğu için $(-8)^{2/6}$ ifadesi tanımsızdır.) Bu yüzden rasyonel üslerle çalışırken taban pozitif tutulur.

13.6 Rasyonel ve İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu

$\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{I}$ reel doğruyu iki ayrık parçaya böler; ama bu parçalar “adalar” hâlinde değil, birbirinin içine sonsuz incelikte örülmüş biçimde durur. Bunun kesin ifadesi yoğunluktur.

Tanım 13.3 (Yoğun Küme (Sıralama Anlamında)). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $x < y$ olan her $x, y \in \mathbb{R}$ çifti için $x < a < y$ olacak bir $a \in A$ varsa A kümesine $\mathbb{R}$ 'de **yoğun** (dense) denir.

Sözle: yoğun bir küme, ne kadar kısa olursa olsun her açık aralığa girer. İleride topoloji bölümünde yoğunluğu kapanış kavramıyla yeniden tanımlayacağız (Tanım 17.6); iki tanımın denk olduğu orada gösterilecek.

Teorem 13.5 (Rasyonel Sayıların Yoğunluğu). $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 'de yoğundur: $a < b$ olan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < q < b$ olacak bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır.

İspat.

$a < b$ olsun; $b - a > 0$ 'dır. Fikir şu: (a, b) aralığını n katına büyütüp uzunluğunu 1'i aşacak hâle getirirsek içine bir tam sayı sığar; sonra n 'e bölerek geri döneriz.

Adım 1: Aralığı büyütme. *Teorem 12.1* teoremini pozitif sayı $b - a$ ve keyfi sayı 1 için uygulayalım: $n(b - a) > 1$, yani

$$nb - na > 1$$

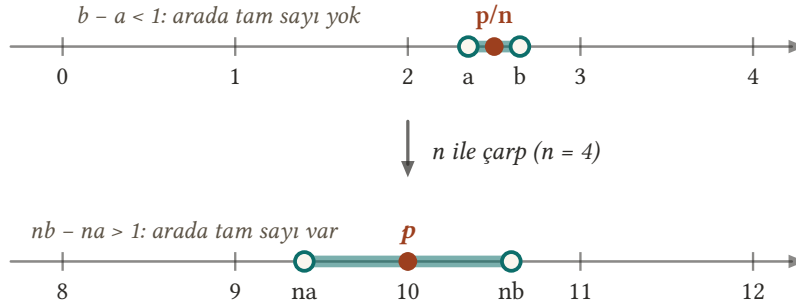
olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Adım 2: Araya tam sayı sıkıştırma. $p = \lfloor na \rfloor + 1$ alalım (Tanım 12.1); $p \in \mathbb{Z}$ 'dir. *Teorem 12.3* gereği $\lfloor na \rfloor \leq na < \lfloor na \rfloor + 1 = p$, yani

$$na < p.$$

Öte yandan $p = \lfloor na \rfloor + 1 \leq na + 1 < nb$; buradaki son eşitsizlik Adım 1'deki $nb - na > 1$ 'dir. Böylece

$$na < p < nb.$$



Şekil 13.2: Üstte a ile b arasında tam sayı olmayabilir. n ile çarpınca aralık 1'den uzun olur ($nb - na > 1$) ve arasına bir p tam sayısı sığar; n 'e bölünce p/n rasyonel sayısı a ile b arasına düşer.

Adım 3: Geri dönüş. $n > 0$ olduğundan her yanı $\frac{1}{n}$ ile çarpınca (yön korunur)

$$a < \frac{p}{n} < b.$$

$q = \frac{p}{n}$ bir rasyonel sayıdır (Tanım 11.6) ve a ile b arasındadır.

■

İspat yapıcıdır: verilen $a < b$ için önce $\frac{1}{n} < b - a$ olan bir n , sonra $p = \lfloor na \rfloor + 1$ hesaplanır ve $q = \frac{p}{n}$ aranır.

Teorem 13.6 (İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu). $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ 'de yoğundur: $a < b$ olan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < r < b$ olacak bir $r \in \mathbb{I}$ vardır.

İspat.

$a < b$ olsun. Aralığı $\sqrt{2}$ kadar sola kaydıralım: $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$. *Teorem 13.5* gereği

$$a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$$

olacak bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. Her yana $\sqrt{2}$ ekleyince $a < q + \sqrt{2} < b$. q rasyonel ve $\sqrt{2}$ irrasyonel olduğundan **Önerme 13.3** gereği $r = q + \sqrt{2}$ irrasyoneldir. Aradığımız sayı budur.

■

Sonuç 13.2 (Aralıkta Sonsuz Çoklukta Rasyonel ve İrrasyonel). $a < b$ olan her $a, b \in \mathbb{R}$ için (a, b) aralığında sonsuz çoklukta rasyonel ve sonsuz çoklukta irrasyonel sayı vardır.

İspat.

Rasyoneller için gösterelim; irrasyoneller için ispat kelimesi kelimesine aynıdır (**Teorem 13.6** kullanılarak). Olmayana ergi: $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ sonlu, yani elemanları $q_1, \dots, q_n$ diye listelenebilir olsun. **Teorem 13.5** gereği bu küme boş değildir; sonlu ve boş olmayan bir kümenin en büyük elemanı vardır (**Önerme 10.1**), ona q_0 diyelim. $q_0 < b$ olduğundan yine yoğunluk gereği $q_0 < q' < b$ olan bir $q' \in \mathbb{Q}$ vardır. $a < q_0 < q' < b$ olduğundan $q' \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$; ama $q' > q_0 = \max((a, b) \cap \mathbb{Q})$ – çelişki. Demek ki küme sonsuzdur.

■

Örnek 13.3 (Aralıkta Rasyonel Sayı Bulma). $\sqrt{2} \approx 1,414214$ olduğu bilinsin. $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{2} + 0,001$ arasında bir rasyonel sayıyı, **Teorem 13.5** ispatındaki yöntemle bulunuz.

Çözüm.

$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} + 0,001$ ve $b - a = 0,001$.

Adım 1. $n(b - a) > 1$, yani $n > 1000$ olmalı; $n = 1001$ alalım.

Adım 2. $na = 1001\sqrt{2} \approx 1415,63$; dolayısıyla $\lfloor na \rfloor = 1415$ ve $p = 1416$. Gerçekten $na \approx 1415,63 < 1416 < 1416,63 \approx nb$.

Adım 3. $q = \frac{1416}{1001} \approx 1,414585$. Kontrol: $1,414214 < 1,414585 < 1,415214$.

Aynı aralıkta bir irrasyonel sayı istenseydi, **Teorem 13.6** ispatındaki gibi kaydırılmış $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}) = (0, 0,001)$ aralığından bir rasyonel, örneğin $\frac{1}{2000}$, seçilir ve $\sqrt{2} + \frac{1}{2000}$ alınır.

■

Yoğunluğun bir başka anlatımı, her reel sayının rasyonel sayılarla “aşağıdan kuşatılabildiği”dir. Bu, reel sayıları rasyonellerden inşa eden yaklaşımların (Dedekind kesitleri) da çıkış noktasıdır.

Önerme 13.4 (Her Reel Sayı Rasyonellerin Supremumudur). Her $a \in \mathbb{R}$ için $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$ kümesi boş değildir, üstten sınırlıdır ve $\sup A = a$ 'dır.

İspat.

Boş değil. **Sonuç 12.1** gereği $n > -a$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır; o zaman $-n < a$ ve $-n \in \mathbb{Q}$, yani $-n \in A$. Üstten sınırlı. Tanım gereği her $q \in A$ için $q < a$; a bir üst sınırdır. Dolayısıyla $s = \sup A$ vardır ve $s \leq a$. $s = a$. $s < a$ olsaydı **Teorem 13.5** gereği $s < q' < a$ olan bir $q' \in \mathbb{Q}$ bulunurdu. $q' < a$ olduğundan $q' \in A$; ama $q' > s = \sup A$, supremum ise A 'nın her elemanından büyük ya da eşittir – çelişki. Demek ki $s = a$.

■

i Rasyonel ile reel arasındaki fark, tek cümleyle

$a = \sqrt{2}$ alırsak $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2}\}$ tamamen rasyonel sayılardan oluşur, ama supremumu irrasyoneldir. Yani rasyonellerden oluşan sınırlı bir kümenin en küçük üst sınırı rasyonellerin dışına düşebilir; bu, **Sonuç 13.1**'un başka bir görünümüdür. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ 'nun bütün bu “eksik supremumlarını” ekleyerek elde edilen, artık deliksiz sayı doğrusudur.

Bir uyarı: yoğunluk, “çokluk” demek değildir. $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{I}$ da yoğundur; ama sıradaki bölümde göreceğimiz gibi $\mathbb{Q}$ sayılabilirken $\mathbb{R}$ (dolayısıyla $\mathbb{I}$) sayılamazdır (**Teorem 14.8**).

13.7 Alıştırmalar

Alıştırma 13.1 (Kökler, İrrasyonel Sayılar ve Yoğunluk Alıştırmaları).

- $\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu gösteriniz. (İpucu: her tam sayı $3k$, $3k + 1$ ya da $3k + 2$ biçimindedir; [Teorem 12.4](#).)
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu gösteriniz.
- $a < b$ olan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < \frac{m}{2^k} < b$ olacak biçimde $m \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ bulunduğunu gösteriniz. (Bu tür sayılara **ikili rasyonel** denir.)
- $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ içindeki supremumunun $\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.
- $C = \{x \in \mathbb{I} : x > 0\}$ için $\inf C = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce bir yardımcı olgu: $m \in \mathbb{Z}$ için $3 \mid m^2$ ise $3 \mid m$. [Teorem 12.4](#) ile $m = 3k + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$ yazalım. $r = 1$ ise $m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$; $r = 2$ ise $m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. İki durumda da m^2 'nin 3'e bölümünden kalan 1'dir, yani $3 \nmid m^2$. Demek ki $3 \mid m^2$ ancak $r = 0$, yani $3 \mid m$ iken mümkündür.

Şimdi $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$ aralarında asal) olsun. Kare alınca $m^2 = 3n^2$, yani $3 \mid m^2$ ve yardımcı olgudan $3 \mid m$: $m = 3k$. Yerine koyunca $9k^2 = 3n^2$, yani $n^2 = 3k^2$; aynı olguyla $3 \mid n$. 3, hem m 'yi hem n 'yi böler; aralarında asal olmalarıyla çelişir. ($\sqrt{3}$ 'ün varlığı [Teorem 13.2](#) ile güvence altındadır.)

b) $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasyonel olsun. $r > 0$ 'dır. $r - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ eşitliğinin karesini alalım:

$$r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r}.$$

Sağ taraf rasyonel sayılarla yapılan işlemlerden oluşur ($r \neq 0$), dolayısıyla rasyoneldir ([Önerme 11.6](#)). Bu, [Teorem 13.3](#) ile çelişir. Demek ki $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrasyoneldir.

c) $b - a > 0$. [Sonuç 12.1](#) ile $k > \frac{1}{b-a}$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. [Teorem 9.5](#) gereği $2^k = (1 + 1)^k \geq 1 + k > k > \frac{1}{b-a}$, dolayısıyla $2^k(b - a) > 1$, yani $2^k b - 2^k a > 1$. Şimdi [Teorem 13.5](#) ispatındaki gibi $m = \lfloor 2^k a \rfloor + 1$ alalım: $2^k a < m \leq 2^k a + 1 < 2^k b$. Her yanı $2^{-k} > 0$ ile çarpınca $a < \frac{m}{2^k} < b$.

d) Üst sınır. $q \in A$ olsun. $q \geq \sqrt{2}$ olsaydı [Önerme 7.12](#) gereği $q^2 \geq 2$ olurdu; demek ki $q < \sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ bir üst sınırdır.

En küçük üst sınır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $c = \max\{\sqrt{2} - \varepsilon, 0\}$ olsun, $c < \sqrt{2}$ 'dir. [Teorem 13.5](#) gereği $c < q < \sqrt{2}$ olan bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. $q > c \geq 0$ ve $0 < q < \sqrt{2}$ olduğundan $q^2 < 2$; yani $q \in A$ ve $q > \sqrt{2} - \varepsilon$. [Teorem 10.1](#) gereği $\sup A = \sqrt{2}$.

Bu, [Sonuç 13.1](#) ile birlikte okunmalı: aynı kümenin $\mathbb{R}$ içinde supremumu vardır ($\sqrt{2}$), $\mathbb{Q}$ içinde yoktur.

e) C 'nin her elemanı pozitif olduğundan 0 bir alt sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. [Teorem 13.6](#) gereği $0 < r < \varepsilon$ olan bir $r \in \mathbb{I}$ vardır; $r \in C$ ve $r < 0 + \varepsilon$. [Teorem 10.2](#) gereği $\inf C = 0$. ($0 \notin C$ olduğundan minimum yoktur.)

■

Rasyoneller de irrasyoneller de doğrunun her yerindedir; öyleyse hangisi “daha çok”? Bu sorunun şaşırtıcı yanıtı için sonsuz kümelerin büyüklüğünü karşılaştırmayı öğrenmemiz gerekiyor: [Sonlu](#), [Sonsuz](#) ve [Sayılabilir Kümeler](#).

14. Sonlu, Sonsuz ve Sayılabilir Kümeler

Önceki bölümde rasyonel sayıların da irrasyonel sayıların da sayı doğrusunda yoğun olduğunu gördük: her aralıkta ikisinden de sonsuz çoklukta eleman var. Peki bu iki sonsuz kümeden hangisi “daha kalabalık”? Sonlu kümelerde bu soruyu elemanları sayarak yanıtlanır; sonsuz kümelerde “kaç eleman var” sorusunun anlamı bile açık değildir. Georg Cantor 1874’te bu soruya kesin bir anlam kazandırdı ve şaşırtıcı bir yanıt buldu: doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar “aynı büyüklükte”dir; reel sayılar ise bunlardan kesinlikle daha büyüktür.

Bu bölümde önce iki kümenin ne zaman “aynı büyüklükte” sayılacağını tanımlayacak, sonra sonlu, sonsuz ve sayılabilir kümeleri inceleyecek, en sonunda Cantor’un teoremini ispatlayacağız.

14.1 Eşgüçlü Kümeler

Bir salondaki sandalyelerle öğrencileri karşılaştırmak için ikisini de saymak gerekmez: herkes bir sandalyeye otursun. Boş sandalye kalmamış ve ayakta kimse yoksa sandalye sayısı öğrenci sayısına eşittir. “Saymadan karşılaştırma”nın bu yolu, yani her elemanı öbür kümenin tam bir elemanı ile eşlemek, sonsuz kümeler de uygulanabilir. Matematikte bu eşleme birebir-örtten fonksiyondur.

Tanım 14.1 (Eşgüçlü Kümeler). A ve B iki küme olsun. A ’dan B ’ye birebir-örtten (bijektif) bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu varsa (bkz. Tanım 5.7) A ile B eşgüçlüdür (equinumerous) denir ve

$$A \sim B$$

yazılır. Boş küme yalnızca boş kümeyle eşgüçlüdür: boş olmayan bir kümeden boş kümeye hiç fonksiyon yoktur, boş kümeden boş olmayan bir kümeye giden tek fonksiyon (boş fonksiyon) ise örtten değildir.

Eşgüçlülük, “kümelerin büyüklüğünü karşılaştırma” bağıntısıdır ve bir denklik bağıntısının üç özelliğini taşır.

Önerme 14.1 (Eşgüçlülüğün Özellikleri). A, B, C kümeleri için şunlar sağlanır:

1. $A \sim A$.
2. $A \sim B$ ise $B \sim A$.
3. $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise $A \sim C$.

İspat.

(1) Birim fonksiyon $I_A : A \rightarrow A$, $I_A(x) = x$ birebir-örtendir.

(2) $f : A \rightarrow B$ birebir-örtten olsun. Teorem 5.5 gereği f ’nin tersi $f^{-1} : B \rightarrow A$ vardır; f^{-1} ’in tersi de f olduğundan aynı teoreme f^{-1} birebir-örtendir. Dolayısıyla $B \sim A$.

(3) $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ birebir-örtten olsun. Teorem 5.4 gereği birebir fonksiyonların bileşkesi birebir, örtten fonksiyonların bileşkesi örtendir; o hâlde $g \circ f : A \rightarrow C$ birebir-örtendir ve $A \sim C$.

■

Bu özellikler sayesinde eşgüçlülük zincirleme kullanılır: $A \sim \mathbb{N}$ olduğunu göstermek için doğrudan bir eşleme bulmak yerine $A \sim B$ ve $B \sim \mathbb{N}$ göstermek yeter. Şimdi ilk şaşırtıcı örneğe bakalım.

Örnek 14.1 (Doğal Sayılar ve Çift Sayılar). $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$ çift doğal sayılar kümesi olsun. $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ ’nin öz alt kümesi olduğu hâlde $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{1\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ alalım. $f(n) = f(m)$ ise $2n = 2m$, sadeleştirme ile (Önerme 6.3) $n = m$ olur; f birebirdir. Her çift doğal sayı tanım gereği bir $n \in \mathbb{N}$ için $2n$ biçimindedir, yani $f(n)$ ’dir; f örtendir. O hâlde $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.

İkinci iddia için $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $g(n) = n + 1$ alalım. $n + 1 = m + 1$ ise $n = m$; g birebirdir. $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ise **Önerme 9.3** (2) gereği $k - 1 \in \mathbb{N}$ 'dir ve $g(k - 1) = k$; g örtendir.

■

Bu örnek Galileo'nun 1638'de dikkat çektiği "paradoks"tur: çift sayılar doğal sayıların "yarısı" gibi görünür, ama ikisi eşgüçlüdür. Sonlu kümelerde bir parça bütünle eşgüçlü olamaz; sonsuz kümelerde olabilir. Bunun sonsuzluğun tam da ayırt edici özelliği olduğunu birazdan göreceğiz.

Örnek 14.2 (Aralıklar ve Reel Sayılar Eşgüçlüdür).

a) $a < b$ ve $c < d$ ise $(a, b) \sim (c, d)$ olduğunu gösteriniz.

b) $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz. Buradan her açık aralığın $\mathbb{R}$ ile eşgüçlü olduğu sonucunu çıkarınız.

Çözüm.

a) $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ fonksiyonunu

$$f(x) = c + (d - c) \frac{x - a}{b - a}$$

ile tanımlayalım. $x \in (a, b)$ ise $0 < \frac{x-a}{b-a} < 1$, dolayısıyla $c < f(x) < d$; f gerçekten (c, d) 'ye gider. $d - c > 0$ ve $b - a > 0$ olduğundan $x < y$ iken $f(x) < f(y)$ olur: f kesin artandır, dolayısıyla birebirdir. Örtelik: $y \in (c, d)$ verilsin,

$$x = a + (b - a) \frac{y - c}{d - c}$$

alalım. $0 < \frac{y-c}{d-c} < 1$ olduğundan $x \in (a, b)$ 'dir ve yerine koyunca $f(x) = y$ bulunur.

b) $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$ olsun; $|x| < 1$ olduğundan payda pozitifdir. Tersini bulmak için $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $h(y) = \frac{y}{1+|y|}$ tanımlayalım; $|h(y)| = \frac{|y|}{1+|y|} < 1$ olduğundan h gerçekten $(-1, 1)$ 'e gider. Şimdi iki bileşkeyi hesaplayalım. $|h(y)| = \frac{|y|}{1+|y|}$ ve $1 - |h(y)| = \frac{1}{1+|y|}$ olduğundan

$$g(h(y)) = \frac{y/(1+|y|)}{1/(1+|y|)} = y \quad (y \in \mathbb{R})$$

Benzer biçimde $|g(x)| = \frac{|x|}{1-|x|}$ ve $1 + |g(x)| = \frac{1}{1-|x|}$ olduğundan

$$h(g(x)) = \frac{x}{1-|x|} (1-|x|) = x \quad (x \in (-1, 1))$$

Demek ki $h \circ g = I_{(-1,1)}$ ve $g \circ h = I_{\mathbb{R}}$; yani h , g 'nin ters fonksiyonudur. **Teorem 5.5** gereği ters fonksiyonu olan g birebir-örtendir: $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

Son olarak herhangi bir (a, b) açık aralığı için (a) şıkından $(a, b) \sim (-1, 1)$, (b) şıkından $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$; **Önerme 14.1** ile $(a, b) \sim \mathbb{R}$.

■

Uzunluğu ne kadar küçük olursa olsun her açık aralık, bütün sayı doğrusuyla eşgüçlüdür. "Büyüklik" kavramımız uzunlukla ilgili değildir; yalnızca eşlemeyle ilgilidir.

14.2 Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$$

yazalım. "Bir kümenin n elemanı var" demek, elemanlarını 1'den n 'ye kadar numaralayabilmek, yani kümeyi $\mathbb{N}_n$ ile eşleyebilmek demektir. Ancak bu tanımın anlamlı olması için aynı kümenin hem $\mathbb{N}_n$ hem de $\mathbb{N}_m$ ($m \neq n$) ile eşgüçlü olamayacağını bilmemiz gerekir. Bunu garanti eden ilke, günlük dildeki adıyla "güvercin yuvası ilkesi"dir: n yuvaya n 'den çok güvercin ancak en az bir yuvaya iki güvercin koyarak yerleştirilebilir.

Lemma 14.1 (Güvercin Yuvası İlkesi). $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N}_m$ 'den $\mathbb{N}_n$ 'ye birebir bir fonksiyon varsa $m \leq n$ 'dir. Başka bir deyişle $m > n$ ise $\mathbb{N}_m$ 'den $\mathbb{N}_n$ 'ye hiçbir fonksiyon birebir olamaz.

İspat.

n üzerinden tümevarımla (Teorem 9.1) şu önermeyi ispatlayacağız: “Her $m \in \mathbb{N}$ ve her birebir $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$ için $m \leq n$.”

Başlangıç ($n = 1$): $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \{1\}$ birebir olsun. $m \geq 2$ olsaydı $f(1) = f(2) = 1$ olurdu; oysa $1 \neq 2$, bu birebirlikle çelişir. O hâlde $m = 1 \leq 1$.

Tümevarım adımı: Önerme n için doğru olsun; $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_{n+1}$ birebir olsun. $m = 1$ ise $m \leq n + 1$ zaten sağlanır. $m \geq 2$ olsun. Amacımız birebir bir $g : \mathbb{N}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_n$ kurmaktır; çünkü o zaman tümevarım varsayımı $m - 1 \leq n$, yani $m \leq n + 1$ verir. İki durum vardır.

- $n + 1$ değeri $f(1), \dots, f(m - 1)$ arasında yoksa: $g = f|_{\mathbb{N}_{m-1}}$ alalım. Değerleri $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{n + 1\} = \mathbb{N}_n$ içindedir ve birebir fonksiyonun kısıtlaması birebirdir.
- Bir $j \leq m - 1$ için $f(j) = n + 1$ ise: f birebir olduğundan böyle bir j tektir ve $f(m) \neq n + 1$ 'dir ($m \neq j$). $g : \mathbb{N}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_n$ fonksiyonunu

$$g(i) = \begin{cases} f(i), & i \neq j \\ f(m), & i = j \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $i \neq j$ için $f(i) \neq n + 1$ ve $f(m) \neq n + 1$ olduğundan g 'nin bütün değerleri $\mathbb{N}_n$ içindedir. Birebirlik: $i \neq i'$ olsun. İkisi de j 'den farklıysa $g(i) = f(i) \neq f(i') = g(i')$. Biri, diyelim $i = j$ ise $g(j) = f(m)$ ve $g(i') = f(i')$; $i' \leq m - 1 < m$ olduğundan $f(i') \neq f(m)$. Her durumda $g(i) \neq g(i')$.

Her iki durumda da birebir $g : \mathbb{N}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_n$ bulundu; tümevarım varsayımıyla $m - 1 \leq n$, dolayısıyla $m \leq n + 1$. Tümevarım ilkesiyle önerme her n için doğrudur.

■

Artık “eleman sayısı” kavramını güvenle tanımlayabiliriz.

Tanım 14.2 (Sonlu ve Sonsuz Kümeler). Bir A kümesi, $A = \emptyset$ ise ya da bir $n \in \mathbb{N}$ için $A \sim \mathbb{N}_n$ ise **sonlu** (finite) kümedir. $A \sim \mathbb{N}_n$ durumunda “ A 'nın n elemanı vardır” denir ve $|A| = n$ yazılır; ayrıca $|\emptyset| = 0$ alınır. Sonlu olmayan kümeye **sonsuz** (infinite) küme denir.

Sonuç 14.1 (Eleman Sayısı Tektir). $m, n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N}_m \sim \mathbb{N}_n$ ise $m = n$ 'dir. Dolayısıyla sonlu bir kümenin eleman sayısı $|A|$ iyi tanımlıdır.

İspat.

$f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örten olsun. f birebir olduğundan Lemma 14.1 ile $m \leq n$; $f^{-1} : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ de birebir olduğundan (Teorem 5.5) $n \leq m$. O hâlde $m = n$. $A \sim \mathbb{N}_m$ ve $A \sim \mathbb{N}_n$ ise Önerme 14.1 ile $\mathbb{N}_m \sim \mathbb{N}_n$, yani $m = n$ olur; eleman sayısı tektir.

■

Sonuç 14.2 (Doğal Sayılar Kümesi Sonsuzdur). $\mathbb{N}$ sonsuz bir kümedir.

İspat.

$\mathbb{N} \neq \emptyset$ açıktır. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örten olsaydı, $\mathbb{N}_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan kısıtlama $f|_{\mathbb{N}_{n+1}} : \mathbb{N}_{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir olurdu. Lemma 14.1 bu durumda $n + 1 \leq n$ verir; çelişki.

■

Sonlu kümelerin en temel özelliği, alt kümelerinin de sonlu ve daha küçük olmasıdır.

Önerme 14.2 (Sonlu Kümenin Alt Kümesi Sonludur). A sonlu bir küme ve $B \subseteq A$ olsun. O zaman B sonludur ve $|B| \leq |A|$ 'dır. Karşıt tersiyle: sonsuz bir kümeyi kapsayan her küme sonsuzdur.

İspat.

Adım 1: $\mathbb{N}_n$ 'nin her alt kümesi sonludur. n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ için $B \subseteq \{1\}$ ya $\emptyset$ ya da $\{1\} = \mathbb{N}_1$ 'dir; ikisi de sonludur. Önerme n için doğru olsun ve $B \subseteq \mathbb{N}_{n+1}$ alalım. $n + 1 \notin B$ ise $B \subseteq \mathbb{N}_n$ 'dir ve varsayım ile sonludur. $n + 1 \in B$ ise $B' = B \setminus \{n + 1\} \subseteq \mathbb{N}_n$ sonludur. $B' = \emptyset$ ise $B = \{n + 1\} \sim \mathbb{N}_1$. Değilse bir k için birebir-örten $g : B' \rightarrow \mathbb{N}_k$ vardır; $\tilde{g} : B \rightarrow \mathbb{N}_{k+1}$ fonksiyonunu B' üzerinde g ile, $\tilde{g}(n + 1) = k + 1$ ile tanımlayalım. g, B' 'yi $\mathbb{N}_k$ 'ye birebir-örten götürür ve yeni eleman $n + 1$ yeni değer $k + 1$ 'e gider; dolayısıyla $\tilde{g}$ birebir-örtendir ve $B \sim \mathbb{N}_{k+1}$ sonludur.

Adım 2: Genel durum. $A = \emptyset$ ise $B = \emptyset$ sonludur. $A \sim \mathbb{N}_n$ olsun, $f : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örten olsun. $f(B) \subseteq \mathbb{N}_n$ Adım 1 gereği sonludur. Kısıtlama $f|_B : B \rightarrow f(B)$ birebirdir (birebir fonksiyonun kısıtlaması) ve görüntüsü üzerine örtendir; yani $B \sim f(B)$. $f(B)$ sonlu olduğundan B de sonludur.

Adım 3: $|B| \leq |A|$. $B = \emptyset$ ise açık. $B \sim \mathbb{N}_k$ ve $A \sim \mathbb{N}_n$ olsun; $\varphi : \mathbb{N}_k \rightarrow B$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örten olsun. $\mathbb{N}_k \xrightarrow{\varphi} B \subseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{N}_n$ bileşkesi birebirdir; **Lemma 14.1** ile $k \leq n$.

■

Bu önerme sayesinde $\mathbb{N}$ 'yi kapsayan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin sonsuz olduğunu hemen söyleyebiliriz (**Sonuç 14.2**).

14.3 Sayılabilir Kümeler

Sonsuz kümeler arasında “evcil” olanlar, elemanları bir dizi hâlinde $a_1, a_2, a_3, \dots$ diye yazılabilenlerdir: her elemana bir sıra numarası verilebilir, hiçbir eleman atlanmaz. Bu tam olarak $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü olmak demektir.

Tanım 14.3 (Sayılabilir ve Sayılamaz Kümeler). A bir küme olsun.

- $A \sim \mathbb{N}$ ise A 'ya **sayılabilir sonsuz** (countably infinite) küme denir.
- A sonlu ya da sayılabilir sonsuz ise A 'ya **sayılabilir** (countable) küme denir.
- Sayılabilir olmayan kümeye **sayılamaz** (uncountable) küme denir.

A sayılabilir sonsuz ve $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ birebir-örten ise $a_n = f(n)$ yazarak $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ elde ederiz; burada a_n 'ler birbirinden farklıdır ve A 'nın her elemanı listede tam bir kez görünür. “Sayılabilir” sözcüğü buradan gelir: kümenin elemanları “sayılarak” bitirilemez ama “sayılmaya başlanabilir” ve her elemana sıra gelir.

⚠ Terim uyarısı

Bazı kitaplar “sayılabilir” sözcüğünü yalnızca $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü kümeler için kullanır ve bizim “sayılabilir” dediğimize “en çok sayılabilir” (at most countable) der. Bu notlarda sonlu kümeler de sayılabilirdir; $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü olanları ayırt etmek istediğimizde açıkça “sayılabilir sonsuz” diyeceğiz.

İlk teoremimiz, $\mathbb{N}$ 'nin alt kümelerinin daha küçük bir sonsuzluk üretemeyeceğini söyler. İspatın anahtarı iyi sıralama ilkesidir: alt kümenin elemanlarını küçükten büyüğe sıralayarak numaralarız.

Teorem 14.1 (Doğal Sayıların Alt Kümeleri Sayılabilirdir). $\mathbb{N}$ 'nin her alt kümesi sayılabilirdir. Özel olarak $\mathbb{N}$ 'nin sonsuz her alt kümesi $\mathbb{N}$ ile eşgüçlüdür.

İspat.

$A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. A sonluysa tanım gereği sayılabilirdir. A sonsuz olsun; $A \sim \mathbb{N}$ göstereceğiz.

Dizinin kuruluşu. $A \neq \emptyset$ olduğundan **Teorem 9.2** gereği A 'nın en küçük elemanı vardır; $a_1 = \min A$ diyelim. $a_1, \dots, a_n$ seçilmiş olsun ve

$$A_n = A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

yazalım. Kuruluş gereği $a_{k+1} \in A_k$, yani $a_{k+1} \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ olduğundan $a_1, \dots, a_n$ birbirinden farklıdır ve $i \mapsto a_i$ eşlemesiyle $\{a_1, \dots, a_n\} \sim \mathbb{N}_n$ sonludur. $A_n = \emptyset$ olsaydı $A \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ olur, **Önerme 14.2** gereği A sonlu olurdu; demek ki $A_n \neq \emptyset$ ve $a_{n+1} = \min A_n$ tanımlanabilir. Böylece A 'nın elemanlarından oluşan bir (a_n) dizisi elde ettik; $A_0 = A$ yazarsak her n için $a_n = \min A_{n-1}$ 'dir.

Dizi kesin artandır. $a_{n+1} \in A_n \subseteq A_{n-1}$ ve $a_n = \min A_{n-1}$ olduğundan $a_n \leq a_{n+1}$; ayrıca $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ olduğundan $a_{n+1} \neq a_n$. O hâlde $a_n < a_{n+1}$. Zincirleme uygulayınca $n < m \Rightarrow a_n < a_m$ bulunur.

$f(n) = a_n$ birebirdir. $n \neq m$ ise, diyelim $n < m$, $a_n < a_m$ olduğundan $f(n) \neq f(m)$.

$a_n \geq n$ eşitsizliği. Tümevarımla: $a_1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $a_1 \geq 1$. $a_n \geq n$ ise $a_{n+1} > a_n \geq n$, yani $a_{n+1} > n$; n ile a_{n+1} doğal sayı olduğundan **Önerme 9.3 (4)** gereği $a_{n+1} \geq n + 1$.

f örtendir. $m \in A$ olsun; m 'nin dizide görüldüğünü gösterelim. Aksini varsayalım: her k için $m \neq a_k$. O zaman özel olarak $m \notin \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$, yani $m \in A_{m-1}$; buradan $a_m = \min A_{m-1} \leq m$. Öte yandan $a_m \geq m$. Demek ki $a_m = m$; bu, varsayımımızla çelişir. O hâlde her $m \in A$ bir a_k 'ye eşittir.

Sonuç olarak $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ birebir-örtendir ve $A \sim \mathbb{N}$.

■

Sonuç 14.3 (Sayılabilir Kümenin Alt Kümesi Sayılabilirdir). A sayılabilir ve $B \subseteq A$ ise B de sayılabilirdir.

İspat.

A sonluya **Önerme 14.2** gereği B sonlu, dolayısıyla sayılabilirdir. $A \sim \mathbb{N}$ olsun ve $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ birebir-örten olsun. $f(B) \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan **Teorem 14.1** gereği $f(B)$ sayılabilirdir. $f|_B : B \rightarrow f(B)$ birebir-örten olduğundan $B \sim f(B)$; $f(B)$ sonluya B sonlu, $f(B) \sim \mathbb{N}$ ise $B \sim \mathbb{N}$ 'dir.

■

Bir kümenin sayılabilir olduğunu göstermek için her seferinde birebir-örten bir eşleme kurmak zahmetlidir. Aşağıdaki ölçüt işi çok kolaylaştırır: kümeyi $\mathbb{N}$ 'ye birebir gömmek ya da kümeyi (tekrarlara izin vererek) bir diziyle "kaplamak" yeterlidir.

Teorem 14.2 (Sayılabilirlik Ölçütleri). $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

1. A sayılabilirdir.
2. Birebir bir $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır.
3. Örtten bir $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu vardır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2): A sonluya bir n için birebir-örten $f : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ vardır; $\mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan f , A 'dan $\mathbb{N}$ 'ye birebir bir fonksiyondur. $A \sim \mathbb{N}$ ise birebir-örten eşleme zaten birebirdir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ birebir olsun. $f(A) \subseteq \mathbb{N}$, **Teorem 14.1** gereği sayılabilirdir ve $f : A \rightarrow f(A)$ birebir-örten olduğundan $A \sim f(A)$. O hâlde A da sayılabilirdir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ birebir olsun ve bir $a_0 \in A$ sabitleyelim. $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $n \in f(A)$ ise $g(n)$, $f(a) = n$ eşitliğini sağlayan (birebirlik gereği tek olan) a elemanı olsun; $n \notin f(A)$ ise $g(n) = a_0$ olsun. Her $a \in A$ için $g(f(a)) = a$ olduğundan g örtendir.

(3) $\Rightarrow$ (2): $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ örtten olsun. Her $a \in A$ için $g^{-1}(\{a\}) = \{n \in \mathbb{N} : g(n) = a\}$ kümesi örttenlik gereği boş değildir; **Teorem 9.2** ile en küçük elemanı vardır. $f(a) = \min g^{-1}(\{a\})$ tanımlayalım. $f(a) = f(b) = n$ ise $g(n) = a$ ve $g(n) = b$, yani $a = b$; f birebirdir.

■

Ölçütün gücü şuradadır: bir kümenin sayılabilir olduğunu göstermek için, elemanlarını tekrarlı ve düzensiz de olsa bir dizi hâlinde sıralamak yeter. Tam sayılarla başlayalım: $\mathbb{Z}$ 'yi "0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..." diye sıralayabiliriz.

Teorem 14.3 (Tam Sayılar Sayılabilirdir). $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuz bir kümedir.

İspat.

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonunu

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

ile tanımlayalım; n çiftse $n/2 \in \mathbb{N}$, tekse $(n-1)/2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olduğundan değerler gerçekten $\mathbb{Z}$ 'dedir (Tanım 11.2, Tanım 11.1). İlk değerler $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, f(5) = -2, \dots$ biçimindedir.

Birebirlik. $f(n) = f(m)$ olsun. n ve m ikisi de çiftse $n/2 = m/2$, yani $n = m$; ikisi de tekse $-(n-1)/2 = -(m-1)/2$, yine $n = m$. Biri çift, diğeri tek olamaz: n çiftse $f(n) = n/2 \geq 1 > 0 \geq -(m-1)/2 = f(m)$ olurdu.

Örtenlik. $k \in \mathbb{Z}$ verilsin. $k \geq 1$ ise $n = 2k$ çift bir doğal sayıdır ve $f(n) = k$. $k \leq 0$ ise $n = 1 - 2k = 2(-k) + 1$ tek bir doğal sayıdır ($-k \geq 0$) ve $f(n) = -\frac{(1-2k)-1}{2} = k$.

O hâlde f birebir-örtendir ve $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

■

Şimdi bölüm başındaki Galileo gözlemini kesinleştirelim: sonsuz kümeler, kendi öz alt kümelerinden biriyle eşgüçlü olan kümelerdir. Önce her sonsuz kümenin içinde “bir kopya $\mathbb{N}$ ” bulunduğunu gösterelim.

Önerme 14.3 (Her Sonsuz Küme Sayılabilir Sonsuz Bir Alt Küme İçerir). A sonsuz bir küme ise A 'nın $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü bir $B \subseteq A$ alt kümesi vardır.

İspat.

$A \neq \emptyset$ olduğundan bir $a_1 \in A$ seçelim. $a_1, \dots, a_n$ birbirinden farklı elemanlar olarak seçilmiş olsun. $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$ olsaydı $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ olurdu ve elemanlar farklı olduğundan $i \mapsto a_i$ eşlemesiyle $A \sim \mathbb{N}_n$, yani A sonlu olurdu; demek ki bu küme boş değildir ve içinden bir a_{n+1} seçebiliriz. Bu seçim a_{n+1} 'i öncekilerden farklı kılar. Böylece $n \mapsto a_n$ kuralı birebir bir $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu tanımlar. $B = \varphi(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, \dots\}$ alalım; $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow B$ birebir-örtendir, yani $B \sim \mathbb{N}$.

■

i Sonsuz sayıda seçim

Yukarıdaki ispatta $a_1, a_2, a_3, \dots$ elemanlarını “seçtik” ama seçim için belirli bir kural vermedik; sonsuz çoklukta böyle seçim yapılabilmesi, küme kuramının **seçim aksiyomu** (axiom of choice) ile güvence altına alınır. Analizde bu aksiyom (çoğu zaman farkında olmadan) sürekli kullanılır; biz de kullanacağız. Teorem 14.1 ispatında ise seçim gerekmedi: her adımda “en küçük eleman” kuralını kullandık.

Teorem 14.4 (Dedekind: Sonsuzluğun Karakterizasyonu). Bir A kümesi sonsuzdur ancak ve ancak A , bir öz alt kümesiyle eşgüçlüdür.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) A sonsuz olsun. Önerme 14.3 gereği A içinde birbirinden farklı $a_1, a_2, \dots$ elemanları vardır; $B = \{a_1, a_2, \dots\}$ olsun. $C = A \setminus \{a_1\}$ öz alt kümesini alalım ve $f : A \rightarrow C$ 'yi

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & x = a_n \text{ (bir } n \in \mathbb{N} \text{ için)} \\ x, & x \notin B \end{cases}$$

ile tanımlayalım. f 'nin değerleri a_1 'den farklıdır, yani gerçekten C 'ye gider. Birebirlik: B üzerinde $a_n \mapsto a_{n+1}$ birebirdir, $A \setminus B$ üzerinde f birim fonksiyondur ve bu iki parçanın görüntüleri $(B \setminus \{a_1\})$ ile $A \setminus B$ ayrıktır. Örtenlik: $y \in C$ ise ya $y \notin B$ olup $f(y) = y$, ya da $y = a_n$ için $n \geq 2$ olup $f(a_{n-1}) = y$ 'dir. O hâlde $A \sim C$.

($\Leftarrow$ yönü) Karşıt tersini gösterelim: A sonluysa hiçbir öz alt kümesiyle eşgüçlü değildir. $A = \emptyset$ 'nin öz alt kümesi yoktur. $|A| = n \geq 1$ ve $C \subsetneq A$ olsun; bir $a \in A \setminus C$ seçelim. Bir $f : A \rightarrow C$ birebir-örten eşlemesi olduğunu varsayıp çelişki bulacağız.

$n = 1$ ise $A = \{a\}$ ve $C = \emptyset$; boş olmayan bir kümeden boş kümeye fonksiyon yoktur. $n \geq 2$ olsun. $g : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örten olsun ve $\sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$, $g(a)$ ile n değerlerini birbiriyle değiştiren, diğer sayıları sabit bırakan fonksiyon olsun ($g(a) = n$ ise σ birimdir); σ birebir-örtendir. $h = \sigma \circ g : A \rightarrow \mathbb{N}_n$ birebir-örtendir ve $h(a) = n$ 'dir. h birebir-örten olduğundan $h(A \setminus \{a\}) = \mathbb{N}_n \setminus \{n\} = \mathbb{N}_{n-1}$; yani $h|_{A \setminus \{a\}} : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{N}_{n-1}$ birebir-örtendir. $C \subseteq A \setminus \{a\}$ olduğundan

$$\mathbb{N}_n \xrightarrow{g^{-1}} A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h|_C} \mathbb{N}_{n-1}$$

bileşkesi birebirdir. *Lemma 14.1* gereği $n \leq n - 1$; çelişki.

■

Dedekind (1888) sonsuzluğu tam da bu özelliklerle **tanımlamayı** önermiştir; teorem, bizim “sonlu değil” tanımımızla Dedekind’in tanımının çakıştığını söyler. Pratik yararı da vardır: bir kümenin sonsuz olduğunu göstermek için onu bir öz alt kümesine birebir-örten eşlemek yeter.

14.4 Kartezyen Çarpım ve Birleşim

Sayılabılır kümelerden yeni sayılabilir kümeler üretmenin iki yolu vardır: kartezyen çarpım ve sayılabilir birleşim. İkisinin de anahtarı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesidir. İlk bakışta bu küme $\mathbb{N}$ ’den “çok daha büyük” görünür: sonsuz satır, her satırda sonsuz eleman. Satır satır saymaya kalkarsak ilk satır bile bitmez; hile, satırları değil **köşegenleri** saymaktır.

Teorem 14.5 ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Sayılabilirdir). $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

İspat.

$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çiftlerini $d = m + n$ toplamına göre köşegenlere ayıralım: d -inci köşegen ($d \geq 2$)

$$(1, d-1), (2, d-2), \dots, (d-1, 1)$$

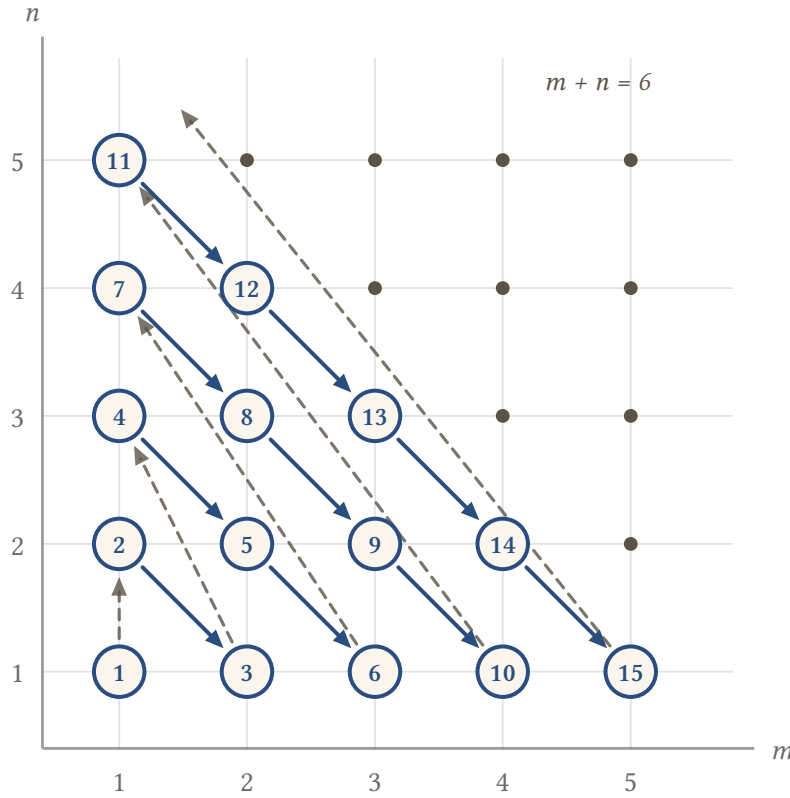
çiftlerinden oluşur; $d-1$ tane çift vardır. Köşegenleri $d = 2, 3, 4, \dots$ sırasıyla, her köşegeni de $m = 1, 2, \dots, d-1$ sırasıyla dolaşalım. d -inci köşegenden önce gelen çiftlerin sayısı

$$T(d) = 1 + 2 + \dots + (d-2) = \frac{(d-2)(d-1)}{2} \quad (d \geq 3), \quad T(2) = 0$$

olur (toplam formülü için bkz. *Örnek 9.2*; $T(d)$ doğal sayıların toplamı olduğundan bir tam sayıdır). Buna göre (m, n) çiftinin sıra numarası

$$\pi(m, n) = T(m+n) + m = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$$

olsun. İlk değerler: $\pi(1, 1) = 1; \pi(1, 2) = 2, \pi(2, 1) = 3; \pi(1, 3) = 4, \pi(2, 2) = 5, \pi(3, 1) = 6; \pi(1, 4) = 7, \dots$



Şekil 14.1: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çiftleri $m + n$ toplamına göre köşegenlere ayrılır; her köşegen yukarıdan aşağıya (m artan sırada) numaralanır, sonra kesikli okla bir sonraki köşegene geçilir. Böylece her çift tam bir sıra numarası alır: $\pi(m, n) = T(m + n) + m$.

$\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun birebir-örten olduğunu gösterelim. Önce T 'nin davranışını not edelim: $T(d + 1) - T(d) = d - 1 \geq 1$ olduğundan T kesin artandır; ayrıca $d \geq 2$ için $T(d) \geq d - 2$ 'dir ($d = 2$ için eşitlik, $d \geq 3$ için $(d - 1)/2 \geq 1$).

Birebirlik. $(m, n) \neq (m', n')$ olsun; $d = m + n$, $d' = m' + n'$ diyelim. $d < d'$ ise, $m \leq d - 1$ olduğundan

$$\pi(m, n) = T(d) + m \leq T(d) + (d - 1) = T(d + 1) \leq T(d') < T(d') + m' = \pi(m', n')$$

$d > d'$ durumu simetriktir. $d = d'$ ise $m \neq m'$ olmak zorundadır (aksi hâlde $n = d - m = d' - m' = n'$ olurdu) ve $\pi(m, n) - \pi(m', n') = m - m' \neq 0$. Her durumda $\pi(m, n) \neq \pi(m', n')$.

Örtenlik. $N \in \mathbb{N}$ verilsin. $D = \{d \in \mathbb{N} : d \geq 2, T(d) < N\}$ kümesini alalım. $T(2) = 0 < N$ olduğundan $2 \in D$; $d \in D$ ise $d - 2 \leq T(d) < N$, yani $d < N + 2$, dolayısıyla D üstten sınırlıdır. Teorem 11.2 gereği D 'nin en büyük elemanı d vardır: $T(d) < N$ ve $d + 1 \notin D$ olduğundan $T(d + 1) \geq N$. Şimdi $m = N - T(d)$ alalım. $m \geq 1$ ve

$$m = N - T(d) \leq T(d + 1) - T(d) = d - 1$$

oldüğundan $n = d - m \geq 1$ bir doğal sayıdır. Böylece $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $\pi(m, n) = T(d) + m = N$.

■

Bu teoremin en sık kullanılan biçimi şudur.

Sonuç 14.4 (Sayılabilir Kümelerin Çarpımı Sayılabilirdir). A ve B sayılabilir kümeler ise $A \times B$ de sayılabilir. Daha genel olarak sonlu sayıda sayılabilir kümenin kartezyen çarpımı $A_1 \times \dots \times A_k$ sayılabilir.

İspat.

A veya B boşsa $A \times B = \emptyset$ sonludur. İkisi de boş değilse [Teorem 14.2](#) ile birebir $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ vardır. π , [Teorem 14.5](#) ispatındaki eşleme olmak üzere

$$F : A \times B \rightarrow \mathbb{N}, \quad F(a, b) = \pi (f(a), g(b))$$

tanımlayalım. $F(a, b) = F(a', b')$ ise π birebir olduğundan $f(a) = f(a')$ ve $g(b) = g(b')$, buradan $a = a'$ ve $b = b'$. F birebirdir; ölçüt gereği $A \times B$ sayılabilir. Genel durum k üzerinden tümevarımla çıkar: $A_1 \times \dots \times A_{k+1}, (A_1 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1}$ ile eşgüçlüdür (bir $((a_1, \dots, a_k), a_{k+1}) \mapsto (a_1, \dots, a_{k+1})$ eşlemesiyle).

■

Teorem 14.6 (Sayılabilir Birleşim Teoremi). Her $n \in \mathbb{N}$ için A_n sayılabilir bir küme olsun. O zaman

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesi de sayılabilir. Kısaca: sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir.

İspat.

Bütün A_n 'ler boşsa $A = \emptyset$ sonludur. Değilse bir $x_0 \in A$ sabitleyelim. Her n için bir $g_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ örten fonksiyonu seçelim: $A_n \neq \emptyset$ ise [Teorem 14.2](#) böyle bir g_n verir; $A_n = \emptyset$ ise g_n 'yi sabit x_0 değerli fonksiyon olarak alalım (bu durumda g_n 'nin değerleri A_n 'de değil ama A 'dadır; aşağıda yalnızca A 'ya gitmesi gerekecek). Şimdi

$$G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A, \quad G(n, k) = g_n(k)$$

tanımlayalım. G örtendir: $x \in A$ ise bir n için $x \in A_n$, bu A_n boş değildir ve g_n örten olduğundan bir k için $x = g_n(k) = G(n, k)$. [Teorem 14.5](#) ile birebir-örten bir $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vardır; $G \circ \pi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A$ örten fonksiyonların bileşkesi olarak örtendir. [Teorem 14.2](#) gereği A sayılabilir.

■

İspatta her n için bir g_n “seçtik”; bu yine seçim aksiyomunun (sayılabilir biçiminin) kullanımıdır.

Sonuç 14.5 (Sonlu Birleşim). $A_1, \dots, A_k$ sayılabilir ise $A_1 \cup \dots \cup A_k$ sayılabilir. Özel olarak iki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir.

İspat.

$n > k$ için $A_n = A_k$ alalım. O zaman $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \dots \cup A_k$ olur ve [Teorem 14.6](#) uygulanır.

■

Bu araçlarla rasyonel sayıların sayılabilir olduğunu göstermek artık birkaç satırdır. Sonuç ilk bakışta şaşırtıcıdır: $\mathbb{Q}$ sayı doğrusunda yoğundur ([Teorem 13.5](#)), yani her aralıkta sonsuz çoklukta rasyonel sayı vardır; yine de rasyonel sayılar bir dizi hâlinde sıralanabilir.

Teorem 14.7 (Rasyonel Sayılar Sayılabilir). $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz bir kümedir.

İspat.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

olsun. $h_n : \mathbb{Z} \rightarrow B_n, h_n(m) = m/n$ fonksiyonu tanım gereği örtendir (üstelik birebirdir: $m/n = m'/n$ ise $m = m'$). [Teorem 14.3](#) ile $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ olduğundan bir $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ birebir-örten eşlemesi vardır ve $h_n \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow B_n$ örtendir; [Teorem 14.2](#) gereği her B_n sayılabilir.

Şimdi $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olduğunu görelim. Her $B_n \subseteq \mathbb{Q}$ açıktır. Tersine $x \in \mathbb{Q}$ ise [Tanım 11.6](#) gereği $x = m/n$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ vardır; $n < 0$ ise $x = (-m)/(-n)$ yazarak paydayı pozitif alabiliriz. O hâlde $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in B_n$.

[Teorem 14.6](#) gereği $\mathbb{Q}$ sayılabilir. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ olduğundan $\mathbb{Q}$ sonsuzdur ([Önerme 14.2](#)); dolayısıyla sayılabilir sonsuzdur.

■

İkinci bir ispat: her rasyonel sayı sadeleştirilmiş tek bir p/q ($q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}, p$ ile q aralarında asal) biçiminde yazılır; $x \mapsto (p, q)$ kuralı $\mathbb{Q}$ 'yu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ içine birebir gömer, [Sonuç 14.4](#) ve ölçüt gereği $\mathbb{Q}$ sayılabilir.

Bu iki teoremin ders verdiği şey şudur: **yoğunluk bir büyüklük ölçüsü değildir**. $\mathbb{Q}$ doğrudan her yere yayılmıştır ama “sayıca” $\mathbb{N}$ 'den fazla değildir.

Örnek 14.3 (Rasyonel Uçlu Aralıklar). Uçları rasyonel olan açık aralıkların kümesi

$$\mathcal{I} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$$

sayılabilir midir?

Çözüm.

Evet. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, [Sonuç 14.4](#) gereği sayılabilir. (p, q) aralığını $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sıralı ikilisine götüren kural birebirdir: iki açık aralık eşitse uçları eşittir, çünkü uçlar aralıktan geri okunabilir: $\sup(p, q) = q$ 'dur (q bir üst sınırdır ve her $\varepsilon > 0$ için $\max\{p, q - \varepsilon\} < q$ olduğundan [Önerme 7.11](#) ile aralıkta $q - \varepsilon$ 'dan büyük bir nokta bulunur; [Teorem 10.1](#)), benzer biçimde $\inf(p, q) = p$ 'dir. O hâlde $\mathcal{I}, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 'nun bir alt kümesiyle eşgüçlüdür ve [Sonuç 14.3](#) ile sayılabilir. Bu küme topolojide sık kullanılır: her açık küme, rasyonel uçlu aralıkların (sayılabilir çoklukta) birleşimi olarak yazılabilir.

■

Örnek 14.4 (Tam Katsayılı Polinomlar). Katsayıları tam sayı olan bütün polinomların kümesi $\mathcal{P}$ sayılabilir midir?

Çözüm.

Bir polinomu katsayı listesiyle özdeşleştirelim: derecesi en çok k olan tam katsayılı $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ polinomu $(a_0, a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ listesine karşılık gelir ve farklı listeler farklı polinomlar verir. Bu polinomların kümesi $\mathcal{P}_k$ olsun; $\mathcal{P}_k \sim \mathbb{Z}^{k+1}$. [Teorem 14.3](#) ve [Sonuç 14.4](#) gereği $\mathbb{Z}^{k+1} = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ sayılabilir; dolayısıyla her $\mathcal{P}_k$ sayılabilir. Her polinomun sonlu bir derecesi olduğundan

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k$$

ve [Teorem 14.6](#) gereği $\mathcal{P}$ sayılabilir.

■

i Cebirsel ve aşkın sayılar

Sıfırdan farklı tam katsayılı bir polinomun kökü olan reel sayıya **cebirsel sayı** denir; $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2$ 'nin kökü), $\sqrt[3]{5}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve bütün rasyonel sayılar cebirsel. Cebirden bilinen bir gerçek, derecesi k olan sıfırdan farklı bir polinomun en çok k kökü olduğudur. Sıfırdan farklı polinomlar, sayılabilir olduğunu gördüğümüz $\mathcal{P}$ kümesinin ([Örnek 14.4](#)) bir alt kümesidir; [Sonuç 14.3](#) gereği bunlar da sayılabilir çoklukta ve her birinin kök kümesi sonludur. (Sıfır polinomunu dışarıda bırakmak şarttır: onun kök kümesi $\mathbb{R}$ 'nin tamamıdır.) Buna göre cebirsel sayılar kümesi, sayılabilir çoklukta sonlu kümenin birleşimidir, yani [Teorem 14.6](#) gereği sayılabilir. Hemen aşağıda $\mathbb{R}$ 'nin sayılamaz olduğunu göreceğiz; o zaman cebirsel olmayan (**aşkın**, transcendental) reel sayıların var olduğu, üstelik sayılamaz çoklukta olduğu sonucu çıkar. Cantor'un 1874 tarihli bu argümanı, tek bir aşkın sayı bile yazmadan aşkın sayıların varlığını ispatlar. (e ve π 'nin aşkın olduğu çok daha zor, ayrı teoremlerdir.)

14.5 Reel Sayılar Sayılamaz

Şimdiye dek gördüğümüz sonsuz kümelerin hepsi sayılabilir çıktı. Sayılamaz küme gerçekten var mıdır? Cantor'un teoremi bu soruya evet der: reel sayılar bir dizi hâlinde sıralanamaz. İspatta tamlık aksiyomunun sonuçlarından iç içe aralıklar teoremini ([Teorem 10.5](#)) kullanacağız; bu tesadüf değildir, çünkü $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ 'yi ayıran tam da tamlıktır.

Teorem 14.8 (Cantor Teoremi: Reel Sayılar Sayılamaz). $\mathbb{R}$ sayılamaz bir kümedir. Yani reel sayılar bir $x_1, x_2, x_3, \dots$ listesi hâlinde sıralanamaz: her böyle liste için listede bulunmayan bir reel sayı vardır.

İspat.

$\mathbb{R}$ 'nin sayılabilir olduğunu varsayalım. $\mathbb{R} \neq \emptyset$ olduğundan [Teorem 14.2](#) gereği örten bir $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır; $x_n = g(n)$ yazalım. O zaman her reel sayı bir x_n 'dir:

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Şimdi kapalı aralıklardan oluşan, iç içe bir $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ dizisini, her n için $x_n \notin I_n$ olacak biçimde kuracağız.

Kuruluş. $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$ alalım; açıkça $x_1 \notin I_1$. $I_n = [a_n, b_n]$ ($a_n < b_n$) kurulmuş olsun. $h = \frac{b_n - a_n}{3} > 0$ diyelim ve I_n 'nin iki uç üçte birlik parçasına bakalım:

$$L = [a_n, a_n + h], \quad R = [a_n + 2h, b_n]$$

x_{n+1} bu iki aralığın ikisinde birden olamaz: olsaydı $a_n + 2h \leq x_{n+1} \leq a_n + h$, yani $h \leq 0$ olurdu. O hâlde $x_{n+1} \notin L$ ise $I_{n+1} = L$, aksi hâlde $I_{n+1} = R$ alalım. Her iki durumda da I_{n+1} kapalı ve sınırlı bir aralıktır, $I_{n+1} \subseteq I_n$ 'dir, uzunluğu pozitiftir ve $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ 'dir.

Çelişki. (I_n), kapalı ve sınırlı aralıkların iç içe bir dizisidir; [Teorem 10.5](#) gereği

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Bu kesişimden bir x alalım. x bir reel sayı olduğundan bir $k \in \mathbb{N}$ için $x = x_k$ 'dir. Ama $x \in I_k$ (kesişimin elemanı) ve $x_k \notin I_k$ (kuruluş gereği); çelişki. Demek ki $\mathbb{R}$ sayılabilir değildir. ■

i Cantor'un köşegen yöntemi

Aynı teoremin daha ünlü bir ispatı ondalık açılımlarla yapılır. $(0, 1)$ 'in sayılabilir olduğunu, $(0, 1) = \{x_1, x_2, \dots\}$ olduğunu varsayalım ve her x_n 'yi ondalık açılımıyla yazalım:

$$x_n = 0, d_{n1} d_{n2} d_{n3} \dots$$

Yeni bir $y = 0, e_1 e_2 e_3 \dots$ sayısını, $d_{nn} \neq 5$ ise $e_n = 5$, $d_{nn} = 5$ ise $e_n = 6$ kuralıyla tanımlayalım. $y \in (0, 1)$ 'dir ve her n için n -inci basamağı x_n 'ninkinden farklıdır; y 'nin açılımı yalnızca 5 ve 6 rakamlarını içerdiğinden $(0, 4999\dots = 0, 5000\dots$ türünden) çift açılım sorunu da doğmaz. Dolayısıyla y listede yoktur; çelişki. Ondalık açılımların varlığını ve tekliğini henüz ispatlamadığımız için biz iç içe aralıklarla verilen ispatı esas aldık; iki ispatın fikri aynıdır: listedeki n -inci sayıyı n -inci adımda dışarıda bırakmak. Bu köşegen fikri, alıştırılmalardaki (d) ve (e) şıklarında tam titizlikle karşımıza çıkacak.

Sonuç 14.6 (Aralıklar Sayılamaz). $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığı sayılamazdır. Dolayısıyla $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ve genel olarak (a, b) 'yi kapsayan her küme sayılamazdır.

İspat.

Örnek 14.2 gereği $(a, b) \sim \mathbb{R}$; $\psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ birebir-örten olsun. (a, b) sayılabilir olsaydı, boş olmadığından [Teorem 14.2](#) ile örten bir $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (a, b)$ olurdu ve $\psi \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ örten fonksiyonların bileşkesi olarak örten olurdu ([Teorem 5.4](#)); yine ölçüt gereği $\mathbb{R}$ sayılabilir olurdu. Bu [Teorem 14.8](#) ile çelişir. Kapsayan kümeler için: $(a, b) \subseteq C$ ve C sayılabilir olsaydı [Sonuç 14.3](#) gereği (a, b) de sayılabilir olurdu. ■

Sonuç 14.7 (İrrasyonel Sayılar Sayılamaz). İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sayılamazdır. Daha genel olarak $A \subseteq \mathbb{R}$ sayılabilir ise $\mathbb{R} \setminus A$ sayılamazdır.

İspat.

$A \subseteq \mathbb{R}$ sayılabilir olsun ve $\mathbb{R} \setminus A$ 'nın da sayılabilir olduğunu varsayalım. O zaman $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ iki sayılabilir kümenin birleşimi olarak **Sonuç 14.5** gereği sayılabilir olurdu; bu **Teorem 14.8** ile çelişir. $A = \mathbb{Q}$ almak (**Teorem 14.7**) irrasyonel sayılar (**Tanım 13.1**) için sonucu verir.

Bu sonuç, bölüm başındaki soruyu yanıtlar: rasyoneller de irrasyoneller de yoğun, ama irrasyoneller “ezici çoğunluk”tur. Sayı doğrusundan rastgele bir nokta seçseniz, karşınıza çıkacak olan neredeyse kesinlikle irrasyoneldir. Dikkat çekici olan, bu sonucun tek bir irrasyonel sayıyı bile göstermeden elde edilebilmesidir: $\mathbb{R}$ sayılamaz, $\mathbb{Q}$ sayılabilir; o hâlde aradaki fark boş olamaz.

i Kardinal sayılar ve süreklilik hipotezi

Cantor, eşgüçlü kümelerle aynı **kardinal sayıyı** atar: $\mathbb{N}$ 'nin (dolayısıyla $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve her sayılabilir sonsuz kümenin) kardinalitesi $\aleph_0$ (“alef sıfır”), $\mathbb{R}$ 'nin (ve her aralığın) kardinalitesi $\mathfrak{c}$ (süreklilik, continuum) ile gösterilir. A 'dan B 'ye birebir fonksiyon varsa $|A| \leq |B|$ yazılır; Cantor–Schröder–Bernstein teoremi $|A| \leq |B|$ ve $|B| \leq |A|$ ise $A \sim B$ olduğunu söyler (ispatı bu dersin dışındadır). Bu bölümde $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ olduğunu ispatladık. Cantor'un “ $\aleph_0$ ile $\mathfrak{c}$ arasında başka kardinal yoktur” biçimindeki **süreklilik hipotezinin**, küme kuramının olağan aksiyomlarından ne ispatlanabileceği (Gödel, 1940) ne de çürütülebileceği (Cohen, 1963) gösterilmiştir. Alistirmalardaki (e) şıkkı ise sonsuzluğun sonsuz çeşidi olduğunu gösterir: hiçbir küme kendi alt kümeler kümesiyle eşgüçlü değildir.

14.6 Alistirmalar

Alistirma 14.1 (Sayılabilir ve Sayılamaz Kümeler).

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$ olduğunu gösteriniz. Buradan $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 'in sayılabilir sonsuz olduğu sonucunu çıkarınız.
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ fonksiyonunun birebir-örtten olduğunu gösteriniz. (Bu, **Teorem 14.5** için ikinci bir ispattır.)
- $[0, 1] \sim (0, 1)$ olduğunu gösteriniz. Buradan $[0, 1] \sim \mathbb{R}$ sonucunu çıkarınız.
- Terimleri 0 ve 1 olan bütün dizilerin kümesi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{s \mid s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ 'nin sayılamaz olduğunu gösteriniz.
- (Cantor) A herhangi bir küme ve $\mathcal{P}(A)$ onun bütün alt kümelerinin kümesi olsun. A 'dan $\mathcal{P}(A)$ 'ya örtten bir fonksiyon olmadığını gösteriniz. Buradan $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 'nin sayılamaz olduğu sonucunu çıkarınız.

Çözüm.

a) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, $g(n) = n - 1$ alalım; $n = 1$ için $g(1) = 0$, $n \geq 2$ için **Önerme 9.3** (2) gereği $n - 1 \in \mathbb{N}$. Yani g gerçekten $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 'a gider. $n - 1 = m - 1$ ise $n = m$; g birebirdir. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ise $k + 1 \in \mathbb{N}$ ve $g(k + 1) = k$; g örtendir. O hâlde $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{N}$, yani sayılabilir sonsuzdur.

b) Önce bir hatırlatma: bir tam sayı hem çift hem tek olamaz (**Önerme 11.2**).

Birebirlik. $f(m, n) = f(k, l)$, yani $2^{m-1}(2n - 1) = 2^{k-1}(2l - 1)$ olsun; simetri gereği $m \leq k$ varsayabiliriz. $2^{m-1} > 0$ ile sadeleştirip **Teorem 11.3** uygulayınca

$$2n - 1 = 2^{k-m}(2l - 1)$$

bulunur. $k > m$ olsaydı sağ taraf $2 \cdot (2^{k-m-1}(2l - 1))$ biçiminde çift, sol taraf tek olurdu; bu gözlemle çelişir. O hâlde $k = m$ ve $2n - 1 = 2l - 1$, yani $n = l$.

Örttenlik. Olmayana ergi: f 'nin görüntüsünde olmayan bir doğal sayı bulunsun. **Teorem 9.2** gereği böyle sayıların en küçüğü N_0 vardır. $N_0 \neq 1$, çünkü $1 = 2^0 \cdot 1 = f(1, 1)$. N_0 tekse $N_0 = 2n - 1$ olacak biçimde $n = \frac{N_0+1}{2} \in \mathbb{N}$ vardır ve $N_0 = f(1, n)$; çelişki. N_0 çiftse $N_0 = 2M$ ile $M \in \mathbb{N}$ ve $M < N_0$; N_0 'ın en küçüklüğü gereği $M = f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ olacak m, n vardır, o zaman $N_0 = 2^m(2n - 1) = f(m + 1, n)$; yine çelişki. Demek ki f örtendir.

c) $[0, 1]$ ile $(0, 1)$ yalnızca iki noktada, 0 ve 1’de ayrılır; bu iki noktayı “içeriye sığdırmak” için sayılabilir bir alt kümeyi bir adım kaydıracağız (Hilbert’in oteli fikri). $S = \{0, 1\} \cup \{1/n : n \geq 2\} \subseteq [0, 1]$ ve $T = \{1/n : n \geq 2\} \subseteq (0, 1)$ olsun. $F : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ ’i

$$F(0) = \frac{1}{2}, \quad F(1) = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} \quad (n \geq 2), \quad F(x) = x \quad (x \notin S)$$

ile tanımlayalım. F , S ’yi T ’ye birebir-örten götürür: $0 \mapsto 1/2$, $1 \mapsto 1/3$ ve $1/n \mapsto 1/(n+2)$ kuralı $1/4, 1/5, \dots$ değerlerinin her birini tam bir kez alır. S dışında F birim fonksiyondur ve $[0, 1] \setminus S = (0, 1) \setminus T$ ’dir. İki parçanın görüntüleri (T ile $(0, 1) \setminus T$) ayrık olduğundan F birebirdir; görüntüleri birleşince $(0, 1)$ ’in tamamı elde edildiğinden F örtendir. O hâlde $[0, 1] \sim (0, 1)$; [Örnek 14.2](#) ve [Önerme 14.1](#) ile $[0, 1] \sim \mathbb{R}$.

d) $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ’nin sayılabilir olduğunu varsayalım. Boş olmadığından [Teorem 14.2](#) ile örten bir $n \mapsto s_n$ eşlemesi, yani her dizinin bir s_n olduğu bir $s_1, s_2, s_3, \dots$ listesi vardır. Yeni bir $t : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ dizisini

$$t(n) = 1 - s_n(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ile tanımlayalım; $s_n(n) \in \{0, 1\}$ olduğundan $t(n) \in \{0, 1\}$ ’dir. Her n için $t(n) \neq s_n(n)$, dolayısıyla $t \neq s_n$. Yani t listede yoktur; örtenlikle çelişir. Demek ki $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sayılamazdır. (Bu, köşegen yönteminin en saf hâlidir: n -inci dizinin n -inci terimini değiştirdik.)

e) $F : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ herhangi bir fonksiyon olsun. Her $a \in A$ için $F(a)$, A ’nın bir alt kümesidir; a bu alt kümeye ait olabilir de olmayabilir de. Ait olmayanları toplayalım:

$$B = \{a \in A : a \notin F(a)\} \in \mathcal{P}(A)$$

F ’nin örten olduğunu varsayalım; o zaman bir $a_0 \in A$ için $F(a_0) = B$ ’dir. Şimdi $a_0 \in B$ midir?

- $a_0 \in B$ ise B ’nin tanımı gereği $a_0 \notin F(a_0) = B$; çelişki.
- $a_0 \notin B$ ise $a_0 \notin F(a_0)$, yani a_0 tanım gereği B ’nin elemanıdır; çelişki.

Her iki durum da çelişkili olduğundan F örten olamaz. Özel olarak $\mathbb{N}$ ’den $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ’ye örten fonksiyon yoktur; $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ olduğundan [Teorem 14.2](#) gereği $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sayılamazdır. Aynı akıl yürütme $A = \mathbb{R}$ için $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ’nin $\mathbb{R}$ ’den “daha büyük” olduğunu verir: kardinal sayıların sonu yoktur.

■

Reel sayıların cebirsel ve sıralama yapısını, tamlığını ve büyüklüğünü tanıdık. Bundan sonra sayı doğrusuna başka bir gözle, “yakınlık” gözüyle bakacağız: bir noktanın çevresi, açık ve kapalı kümeler, yığılma noktaları. Bu yolculuk [Komşuluklar ve Açık Kümeler](#) bölümüyle başlıyor.

15. Komşuluklar ve Açık Kümeler

Buraya kadar reel sayıların *cebirsel* ve *sıralama* yapısını inceledik: toplama, çarpma, eşitsizlikler, supremum ve infimum. Bu bölümden başlayarak üçüncü bir yapıya geçiyoruz: reel sayıların **topolojisi** (topology). Sözcük Yunanca *topos* (yer, konum) ve *logos* (bilim) kelimelerinden gelir; sözlük anlamıyla “yer bilimi” demektir. Geometri, nesnelerin *ne kadar büyük* olduğuyla ilgilenir: uzunluk ölçer, açı ölçer. Topoloji ise *niteliksel* sorular sorar: bir nokta bir kümenin içinde mi, sınırında mı, ondan ayrık mı? Kümenin noktaları birbirine “yapışık” mı, yoksa aralarında boşluk var mı?

Bu sorular analiz için hayati önemdedir. Lise yıllarında limit, türev ve süreklilik sezgiyle tanıtılır: bir dizi bir sayıya “yaklaşır”, bir grafik “kopmadan” çizilir. Ne var ki sezgi, kesin bir matematik için yeterli değildir; kesin tanımlar gerekir. Reel sayıların topolojisi tam olarak bu tanımları kurmamızı sağlayan çerçevedir. “Yaklaşmak”, “yakın olmak”, “kopmamak” gibi sözlerin hepsi, bu bölümde tanımlayacağımız **komşuluk** ve **açık küme** kavramlarıyla kesinleşecektir.

$\mathbb{R}$ üzerinde iki noktanın “yakınlığı” mutlak değerle ölçülür: x ile a arasındaki uzaklık $|x - a|$ sayıdır. Dolayısıyla buradaki bütün topolojik kavramlar, **Mutlak Değer** bölümünde öğrendiğimiz eşitsizliklere dayanır. Bu fikirler 19. yüzyılın ortalarında Bernard Bolzano (1781–1848), Karl Weierstrass (1815–1897) ve Georg Cantor (1845–1918) tarafından geliştirilmiştir; yalnızca sayı doğrusunu değil, çok daha soyut uzayları da düzenleyen bir dile dönüşmüştür.

15.1 Komşuluklar

“ x sayısı a ’ya yakındır” demek tek başına bir anlam taşımaz: ne kadar yakın? Yakınlığı ölçen bir sayı, bir **tolerans** vermeliyiz. a ’ya ε ’dan daha yakın olan sayıların kümesi, bu bölümün temel yapı taşıdır.

Tanım 15.1 (Komşuluk (Açık Yuvar)). $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ve ε yarıçaplı **açık yuvar** (open ball) ya da a ’nın ε -**komşuluğu** (neighborhood) denir.

Mutlak değer eşitsizliğini açalım. **Önerme 8.6** gereği

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

olduğundan, $\mathbb{R}$ üzerinde bir açık yuvar aslında bir **açık aralıktır**:

$$B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

“Yuvar” sözcüğü, aynı tanımın düzlemde bir daireyi (dairenin içini), uzayda ise içi dolu bir topu verdiğini hatırlatmak için kullanılır; yalnızca yüzeyden ibaret olan küreyi değil. Sayı doğrusunda yuvar, merkezi a olan bir aralıktan ibarettir.

Limit tanımlarında sık sık “ a ’ya yakın ama a ’dan farklı” noktalarla ilgileneceğiz. Bunun için merkezi atılmış komşuluğa ayrı bir ad veriyoruz.

Tanım 15.2 (Delinmiş Komşuluk). $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. a ’nın ε -komşuluğundan merkez noktanın çıkarılmasıyla elde edilen

$$B^*(a, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

kümesine a ’nın **delinmiş komşuluğu** (punctured / deleted neighborhood) denir. Aralık gösterimiyle

$$B^*(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

$0 < |x - a|$ koşulu tam olarak $x \neq a$ demektir; tanımdaki tek fark budur.

Eşitsizlikte eşitliğe de izin verirse uç noktalar kümeye katılır.

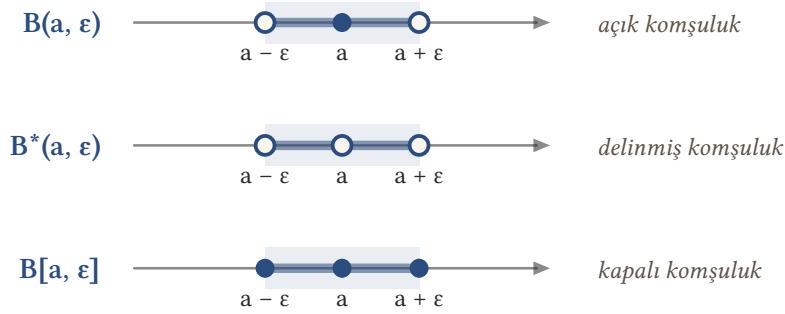
Tanım 15.3 (Kapalı Komşuluk (Kapalı Yuvar)). $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$B[a, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$$

kümesine a merkezli ve ε yarıçaplı **kapalı yuvar** (closed ball) ya da a 'nın **kapalı komşuluğu** denir.

Üç küme arasındaki ilişki açıktır:

$$B^*(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon) \subset B[a, \varepsilon].$$



Şekil 15.1: Aynı merkez ve yarıçapla üç komşuluk: $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralıktır; delinmiş komşuluk $B^*(a, \varepsilon)$ aynı aralıktan merkez a 'nın çıkarılmışıdır; kapalı komşuluk $B[a, \varepsilon]$ uç noktaları da içerir. Dolu nokta kümeye ait, içi boş nokta ait olmayan noktadır.

Yarıçapı büyüttükçe komşuluk büyür; bu basit gözlemi ileride sık kullanacağız.

Önerme 15.1 (İç İç Komşuluklar). $a \in \mathbb{R}$ ve $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ olsun. O zaman

$$B(a, \varepsilon_1) \subseteq B(a, \varepsilon_2).$$

Aynı kapsama B^* ve $B[\cdot]$ için de geçerlidir.

İspat.

$x \in B(a, \varepsilon_1)$ herhangi bir eleman olsun. Tanım gereği $|x - a| < \varepsilon_1$ 'dir. Hipotezden $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ olduğundan, sıralamanın geçişliliğiyle $|x - a| < \varepsilon_2$ elde ederiz; bu da $x \in B(a, \varepsilon_2)$ demektir. x keyfi olduğundan $B(a, \varepsilon_1) \subseteq B(a, \varepsilon_2)$ 'dir.

Delinmiş komşuluk için aynı akıl yürütme $0 < |x - a| < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ eşitsizliğiyle, kapalı komşuluk için $|x - a| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ eşitsizliğiyle tekrarlanır.

■

Örnek 15.1 (Komşuluk Hesapları). Aşağıdaki kümeleri aralık olarak yazınız ve son şıktaki üyelik sorusunu yanıtlayınız.

- $B(2, \frac{1}{2})$
- $B^*(0, 1)$
- $B[-1, 3]$
- 2, 7 ve 2, 4 sayıları $B(3, \frac{1}{2})$ kümesine ait midir?

Çözüm.

a) $B(2, \frac{1}{2}) = (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

b) $B^*(0, 1) = (-1, 0) \cup (0, 1)$; yani $0 < |x| < 1$ koşulunu sağlayan sayılar.

c) $B[-1, 3] = [-1 - 3, -1 + 3] = [-4, 2]$.

d) $|2, 7 - 3| = 0, 3 < 0, 5$ olduğundan $2, 7 \in B(3, \frac{1}{2})$. Öte yandan $|2, 4 - 3| = 0, 6 \geq 0, 5$ olduğundan $2, 4 \notin B(3, \frac{1}{2})$.

■

15.2 Açık Kümeler

Bir kümenin “içindeki” noktalarla “kenarındaki” noktalar arasında sezgisel bir fark vardır. $(0, 1)$ aralığında $\frac{1}{2}$ noktasını düşünelim: bu noktanın etrafına küçük bir **güvenlik çemberi** çizebiliriz, örneğin $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, ve çemberin tamamı kümede kalır. Hatta 0, 999 noktası için bile bu mümkündür; sadece daha küçük bir çember, örneğin $B(0, 999, 0, 0005)$ gerekir. Ama $[0, 1]$ aralığındaki 0 noktası için ne kadar küçük çizersek çizelim, çemberin sol yarısı kümenin dışına taşar. Her noktasında güvenlik çemberi çizilebilen kümelere özel bir ad veriyoruz.

Tanım 15.4 (Açık Küme). $U \subseteq \mathbb{R}$ olsun. U 'nun her a noktası için $B(a, \varepsilon_a) \subseteq U$ olacak biçimde bir $\varepsilon_a > 0$ sayısı bulunabiliyorsa U 'ya **açık küme** (open set) denir. Sembollerle:

$$U \text{ açık} \Leftrightarrow \forall a \in U \exists \varepsilon_a > 0 : B(a, \varepsilon_a) \subseteq U.$$

i Tanımı doğru okumak

Yarıçapı ε_a diye yazmamızın nedeni, yarıçapın **noktaya bağlı** olmasıdır: her nokta için ayrı bir yarıçap seçilebilir, tek bir ε 'un bütün noktalara yetmesi gerekmez. Niceleyicilerin sırası önemlidir: önce nokta verilir, sonra ona uygun yarıçap bulunur.

Tanımın olumsuzlamasını [Teorem 2.1](#) ile yazalım:

$$U \text{ açık değil} \Leftrightarrow \exists a \in U \forall \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \not\subseteq U.$$

Yani bir kümenin açık olmadığını göstermek için, her komşuluğu kümenin dışına taşıyan **tek bir** nokta bulmak yeterlidir.

Adından da beklendiği gibi açık aralıklar açık kümelerdir. Bu, bu bölümün ilk gerçek teoremidir ve ispatındaki “en yakın uca olan uzaklığı yarıçap seç” fikri defalarca karşımıza çıkacaktır.

Önerme 15.2 (Açık Aralıklar Açıktır). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. (a, b) açık aralığı bir açık kümedir.

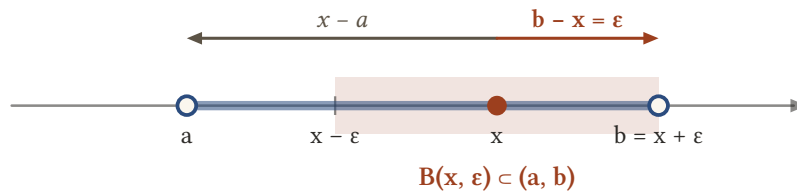
İspat.

$x \in (a, b)$ keyfi bir nokta olsun. Amacımız, tamamı aralığın içinde kalan bir x -komşuluğu bulmaktır. x 'in iki uca olan uzaklıklarına bakalım ve yarıçap olarak bunların küçüğünü seçelim ([Tanım 7.4](#)):

$$\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}.$$

$x \in (a, b)$ olduğundan $x > a$ ve $x < b$; yani $x - a > 0$ ve $b - x > 0$, dolayısıyla $\varepsilon > 0$ 'dır.

$$\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$$



Şekil 15.2: (a, b) aralığının her x noktası bir iç noktadır: x 'in iki uca olan uzaklıklarından küçüğü ε alınırsa $B(x, \varepsilon)$ komşuluğu aralığın içinde kalır. Örnekte $b - x$ daha küçüktür; komşuluk sağ uca b 'ye dayanır ama onu içermez.

Şimdi $B(x, \varepsilon) \subseteq (a, b)$ olduğunu gösterelim. $y \in B(x, \varepsilon)$ olsun; yani $|y - x| < \varepsilon$. **Önerme 8.6** ile

$$-\varepsilon < y - x < \varepsilon \implies x - \varepsilon < y < x + \varepsilon.$$

Minimumun tanımından $\varepsilon \leq x - a$ 'dır; bu eşitsizliği $x - \varepsilon \geq a$ biçiminde yazarsak

$$a \leq x - \varepsilon < y$$

elde ederiz. Benzer biçimde $\varepsilon \leq b - x$, yani $x + \varepsilon \leq b$ olduğundan

$$y < x + \varepsilon \leq b.$$

Sonuç olarak $a < y < b$, yani $y \in (a, b)$ 'dir. y keyfi olduğundan $B(x, \varepsilon) \subseteq (a, b)$ bulunur. x de keyfi seçildiğinden (a, b) açıktır. ■

Bu önerme sayesinde komşulukların kendileri de açık kümedir; aksi hâlde “açık yuvar” adı yerini bulmazdı.

Sonuç 15.1 (Komşuluklar Açıktır). Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık bir kümedir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ olduğundan $a - \varepsilon < a + \varepsilon$ 'dur; dolayısıyla $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ bir açık aralıktır ve **Önerme 15.2** gereği açıktır. ■

Sınırsız aralıklar için de aynı sonuç geçerlidir; ispat daha da kısadır, çünkü yalnızca bir uç vardır.

Önerme 15.3 (Sınırsız Açık Aralıklar Açıktır). Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ve $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ kümeleri açıktır.

İspat.

$x \in (a, \infty)$ olsun; $x > a$ olduğundan $\varepsilon = x - a > 0$ alabiliriz. $y \in B(x, \varepsilon)$ ise $y > x - \varepsilon = x - (x - a) = a$, yani $y \in (a, \infty)$ 'dur. Böylece $B(x, \varepsilon) \subseteq (a, \infty)$ bulunur ve (a, ∞) açıktır. $(-\infty, b)$ için $x < b$ olan bir x alıp $\varepsilon = b - x > 0$ seçelim. $y \in B(x, \varepsilon)$ ise $y < x + \varepsilon = b$, yani $y \in (-\infty, b)$ 'dir. ■

Şimdi hem açık olan hem de açık olmayan kümelere örnekler verelim; açık olmayan kümelerde, yukarıdaki olumsuzlama biçimini kullanacağız.

Örnek 15.2 (Açık Olan ve Olmayan Kümeler). Aşağıdaki kümelerin açık olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $(0, 2)$ ve $(-\sqrt{2}, 4)$
- b) $[a, b]$ kapalı aralığı ($a < b$)
- c) $[a, b)$ yarı açık aralığı ($a < b$)
- d) $\{a\}$ tek noktalı kümesi

Çözüm.

a) Her ikisi de açık aralıktır ($0 < 2$ ve $-\sqrt{2} < 4$); **Önerme 15.2** gereği açıktırlar.

b) Açık **değildir**. Uç nokta $x = a$ 'yı ele alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $a - \frac{\varepsilon}{2}$ sayısına bakalım: $|a - \frac{\varepsilon}{2} - a| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olduğundan $a - \frac{\varepsilon}{2} \in B(a, \varepsilon)$ 'dur; ama $a - \frac{\varepsilon}{2} < a$ olduğundan bu sayı $[a, b]$ 'ye ait değildir. Demek ki hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(a, \varepsilon) \subseteq [a, b]$ sağlanmaz. Kümenin bir noktasında güvenlik çemberi çizilemediğinden $[a, b]$ açık değildir. (Aynı sorun b noktasında da vardır; ama tek nokta yeter.)

c) Açık **değildir**: $a \in [a, b)$ noktasında (b) şıkkındaki akıl yürütme aynen geçerlidir; her $\varepsilon > 0$ için $a - \frac{\varepsilon}{2} \in B(a, \varepsilon) \setminus [a, b)$.

d) Açık değildir. Kümenin tek noktası a 'dır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $a + \frac{\varepsilon}{2} \in B(a, \varepsilon)$ ama $a + \frac{\varepsilon}{2} \neq a$ olduğundan bu sayı $\{a\}$ 'da değildir. Dolayısıyla $B(a, \varepsilon) \not\subseteq \{a\}$.

Aynı düşünce daha genel bir sonuç verir: boş olmayan hiçbir **sonlu** küme açık değildir. Gerçekten A sonlu ve $a \in A$ ise, $B(a, \varepsilon)$ kümesi $a + \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{4}, \dots$ gibi sonsuz çoklukta farklı sayı içerir; sonlu bir küme bunların hepsini barındıramaz, dolayısıyla $B(a, \varepsilon) \not\subseteq A$.

■

15.3 Açık Kümelerin Temel Özellikleri

Açık kümelerle kesişim ve birleşim işlemleri yaptığımızda sonuç yine açık mı? Aşağıdaki teorem bu soruyu yanıtlar ve modern matematikte “topoloji” sözcüğünün **tanımını** oluşturur: bir küme üzerinde, bu üç özelliği sağlayan bir alt küme ailesine *topoloji*, ailenin üyelerine de *açık kümeler* denir.

Teorem 15.1 (Açık Kümelerin Temel Özellikleri). $\mathbb{R}$ 'nin açık kümeleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ açık kümelerdir.
2. **Sonlu** çoklukta açık kümenin kesişimi açıktır: $U_1, \dots, U_n$ açık ise $U_1 \cap \dots \cap U_n$ açıktır.
3. **Herhangi** (sonlu ya da sonsuz) çoklukta açık kümenin birleşimi açıktır: $\{U_i\}_{i \in I}$ açık kümelerden oluşan bir aile ise $\bigcup_{i \in I} U_i$ açıktır.

İspat.

(1) Açık küme tanımı “her $a \in U$ için...” diye başlar. Boş kümenin hiç elemanı olmadığından bu koşul **boşlukla doğrudur** (vacuously true): koşulu bozacak bir eleman yoktur. Dolayısıyla $\emptyset$ açıktır.

$\mathbb{R}$ için: her $x \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon)$, reel sayılardan oluşan bir küme olduğundan $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ 'dir. Örneğin $\varepsilon_x = 1$ seçmek yeter.

(2) $U_1, \dots, U_n$ açık kümeler ve $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ olsun. $U = \emptyset$ ise (1) gereği açıktır. $U \neq \emptyset$ olsun ve $x \in U$ keyfi bir nokta olsun. Kesişimin tanımı gereği her $i = 1, \dots, n$ için $x \in U_i$ 'dir. Her U_i açık olduğundan, her i için

$$B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$$

olacak biçimde bir $\varepsilon_i > 0$ vardır. Bu yarıçapların en küçüğünü alalım:

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}.$$

Sonlu çoklukta pozitif sayının minimumu, bunlardan biridir; dolayısıyla $\varepsilon > 0$ 'dır. (Bu adım ispatın kalbidir; sonsuz çoklukta küme olsaydı böyle bir pozitif minimum bulunmayabilirdi.) Her i için $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ olduğundan ($\varepsilon = \varepsilon_i$ ise iki komşuluk aynıdır, $\varepsilon < \varepsilon_i$ ise **Önerme 15.1** gereği)

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

$B(x, \varepsilon)$ kümesi bütün U_i 'lerin alt kümesi olduğundan kesişimlerinin de alt kümesidir: $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. x keyfi olduğundan U açıktır.

(3) $\{U_i\}_{i \in I}$ açık kümelerden oluşan bir indisli aile (**Tanım 3.8**) ve $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ olsun. $x \in U$ keyfi olsun. Birleşimin tanımı gereği $x \in U_{i_0}$ olacak biçimde en az bir $i_0 \in I$ indisi vardır. U_{i_0} açık olduğundan $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ sağlayan bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bir ailenin her üyesi birleşimin alt kümesi olduğundan $U_{i_0} \subseteq U$ 'dur ve

$$B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0} \subseteq U.$$

Böylece U açıktır. Burada indis kümesinin sonlu ya da sonsuz olması hiçbir rol oynamadı: yalnızca x 'i içeren **tek bir** üyeye ihtiyaç duyduk.

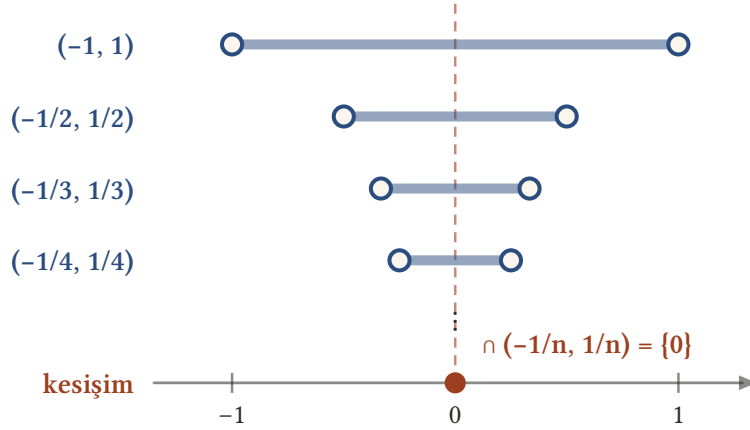
■

Bu teorem, karmaşık kümelerin açık olduğunu tek tek noktalarda ε aramadan göstermemizi sağlar: küme, açık aralıkların birleşimi ya da sonlu sayıda açık kümenin kesişimi olarak yazılabiliyorsa açıktır. Ama (2)'deki “sonlu” sözcüğü vazgeçilmezdir.

⚠ Sonsuz çoklukta açık kümenin kesişimi açık olmayabilir

Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ açık aralıklarını alalım. İddia:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$



Şekil 15.3: $(-1/n, 1/n)$ açık aralıkları 0 etrafında daralır; hepsinin ortak noktası yalnızca 0'dır. Sonsuz çoklukta açık kümenin kesişimi olan $\{0\}$ açık değildir. 0'ın hiçbir komşuluğu tek noktalı bir kümeye sığmaz.

Gerçekten, her n için $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ olduğundan 0 bütün U_n 'lere aittir. Tersine, $x \neq 0$ olsun; o zaman $|x| > 0$ 'dır ve **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n_0} < |x|$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Oysa $U_{n_0} = B(0, \frac{1}{n_0})$ kümesinin elemanları $|x| < \frac{1}{n_0}$ koşulunu sağlar; demek ki $x \notin U_{n_0}$ ve x kesişime ait değildir.

Kesişim yalnızca $\{0\}$ kümesidir.

Oysa **Örnek 15.2** (d) gereği tek noktalı küme açık değildir. Demek ki sonsuz çoklukta açık kümenin kesişimi açık olmak zorunda değildir. İspatta neyin bozulduğuna dikkat edin: 0 noktası için U_n 'lerdeki yarıçaplar $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ alınabilir, ama bunların pozitif bir minimumu yoktur; yarıçaplar 0'a "iner".

Teoremin (3) şıkkının hemen bir sonucu olarak delinmiş komşuluklar da açıktır.

Sonuç 15.2 (Delinmiş Komşuluklar Açıktır). Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için delinmiş komşuluk $B^*(a, \varepsilon)$ açık bir kümedir.

İspat.

Tanım 15.2 gereği

$$B^*(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

olup $\varepsilon > 0$ olduğundan $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ 'dur; yani sağdaki iki küme birer açık aralıktır ve **Önerme 15.2** gereği açıktır. **Teorem 15.1** (3) ile bunların birleşimi de açıktır.

■

Aynı yöntemle daha ilginç kümelerin de açık olduğu görülür.

Örnek 15.3 (Sonlu Bir Kümenin Tümleyeni Açıktır). $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme olsun.

a) $\mathbb{R} \setminus F$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

b) U açık bir küme ise $U \setminus F$ kümesinin de açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce tek bir noktanın tümleyenine bakalım. Her i için

$$\mathbb{R} \setminus \{a_i\} = (-\infty, a_i) \cup (a_i, \infty)$$

olup sağ taraftaki iki sınırsız aralık [Önerme 15.3](#) gereği açıktır; birleşimleri [Teorem 15.1](#) (3) ile açıktır. Şimdi De Morgan kuralını ([Teorem 3.3](#)) uygulayalım:

$$\mathbb{R} \setminus F = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus \{a_i\}).$$

Sağ taraf, **sonlu** çoklukta açık kümenin kesişimidir; [Teorem 15.1](#) (2) gereği açıktır.

b) Küme farkının tanımı gereği $U \setminus F = U \cap (\mathbb{R} \setminus F)$ 'dir. U hipotez gereği, $\mathbb{R} \setminus F$ ise (a) şıkkı gereği açıktır; iki açık kümenin kesişimi [Teorem 15.1](#) (2) ile açıktır.

Somut bir örnek: $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ açıktır. Bu, $\frac{1}{2}$ merkezli $\frac{1}{2}$ yarıçaplı delinmiş komşuluk-tan başka bir şey değildir.

■

15.4 İç Nokta ve Bir Kümenin İç

Açık küme tanımındaki “etrafına güvenlik çemberi çizilebilen nokta” fikrini, kümenin açık olup olmamasından bağımsız olarak, tek tek noktalar için de kullanabiliriz. Böylece her kümenin “gerçekten içeride” olan noktalarını ayırt edebiliriz.

Tanım 15.5 (İç Nokta). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. $B(a, \varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ varsa a 'ya A 'nın bir **iç noktası** (interior point) denir.

Tanım 15.6 (Bir Kümenin İç). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A 'nın bütün iç noktalarının kümesine A 'nın **içi** (interior) denir ve A° ile gösterilir:

$$A^\circ = \{a \in A : \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Bu dille açık küme tanımı tek cümleye iner: U açıktır ancak ve ancak U 'nun her noktası iç noktaysa. Aşağıdaki önerme bu gözlemi ve A° kümesinin temel özelliklerini bir arada verir.

Önerme 15.4 (Bir Kümenin İçinin Temel Özellikleri). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. $A^\circ \subseteq A$.
2. A° açık bir kümedir.
3. A açıktır ancak ve ancak $A = A^\circ$.
4. $U \subseteq A$ açık bir küme ise $U \subseteq A^\circ$ 'dir. Yani A° , A 'nın içinde kalan **en büyük** açık kümedir.

İspat.

(1) İç nokta tanımı gereği iç noktalar A 'nın elemanıdır.

(2) $a \in A^\circ$ olsun. Tanım gereği $B(a, \varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $B(a, \varepsilon)$ 'un **her** noktasının da A 'nın iç noktası olduğunu göstereceğiz; bu, $B(a, \varepsilon) \subseteq A^\circ$ demek olacak ve A° 'nın açık olduğunu verecek. $y \in B(a, \varepsilon)$ olsun. [Sonuç 15.1](#) gereği $B(a, \varepsilon)$ açıktır; dolayısıyla $B(y, \delta) \subseteq B(a, \varepsilon)$ sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. O hâlde $B(y, \delta) \subseteq B(a, \varepsilon) \subseteq A$, yani y bir iç noktadır: $y \in A^\circ$. Böylece $B(a, \varepsilon) \subseteq A^\circ$ bulunur ve A° açıktır.

(3) $(\Rightarrow)$ A açık olsun. (1) ile $A^\circ \subseteq A$. Tersine $a \in A$ ise, A açık olduğundan $B(a, \varepsilon) \subseteq A$ sağlayan bir $\varepsilon > 0$ vardır; yani a iç noktadır ve $a \in A^\circ$. Dolayısıyla $A = A^\circ$.

$(\Leftarrow)$ $A = A^\circ$ ise (2) gereği A açıktır.

(4) $U \subseteq A$ açık ve $u \in U$ olsun. U açık olduğundan $B(u, \varepsilon) \subseteq U \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır; yani u , A 'nın bir iç noktasıdır: $u \in A^\circ$. Böylece $U \subseteq A^\circ$. “En büyük” ifadesi bunun özetidir: A° açıktır, A 'nın içindedir ve A 'nın içindeki her açık kümeyi kapsar.

■

Örnek 15.4 (İç Hesapları). Aşağıdaki kümelerin içini bulunuz.

- a) $[a, b]$ ($a < b$)
- b) $\mathbb{Q}$
- c) $\mathbb{Z}$

Çözüm.

a) $[a, b]^\circ = (a, b)$. Gerçekten $(a, b) \subseteq [a, b]$ açık olduğundan **Önerme 15.4** (4) ile $(a, b) \subseteq [a, b]^\circ$. Öte yandan a ve b iç nokta değildir: **Örnek 15.2** (b)'de gördüğümüz gibi a 'nın her komşuluğu $[a, b]$ 'nin dışına taşar; b için de $b + \frac{\varepsilon}{2}$ sayısı aynı işi görür. $[a, b]$ 'nin a ve b dışındaki noktaları zaten (a, b) 'dedir. Dolayısıyla $[a, b]^\circ = (a, b)$.

b) $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. $q \in \mathbb{Q}$ ve $\varepsilon > 0$ herhangi olsun. **Teorem 13.6** gereği $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ aralığında bir irrasyonel sayı t vardır; $t \in B(q, \varepsilon)$ ama $t \notin \mathbb{Q}$. Dolayısıyla hiçbir komşuluk $\mathbb{Q}$ 'nun içinde kalmaz; q iç nokta değildir. q keyfi olduğundan $\mathbb{Q}$ 'nun hiç iç noktası yoktur. Özellikle **Önerme 15.4** (3) gereği $\mathbb{Q}$ açık değildir.

c) $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$. $n \in \mathbb{Z}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $n + \frac{\varepsilon}{2}$ ile $n + \frac{1}{2}$ sayılarından küçüğünü y diyelim; $y - n = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ olduğundan $0 < y - n < \varepsilon$, yani $y \in B(n, \varepsilon)$; ayrıca $n < y \leq n + \frac{1}{2} < n + 1$ olduğundan y bir tam sayı değildir (ardışık iki tam sayı arasında tam sayı yoktur; **Lemma 11.1**). Demek ki $B(n, \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{Z}$ ve n iç nokta değildir. ■

15.5 Alıştırmalar

Alıştırma 15.1 (Komşuluklar ve Açık Kümeler).

- a) Kapalı komşuluk $B[a, \varepsilon]$ 'un açık olmadığını gösteriniz.
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.
- c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ kesişimini hesaplayınız. Sonuç açık mıdır?
- d) Her açık kümenin açık aralıkların birleşimi olarak yazılabileceğini gösteriniz.
- e) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ için $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $B[a, \varepsilon] = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ bir kapalı aralıktır ve $a - \varepsilon < a + \varepsilon$ 'dur. **Örnek 15.2** (b) gereği kapalı aralıklar açık değildir: $a - \varepsilon$ ucunun her δ -komşuluğu, $a - \varepsilon - \frac{\delta}{2}$ gibi kümeye ait olmayan sayılar içerir.

b) Önce kümeyi aralıklarla yazalım. $x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) > 0$; çarpımın pozitif olması için iki çarpan aynı işaretli olmalıdır (sıralama aksiyomlarının işaret kuralları, Bölüm 7.1). $x - 1 > 0$ ve $x + 1 > 0$ birlikte $x > 1$ demektir; $x - 1 < 0$ ve $x + 1 < 0$ birlikte $x < -1$ demektir. Dolayısıyla

$$A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Her iki parça **Önerme 15.3** gereği açıktır ve birleşimleri **Teorem 15.1** (3) ile açıktır.

c) İddia: kesişim $[0, 1]$ kapalı aralıktır. $x \in [0, 1]$ ise her n için $-\frac{1}{n} < 0 \leq x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$; yani x bütün aralıklara aittir. Tersine $x \notin [0, 1]$ olsun. $x < 0$ ise $|x| = -x > 0$ olduğundan **Sonuç 12.2** ile $\frac{1}{n_0} < -x$, yani $x < -\frac{1}{n_0}$ sağlayan bir n_0 vardır ve x, n_0 -inci aralığa ait değildir. $x > 1$ ise $x - 1 > 0$ ve aynı sonuçla $\frac{1}{n_0} < x - 1$, yani $x > 1 + \frac{1}{n_0}$ olan bir n_0 vardır. Her iki durumda x kesişimin dışındadır. Sonuç $[0, 1]$ 'dir ve **Örnek 15.2** (b) gereği açık değildir: sonsuz kesişimin açıklığı bozduğuna bir örnek daha.

d) U açık olsun. Her $a \in U$ için $B(a, \varepsilon_a) \subseteq U$ olacak biçimde bir $\varepsilon_a > 0$ seçelim. İddia:

$$U = \bigcup_{a \in U} B(a, \varepsilon_a).$$

($\supseteq$) Her $B(a, \varepsilon_a)$, U 'nun alt kümesi olduğundan birleşimleri de U 'nun alt kümesidir. ($\subseteq$) $a \in U$ ise $a \in B(a, \varepsilon_a)$ (çünkü $|a - a| = 0 < \varepsilon_a$), dolayısıyla a birleşime aittir. Her $B(a, \varepsilon_a)$ bir açık aralık olduğundan U , açık aralıkların birleşimidir. (Tersi zaten **Teorem 15.1** (3)'te gösterilmişti: açık aralıkların her birleşimi açıktır. Demek ki $\mathbb{R}$ 'nin açık kümeleri **tam olarak** açık aralıkların birleşimleridir.)

e) Önce basit bir gözlem: $X \subseteq Y$ ise $X^\circ \subseteq Y^\circ$ 'dir; çünkü $B(x, \varepsilon) \subseteq X$ ise $B(x, \varepsilon) \subseteq Y$ 'dir.
 $(\subseteq)$ $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan gözlemle $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ ve $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$; yani $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.
 $(\supseteq)$ A° ve B° , [Önerme 15.4](#) (2) gereğı açıktır; kesişimleri [Teorem 15.1](#) (2) ile açıktır. Ayrıca [Önerme 15.4](#) (1) ile $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. Demek ki $A^\circ \cap B^\circ$, $A \cap B$ 'nin içinde kalan bir açık kümedir; [Önerme 15.4](#) (4) gereğı $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.
 ■

Açık kümeler, “her noktasının etrafında nefes alacak yer olan” kümelerdir. Bir sonraki bölümde bunların tümleyenlerini, yani **kapalı kümeleri** inceleyeceğiz ve “kapalı” sözcüğünün “açık olmayan” anlamına gelmediğini göreceğiz: [Kapalı Kümeler](#).

16. Kapalı Kümeler

Önceki bölümde “her noktasının etrafında güvenlik çemberi çizilebilen” kümeleri, yani açık kümeleri tanıdık. Bu bölümde onların tümleyenlerine bakıyoruz: **kapalı kümeler**. Kapalı kümeler, ileride göreceğimiz gibi, “limitlerini içeren” kümelerdir; bir dizi kapalı bir kümenin içinde ilerliyorsa limiti de o kümede kalır. Bu özellik, analizde kapalı kümeleri açık kümeler kadar önemli kılar.

Ancak baştan bir uyarı gerekir. Günlük dilde bir kapı ya açıktır ya kapalı; üçüncü bir seçenek yoktur. Matematikte “kapalı”, “açık olmayan” anlamına **gelmez**. Bir küme hem açık hem kapalı olabilir; ne açık ne kapalı da olabilir. Bu bölümde her iki türe de örnek göreceğiz.

16.1 Kapalı Küme Tanımı

Açık kümeyi noktalar üzerinden tanımlamıştık: her noktanın etrafında kümede kalan bir komşuluk vardır. Kapalı kümeyi ise doğrudan tanımlamak yerine, **tümleyeni** üzerinden tanımlıyoruz. Sezgi şudur: kapalı bir küme “kenarını” da içerir, bu yüzden kümenin dışındaki her noktanın etrafında kümeye hiç değmeyen bir boşluk vardır.

Tanım 16.1 (Kapalı Küme). $F \subseteq \mathbb{R}$ olsun. F 'nin tümleyeni $\mathbb{R} \setminus F$ (kısaca F^c) $\mathbb{R}$ 'de açık bir küme ise F 'ye **kapalı küme** (closed set) denir.

Tanımı doğrudan noktalarla okuyalım: F kapalıdır ancak ve ancak F 'nin dışındaki her a noktasının, F ile hiç kesişmeyen bir komşuluğu varsa. Yani kümenin dışındaki noktalar, kümeden “belli bir uzaklıkta” durur; kümeye sonsuz yakın olup da ona ait olmayan nokta yoktur.

Tümleyenin tümleyeni kümenin kendisidir: $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A) \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R} \setminus A \Leftrightarrow x \in A$. Bu yüzden açıklık ve kapalılık birbirinin aynasıdır.

Önerme 16.1 (Tümleyen ve Açıklık--Kapalılık). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A açıktır ancak ve ancak $\mathbb{R} \setminus A$ kapalıdır.
2. A kapalıdır ancak ve ancak $\mathbb{R} \setminus A$ açıktır.

İspat.

(2), kapalı küme tanımının kendisidir.

(1) $B = \mathbb{R} \setminus A$ diyelim; yukarıdaki gözlemle $\mathbb{R} \setminus B = A$ 'dır. Tanıma göre B kapalıdır ancak ve ancak $\mathbb{R} \setminus B$ açıksa; yani ancak ve ancak A açıksa.

■

⚠ Kapalı, açık olmayan demek değildir

Bir A kümesi için iki bağımsız soru vardır: “ A açık mı?” ve “ $\mathbb{R} \setminus A$ açık mı?” Her sorunun iki yanıtı olduğundan dört olasılık vardır:

A açık mı?	$\mathbb{R} \setminus A$ açık mı?	Sonuç	Örnek
evet	evet	hem açık hem kapalı	$\emptyset, \mathbb{R}$
evet	hayır	açık, kapalı değil	$(0, 1)$
hayır	evet	kapalı, açık değil	$[0, 1]$
hayır	hayır	ne açık ne kapalı	$[0, 1), \mathbb{Q}$

Bu bölüm boyunca tablodaki örneklerin her birini ispatlayacağız. Bir kümenin açık olmadığını göstermek onun kapalı olduğunu **göstermez**; kapalılık için tümleyene ayrıca bakmak gerekir.

16.2 Temel Örnekler

Kapalı olduğunu göstermek istediğimiz bir kümenin tümleyenini açık aralıkların birleşimi olarak yazabiliyorsak iş bitmiştir; çünkü [Teorem 15.1 \(3\)](#) gereği açık aralıkların her birleşimi açıktır.

Örnek 16.1 (Kapalı Aralıklar Kapalıdır). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Aşağıdaki kümelerin kapalı olduğunu gösteriniz.

- $[a, b]$
- $[a, \infty)$ ve $(-\infty, b]$
- Kapalı komşuluk $B[a, \varepsilon]$

Çözüm.

a) Tümleyeni yazalım. Bir x reel sayısı $[a, b]$ 'ye ait değilse ya $x < a$ ya da $x > b$ 'dir (üçlem yasası); tersi de doğrudur. Dolayısıyla

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty).$$

Sağdaki iki sınırsız aralık [Önerme 15.3](#) gereği açıktır ve birleşimleri [Teorem 15.1 \(3\)](#) gereği açıktır. Tümleyeni açık olduğundan $[a, b]$ kapalıdır.

b) $\mathbb{R} \setminus [a, \infty) = (-\infty, a)$ ve $\mathbb{R} \setminus (-\infty, b] = (b, \infty)$; her ikisi de [Önerme 15.3](#) gereği açıktır.

c) [Tanım 15.3](#) gereği $B[a, \varepsilon] = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ bir kapalı aralıktır; (a) şıkkıyla kapalıdır. “Kapalı yuvar” adı böylece hak edilmiş olur.

■

Örnek 16.2 (Tek Noktalı Kümeler Kapalıdır). Her $a \in \mathbb{R}$ için $\{a\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Tümleyen

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$$

kümesidir: $x \neq a$ ise üçlem yasasıyla ya $x < a$ ya da $x > a$ 'dır. İki sınırsız açık aralığın birleşimi [Önerme 15.3](#) ve [Teorem 15.1 \(3\)](#) gereği açıktır. Dolayısıyla $\{a\}$ kapalıdır.

Öte yandan önceki bölümde ([Örnek 15.2 \(d\)](#)) $\{a\}$ 'nın açık olmadığını görmüştük: tek noktalı küme, tablodaki “kapalı ama açık değil” satırına bir örnektir.

■

Sonlu kümelerin kapalı olduğu, biraz sonra ispatlayacağımız ana teoremin bir sonucudur; oraya geliyoruz. Önce sonsuz ama “seyrek” bir kümeye bakalım: tam sayılar.

Örnek 16.3 (Tam Sayılar Kümesi Kapalıdır). $\mathbb{Z}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İddia:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Bu eşitliği iki yönlü kapsama ile ispatlayalım.

($\subseteq$) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ olsun. **Teorem 12.3** gereği $p \leq x < p+1$ olacak biçimde bir $p \in \mathbb{Z}$ vardır. x tam sayı olmadığından $x \neq p$; dolayısıyla $p < x < p+1$, yani $x \in (p, p+1)$ ve x birleşime aittir.

($\supseteq$) $x \in (n, n+1)$ olsun; $n \in \mathbb{Z}$ için $n < x < n+1$ koşulunu sağlayan bir tam sayı yoktur (**Lemma 11.1**). Demek ki $x \notin \mathbb{Z}$, yani $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Böylece $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, açık aralıkların birleşimidir; **Önerme 15.2** ve **Teorem 15.1** (3) gereği açıktır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ kapalıdır.

$\mathbb{Z}$ açık değildir: hiçbir tam sayı iç nokta değildir, çünkü n 'nin her komşuluğu n ile $n+1$ arasında bir sayı içerir (**Örnek 15.4** (c)). Yani $\mathbb{Z}$ da “kapalı ama açık değil” satırına girer.

■

Şimdi tablonun son satırına, yani ne açık ne kapalı kümelerle bakalım. Bunlar için iki şeyi ayrı ayrı göstermek gerekir: kümede güvenlik çemberi çizilemeyen bir nokta **ve** tümleyende güvenlik çemberi çizilemeyen bir nokta.

Örnek 16.4 (Ne Açık Ne Kapalı Kümeler). Aşağıdaki kümelerin ne açık ne kapalı olduğunu gösteriniz.

a) $[a, b)$ yarı açık aralığı ($a < b$)

b) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi

Çözüm.

a) Açık değil. $a \in [a, b)$ noktasını alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $a - \frac{\varepsilon}{2} \in B(a, \varepsilon)$ ama $a - \frac{\varepsilon}{2} < a$ olduğundan bu sayı $[a, b)$ 'de değildir. Demek ki $B(a, \varepsilon) \not\subseteq [a, b)$.

Kapalı değil. Tümleyen $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ kümesidir; bunun açık olmadığını göstermeliyiz. b noktası tümleyendedir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $c = \min\{\varepsilon, b-a\} > 0$ olmak üzere $y = b - \frac{c}{2}$ alalım. $|y - b| = \frac{c}{2} < \varepsilon$ olduğundan $y \in B(b, \varepsilon)$ 'dur. Ayrıca $\frac{c}{2} \leq \frac{b-a}{2} < b-a$ olduğundan $y > a$ ve $y < b$; yani $y \in [a, b)$, dolayısıyla y tümleyende **değildir**. Böylece b 'nin hiçbir komşuluğu tümleyende kalmaz; tümleyen açık değildir ve $[a, b)$ kapalı değildir.

$(a, b]$ için aynı akıl yürütme uçlar değiştirilerek tekrarlanır.

b) Açık değil. $q \in \mathbb{Q}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. **Teorem 13.6** gereği $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ aralığında bir irrasyonel sayı t vardır. $t \in B(q, \varepsilon)$ ama $t \notin \mathbb{Q}$; dolayısıyla $B(q, \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Hiçbir rasyonel sayı iç nokta değildir.

Kapalı değil. Tümleyen, irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 'dur. t irrasyonel ve $\varepsilon > 0$ olsun. **Teorem 13.5** gereği $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ aralığında bir rasyonel sayı q vardır; $q \in B(t, \varepsilon)$ ama $q \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dolayısıyla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ açık değildir ve $\mathbb{Q}$ kapalı değildir.

Aynı iki adım, rolleri değiştirilerek, irrasyonel sayılar kümesinin de ne açık ne kapalı olduğunu verir. Rasyoneller ile irrasyoneller sayı doğrusunda o kadar iç içedir ki hiçbir diğlerinden bir komşuluk kadar bile ayıramaz.

■

16.3 Kapalı Kümelerin Temel Özellikleri

Açık kümelerin üç temel özelliği (**Teorem 15.1**), De Morgan kuralları aracılığıyla kapalı kümelerle aktarılır. Ama aktarımda **kesişim ile birleşim yer değiştirir**: açık kümelerde sonlu kesişim ve keyfi birleşim serbestken, kapalı kümelerde keyfi kesişim ve sonlu birleşim serbesttir.

Teorem 16.1 (Kapalı Kümelerin Temel Özellikleri). $\mathbb{R}$ 'nin kapalı kümeleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kapalı kümelerdir.
2. **Herhangi** (sonlu ya da sonsuz) çoklukta kapalı kümenin kesişimi kapalıdır: $\{F_i\}_{i \in I}$ kapalı kümelerden oluşan bir aile ise $\bigcap_{i \in I} F_i$ kapalıdır.

3. **Sonlu** çoklukta kapalı kümenin birleşimi kapalıdır: $F_1, \dots, F_n$ kapalı ise $F_1 \cup \dots \cup F_n$ kapalıdır.

İspat.

İspat boyunca indisli aileler için De Morgan kurallarını (Teorem 3.3) kullanacağız:

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i), \quad \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i).$$

(1) $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ açık olduğundan (Teorem 15.1 (1)) $\emptyset$ kapalıdır. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ ve $\emptyset$ açık olduğundan $\mathbb{R}$ kapalıdır. Böylece $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ hem açık hem kapalıdır.

(2) $\{F_i\}_{i \in I}$ kapalı kümelerden oluşan bir aile ve $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ olsun. F 'nin tümleyenine bakalım; De Morgan ile

$$\mathbb{R} \setminus F = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus F_i).$$

Her F_i kapalı olduğundan her $\mathbb{R} \setminus F_i$ açıktır. Açık kümelerin **keyfi** birleşimi açık olduğundan (Teorem 15.1 (3)) sağ taraf açıktır. Tümleyeni açık olan F kapalıdır.

(3) $F_1, \dots, F_n$ kapalı ve $K = \bigcup_{k=1}^n F_k$ olsun. De Morgan ile

$$\mathbb{R} \setminus K = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcap_{k=1}^n (\mathbb{R} \setminus F_k).$$

Her $\mathbb{R} \setminus F_k$ açıktır ve **sonlu** çoklukta açık kümenin kesişimi açık olduğundan (Teorem 15.1 (2)) sağ taraf açıktır. Dolayısıyla K kapalıdır.

■

Bu teorem, kapalı kümeleri parçalara ayırarak tanımamızı sağlar: kapalı aralıkların ve noktaların sonlu birleşimleri, kapalı kümelerin (istediğimiz kadar çok) kesişimleri hep kapalıdır. İlk sonuç, ertelediğimiz sonlu kümelerdir.

Sonuç 16.1 (Sonlu Kümeler Kapalıdır). Her sonlu $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi kapalıdır.

İspat.

$A = \emptyset$ ise Teorem 16.1 (1) ile kapalıdır. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ boş olmayan sonlu bir küme olsun. O zaman

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

biçiminde, sonlu çoklukta tek noktalı kümenin birleşimidir. Örnek 16.2 gereği her $\{a_k\}$ kapalıdır ve Teorem 16.1 (3) ile sonlu birleşimleri de kapalıdır.

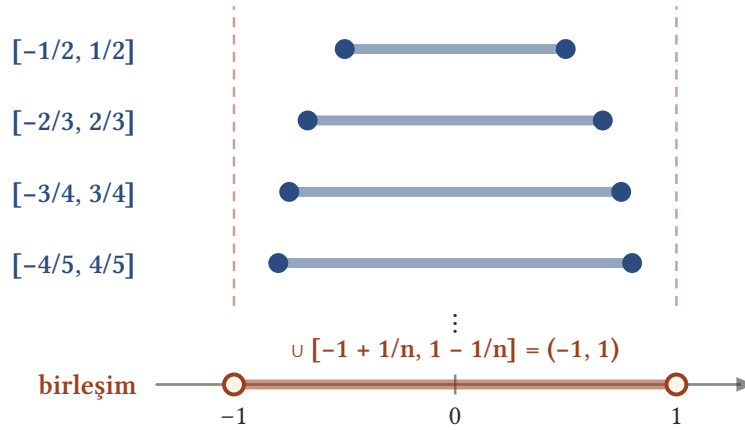
■

Teoremin (3) şıkkındaki “sonlu” sözcüğü, tıpkı açık kümelerdeki sonlu kesişim gibi, vazgeçilmezdir.

⚠ Sonsuz çoklukta kapalı kümenin birleşimi kapalı olmayabilir

Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ kapalı aralıklarını alalım ($F_1 = [0, 0] = \{0\}$, $F_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $F_3 = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, ...). İddia:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1).$$



Şekil 16.1: $[-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ kapalı aralıkları büyüyerek $(-1, 1)$ 'i doldurur; uç noktalar -1 ve 1 hiçbir aralığa girmez. Sonsuz çoklukta kapalı kümenin birleşimi olan $(-1, 1)$ kapalı değildir.

($\subseteq$) Her n için $-1 < -1 + \frac{1}{n}$ ve $1 - \frac{1}{n} < 1$ olduğundan $F_n \subseteq (-1, 1)$ 'dir; dolayısıyla birleşim de $(-1, 1)$ 'in içindedir.

($\supseteq$) $x \in (-1, 1)$ olsun; o zaman $|x| < 1$, yani $1 - |x| > 0$ 'dır. **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n_0} < 1 - |x|$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, $|x| < 1 - \frac{1}{n_0}$ demektir; **Önerme 8.6** ile $-1 + \frac{1}{n_0} < x < 1 - \frac{1}{n_0}$, yani $x \in F_{n_0}$. Böylece x birleşime aittir.

Birleşim $(-1, 1)$ açık aralıktır; uç noktalar -1 ve 1 'e istenildiği kadar yaklaşırlar ama hiçbir F_n onları içermez. $(-1, 1)$ kapalı **değildir**: tümleyeni $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ kümesindeki 1 noktasını alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $c = \min\{\varepsilon, 1\}$ olmak üzere $y = 1 - \frac{c}{2}$ diyelim; $|y - 1| = \frac{c}{2} < \varepsilon$ olduğundan $y \in B(1, \varepsilon)$, ama $\frac{1}{2} \leq y < 1$ olduğundan $y \in (-1, 1)$, yani y tümleyende değildir. 1 'in hiçbir komşuluğu tümleyende kalmaz; tümleyen açık değildir. Sonsuz çoklukta kapalı kümenin birleşimi kapalı olmak zorunda değildir.

Bu örnek, önceki bölümdeki $\bigcap(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ örneğinin tam aynasıdır: orada açık kümelerin sonsuz kesişimi kapalı bir küme vermişti, burada kapalı kümelerin sonsuz birleşimi açık bir küme veriyor.

Buna karşılık kesişimde hiçbir kısıtlama yoktur; bunu somut bir hesapla görelim.

Örnek 16.5 (Kapalı Kümelerin Sonsuz Kesişimi). $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + \frac{1}{n}]$ kesişimini hesaplayınız ve sonucun kapalı olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

İddia: kesişim $[0, 1]$ 'dir.

($\supseteq$) $x \in [0, 1]$ ise her n için $0 \leq x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$; yani x her aralığa aittir.

($\subseteq$) x kesişime ait olsun. Özellikle ($n = 1$ için) $x \in [0, 2]$ olduğundan $x \geq 0$ 'dır. $x > 1$ olduğunu varsayalım; o zaman $x - 1 > 0$ ve **Sonuç 12.2** ile $\frac{1}{n_0} < x - 1$, yani $x > 1 + \frac{1}{n_0}$ olan bir n_0 vardır. Bu, $x \notin [0, 1 + \frac{1}{n_0}]$ demektir; çelişki. Dolayısıyla $x \leq 1$ ve $x \in [0, 1]$.

Sonuç $[0, 1]$ kapalı aralıktır ve **Örnek 16.1** gereği kapalıdır. Bu, **Teorem 16.1** (2) ile uyumludur: kapalı kümelerin sonsuz kesişimi kapalı çıkmak zorundaydı.

■

16.4 Ne Açık Ne Kapalı Bir Küme

Şimdiye kadarki örneklerde kümelerin “kenar” noktaları belliydi. Aşağıdaki küme iki farklı parçadan oluşur ve her parça ayrı bir sorun çıkarır. Bu örnek, açıklık ve kapallığı tümleyen üzerinden nasıl inceleyeceğimizi bütün ayrıntısıyla gösterir.

Örnek 16.6 (Ne Açık Ne Kapalı Bir Küme). $A = [0, 1) \cup \{2\}$ kümesi açık mıdır? Kapalı mıdır?

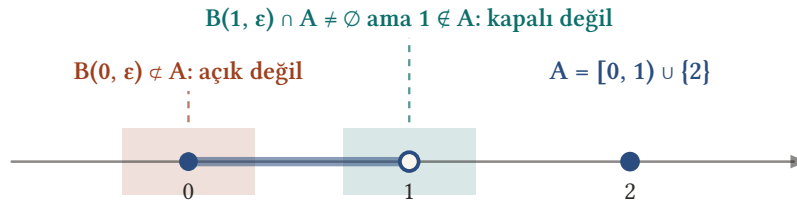
Çözüm.

Açık mı? Hayır. $0 \in A$ noktasına bakalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $B(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğunun sol yarısı negatif sayılardan oluşur; örneğin $-\frac{\varepsilon}{2} \in B(0, \varepsilon)$ ama $-\frac{\varepsilon}{2} \notin A$. Dolayısıyla 0 , A ’nın iç noktası değildir ve A açık değildir. (Aynı sonuca 2 noktasından da varılabilir: 2 ’nin her komşuluğu, $2 + \frac{\varepsilon}{2}$ gibi A ’ya ait olmayan sayılar içerir.)

Kapalı mı? Hayır. Tümleyeni yazalım:

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup [1, 2) \cup (2, \infty).$$

Bu kümenin açık olmadığını göstermeliyiz. 1 noktası tümleyendedir. $\varepsilon > 0$ verilsin; $c = \min\{\varepsilon, 1\}$ olmak üzere $y = 1 - \frac{c}{2}$ sayısına bakalım. $|y - 1| = \frac{c}{2} < \varepsilon$ olduğundan $y \in B(1, \varepsilon)$; ayrıca $0 < \frac{1}{2} \leq y < 1$ olduğundan $y \in [0, 1) \subseteq A$, yani y tümleyende değildir. 1 ’in sağındaki sayılar A ’da değildir ama 1 ’e yeterince yakın solundaki sayılar A ’dadır; bu yüzden 1 ’in hiçbir komşuluğu tümleyeninde kalmaz. Tümleyen açık değildir; dolayısıyla A kapalı değildir.



Şekil 16.2: $A = [0, 1) \cup \{2\}$ kümesi açık değildir: 0 kümeye aittir ama her komşuluğu sola, kümenin dışına taşar. Kapalı da değildir: 1 kümeye ait olmadığı hâlde her komşuluğu $[0, 1)$ parçasından noktalar içerir, yani tümleyen açık değildir.

Sonuç. A ne açık ne kapalıdır. Kümenin 0 ucu açıklığı, 1 ucu (kümeye ait olmadığı hâlde kümenin ona “yapıştığı” nokta) kapallığı bozar. $\{2\}$ parçası ise tek başına kapalıdır ama açıklığı yine bozar.

■

16.5 Hem Açık Hem Kapalı Kümeler

Tablomuzun ilk satırında $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ vardı. Başka örnek var mı? Yanıt hayırdır ve bunun nedeni, reel sayı doğrusunun “tek parça” olmasıdır: $\mathbb{R}$ ’yi iki boş olmayan açık kümeye bölmek mümkün değildir. İspat, tamlık aksiyomunun supremum biçimine dayanır.

Teorem 16.2 (Hem Açık Hem Kapalı Kümeler). $\mathbb{R}$ ’nin hem açık hem kapalı olan alt kümeleri yalnızca $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ ’dir.

İspat.

$A \subseteq \mathbb{R}$ hem açık hem kapalı olsun ve $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{R}$ olduğunu varsayarak çelişki arayalım. O zaman A ’da bir a noktası ve A ’nın dışında bir b noktası vardır. Gerekirse A ile $\mathbb{R} \setminus A$ ’nın rollerini değiştirerek $a < b$ varsayabiliriz: $b < a$ ise $\mathbb{R} \setminus A$ kümesini ele alırız; o da hem açık hem kapalıdır (Önerme 16.1), b onun bir noktası, a ise dışında bir noktadır ve $b < a$ ’dır.

$$S = A \cap [a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$$

kümesini ele alalım. $a \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ 'dir ve b , S 'nin bir üst sınırıdır. Tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği $s = \sup S$ vardır ve $a \leq s \leq b$ 'dir (Tanım 10.4: $a \in S$ olduğundan $a \leq s$; b üst sınır olduğundan $s \leq b$). s noktası ya A 'dadır ya da değildir; her iki durumda çelişki bulacağız.

Durum 1: $s \in A$. $b \notin A$ olduğundan $s \neq b$, yani $s < b$ 'dir. A açık olduğundan $B(s, \varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $c = \min\{\varepsilon, b - s\} > 0$ olmak üzere $y = s + \frac{c}{2}$ alalım. $|y - s| = \frac{c}{2} < \varepsilon$ olduğundan $y \in B(s, \varepsilon) \subseteq A$; ayrıca $a \leq s < y < s + (b - s) = b$ olduğundan $y \in [a, b]$. Demek ki $y \in S$ ve $y > s = \sup S$. Bu, s 'nin üst sınır olmasıyla çelişir.

Durum 2: $s \notin A$. O zaman $s \in \mathbb{R} \setminus A$ 'dır ve A kapalı olduğundan $\mathbb{R} \setminus A$ açıktır: $B(s, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Öte yandan Teorem 10.1 gereği $s - \varepsilon < x \leq s$ olan bir $x \in S$ vardır. Bu x için $|x - s| < \varepsilon$, yani $x \in B(s, \varepsilon)$; dolayısıyla $x \notin A$. Ama $x \in S \subseteq A$. Çelişki.

Her iki durum da çelişkiye götürdüğünden varsayımımız yanlıştır: $A = \emptyset$ ya da $A = \mathbb{R}$ olmalıdır.

■

i Bağlantılılık

Teorem şöyle de okunabilir: $\mathbb{R} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ ve U, V açık ise U ya da V boştur. (Gerçekten $U = \mathbb{R} \setminus V$ olduğundan U hem açık hem kapalıdır.) Bu özelliğe **bağlantılılık** (connectedness) denir; sayı doğrusunun “kopuk” olmadığını söyler. Ara değer teoremi (Teorem 35.2) bu özelliğin sürekli fonksiyonlara yansımadır.

Sıralı bir cisim olarak $\mathbb{Q}$ bu özelliği taşımaz: $U = \{q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2}\}$ ve $V = \{q \in \mathbb{Q} : q > \sqrt{2}\}$ kümeleri $\mathbb{Q}$ 'yu iki boş olmayan parçaya böler ve $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan (Teorem 13.3) her rasyonel sayı bu ikisinden tam birine düşer. Üstelik iki parça da $\mathbb{Q}$ içinde “açıktır”: $q \in U$ için $\varepsilon = \sqrt{2} - q > 0$ alınırsa $B(q, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün rasyonel sayılar yine U 'dadır; V için benzer. Yukarıdaki ispatta bu ayrılmayı engelleyen şey, $\mathbb{Q}$ 'da geçerli olmayan tamlık aksiyomudur.

16.6 Alıştırmalar

Alıştırma 16.1 (Kapalı Kümeler).

- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin kapalı olmadığını gösteriniz.
- $A \cup \{0\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
- F kapalı ve U açık ise $F \setminus U$ 'nun kapalı, $U \setminus F$ 'nin açık olduğunu gösteriniz.
- $\mathbb{N}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ kümesinin kapalı, $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Tümlenin açık olmadığını göstereceğiz. $0 \notin A$ (çünkü $\frac{1}{n} > 0$), yani $0 \in \mathbb{R} \setminus A$. $\varepsilon > 0$ herhangi olsun. Sonuç 12.2 gereği $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ olan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır; o hâlde $\frac{1}{n_0} \in B(0, \varepsilon)$ ve $\frac{1}{n_0} \in A$. Yani 0 'ın hiçbir komşuluğu $\mathbb{R} \setminus A$ 'nın içinde kalmaz; tümlen açık değildir ve A kapalı değildir. (0 , kümeye ait olmadığı hâlde kümenin “yapıştığı” noktadır; bir sonraki bölümde bu tür noktalara *yığılma noktası* diyeceğiz.)

b) $C = A \cup \{0\}$ diyelim. İddia:

$$\mathbb{R} \setminus C = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$

($\subseteq$) $x \notin C$ olsun. $x < 0$ ise $x \in (-\infty, 0)$; $x > 1$ ise $x \in (1, \infty)$. Geriye $0 < x \leq 1$ durumu kalır ($x \neq 0$, çünkü $0 \in C$). $t = \frac{1}{x} \geq 1$ olsun ve Teorem 12.3 ile $n \leq t < n+1$ olan tam sayı $n = \lfloor t \rfloor$ 'yi alalım; $t \geq 1$ olduğundan $n \geq 1$, yani $n \in \mathbb{N}$. Eşitsizlikleri tersine çevirirsek $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. $x \notin A$ olduğundan $x \neq \frac{1}{n}$; dolayısıyla $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$.

($\supseteq$) Sağdaki kümelerin hiçbirisi C 'nin elemanı içermez. $(-\infty, 0)$ ve $(1, \infty)$ için bu açıktır, çünkü $C \subseteq [0, 1]$. $\frac{1}{m} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ olsaydı, pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirdiğinden, $n < m < n+1$ olurdu; Önerme 9.3 gereği ardışık iki doğal sayı arasında doğal sayı yoktur. 0 da bu aralıklarda değildir.

Böylece $\mathbb{R} \setminus C$, açık aralıkların birleşimidir ve Teorem 15.1 (3) ile açıktır; C kapalıdır. (a) ile birlikte: A 'ya tek bir nokta eklemek onu kapalı yapmıştır.

c) $F \setminus U = F \cap (\mathbb{R} \setminus U)$ 'dur. F kapalıdır; U açık olduğundan Önerme 16.1 ile $\mathbb{R} \setminus U$ kapalıdır. İki kapalı kümenin kesişimi Teorem 16.1 (2) gereği kapalıdır.

$U \setminus F = U \cap (\mathbb{R} \setminus F)$ 'dir. U açıktır; F kapalı olduğundan $\mathbb{R} \setminus F$ açıktır. İki açık kümenin kesişimi Teorem 15.1 (2) gereği açıktır.

d) İddia:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1).$$

Gerçekten $x \notin \mathbb{N}$ ise ya $x < 1$ 'dir ya da $x \geq 1$ ve $x \notin \mathbb{Z}$ 'dir (çünkü 1'den küçük olmayan bir tam sayı pozitifdir, yani doğal sayıdır; Tanım 11.1); ikinci durumda, Örnek 16.3 içindeki akıl yürütmeye, $x \in ([x], [x] + 1)$ ve $[x] \geq 1$ bir doğal sayıdır. Tersine $(-\infty, 1)$ 'de doğal sayı yoktur ($1 = \min \mathbb{N}$) ve $(n, n+1)$ aralıklarında tam sayı, dolayısıyla doğal sayı yoktur (Lemma 11.1). Sağ taraf açık aralıkların birleşimi olduğundan açıktır; $\mathbb{N}$ kapalıdır.

Daha kısa bir yol: $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [1, \infty)$ 'dur; $\mathbb{Z}$ (Örnek 16.3) ve $[1, \infty)$ (Örnek 16.1) kapalı olduğundan kesişimleri Teorem 16.1 (2) ile kapalıdır.

e) Teorem 13.1 gereği $\sqrt{2}$ vardır. Negatif olmayan u, v sayıları için geçerli olan $u \leq v \Leftrightarrow u^2 \leq v^2$ denkleğini kullanacağız; uç durumlar dahil gerekçesi şudur. ($\Rightarrow$) $u = v$ ise kareler de eşittir; $u = 0 < v$ ise Önerme 7.12 (1) gereği $u^2 = 0 \leq v^2$; $0 < u < v$ ise aynı önermenin (4) maddesi gereği $u^2 < v^2$. ($\Leftarrow$) Karşıt tersini gösterelim: $v < u$ olsun; $v = 0$ ise $u > 0$ olduğundan (1) ile $v^2 = 0 < u^2$, $v > 0$ ise (4) ile $v^2 < u^2$; her iki durumda da $u^2 \leq v^2$ değildir. Şimdi bu denkleği $u = |x|$, $v = \sqrt{2}$ için yazalım: $x^2 = |x|^2$ ve $(\sqrt{2})^2 = 2$ olduğundan $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$ elde edilir. Tanım 15.3 ile

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = \{x : |x| \leq \sqrt{2}\} = B[0, \sqrt{2}] = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],$$

ve bu küme Örnek 16.1 gereği kapalıdır. Benzer biçimde (aynı denkleği bu kez $u = \sqrt{2}$, $v = |x|$ için yazıp iki yanı olumsuzlarsak $x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$ bulunur)

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = \{x : |x| < \sqrt{2}\} = B(0, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

bir açık aralıktır ve Önerme 15.2 gereği açıktır.

■

Kapalı kümelerin dışındaki noktalar kümeden uzak durur; ama kümenin dışında olup kümeye “yapışan” noktalar da vardır: $\{\frac{1}{n}\}$ kümesi için 0 gibi. Bir sonraki bölümde bu noktaları, yani **yığılma noktalarını** tanımlayacak ve kapalı kümelerin tam olarak “yığılma noktalarını içeren kümeler” olduğunu göreceğiz: **Yığılma Noktaları, Kapalı ve Yoğun Kümeler**.

17. Yığılma Noktaları, Kapanış ve Yoğun Kümeler

Önceki iki bölümde açık ve kapalı kümeleri tanıdık: açık kümeler her noktasının etrafında bir “güvenlik komşuluğu” barındırır, kapalı kümeler ise tümleyeni açık olan kümelerdir. Bu bölümde kapalı kümelere bambaşka bir yönden bakacağız: bir kümenin elemanlarının nerelerde “yığıldığını” inceleyeceğiz. Örneğin $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ kümesinin elemanları 0’ın etrafında sıkışır ama 0 kümeye ait değildir; işte bu 0 noktası kümenin bir *yığılma noktası*dır. Yığılma noktaları, analizde limit kavramının küme dilindeki karşılığıdır: dizilerin limiti, fonksiyonların limiti ve süreklilik hep bu kavram üzerine kurulur.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: yığılma noktası ve sonsuz eleman özelliği; mükemmel küme ve izole nokta; değme noktası ve kapanış; “kapalı küme, bütün yığılma noktalarını içeren kümedir” karakterizasyonu; yoğun kümeler; sınırlı bir kümenin supremumunun ya kümeye ait ya da bir yığılma noktası olduğu; ve son olarak sonsuz ve sınırlı her kümenin en az bir yığılma noktası bulunduğunu söyleyen Bolzano–Weierstrass teoremi.

17.1 Yığılma Noktaları

Bir noktanın bir kümeye “yakın” olması yığılma için yeterli değildir; noktanın hemen dibinde kümenin başka elemanları da bulunmalıdır. Örneğin 2 sayısı $\{2\}$ kümesine elbette yakındır (kümenin elemanıdır) ama etrafında kümenin başka hiçbir elemanı yoktur. Buna karşılık 0, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanı olmadığı hâlde kümenin elemanlarıyla her yandan kuşatılmıştır. Tanımı bu ikinci durumu yakalayacak biçimde kuruyoruz; $B(a, \varepsilon)$ ve $B^*(a, \varepsilon)$ gösterimleri için bkz. Tanım 15.1 ve Tanım 15.2.

Tanım 17.1 (Yığılma Noktası). $A \subseteq \mathbb{R}$ bir küme ve $a \in \mathbb{R}$ bir nokta olsun. a ’nın her komşuluğu A ’nın a ’dan farklı en az bir elemanını içeriyorsa, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \text{açık yazımla} \quad ((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

ise a ’ya A kümesinin bir **yığılma noktası** (accumulation point, limit point) denir. A ’nın bütün yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

Tanımı niceleyicilerle yazalım:

$$a \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : 0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon.$$

Olumsuzlaması da aynı derecede önemlidir:

$$a \notin A' \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B^*(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset,$$

yani a ’nın, A ’nın a dışındaki hiçbir elemanını içermeyen bir komşuluğu vardır. Bir noktanın yığılma noktası *olmadığını* göstermek için böyle tek bir ε bulmak yeter.

i Yığılma noktası kümeye ait olmak zorunda değildir

Tanımda $a \in A$ şartı yoktur: aşağıda göreceğimiz gibi a ve b sayıları (a, b) açık aralığının yığılma noktalarıdır ama aralığa ait değildir. Öte yandan $a \in A$ olması da $a \in A'$ için yeterli değildir: $A = \{2\}$ için $2 \in A$ ama $B^*(2, 1) \cap A = \emptyset$ olduğundan $2 \notin A'$. Dolayısıyla genel olarak ne $A \subseteq A'$ ne de $A' \subseteq A$ geçerlidir; bu iki kapsamanın ne zaman sağlandığı bu bölümün ana sorularından biridir.

Tanımdaki “en az bir eleman” sözü aslında çok daha güçlü bir sonuç gizler.

Teorem 17.1 (Sonsuz Eleman Özelliği). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $a \in A'$ olması için gerek ve yeter koşul, a ’nın her ε -komşuluğunun A ’nın **sonsuz çoklukta** elemanını içermesidir.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $a \in A'$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Olmayana ergi ile $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$ kümesinin sonlu olduğunu varsayalım. O zaman bu kümenin alt kümesi olan

$$S = \{x \in A : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

de sonludur. $a \in A'$ olduğundan tanımı bu ε için uygularsak $S \neq \emptyset$ bulunur; $S = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ yazalım. Şimdi

$$\delta = \min\{|y_1 - a|, |y_2 - a|, \dots, |y_k - a|\}$$

alalım. Her $|y_j - a|$ pozitifdir ve sonlu tane sayının minimumu alındığından $\delta > 0$; ayrıca her $|y_j - a| < \varepsilon$ olduğundan $\delta < \varepsilon$. İddia: $B^*(a, \delta) \cap A = \emptyset$. Gerçekten, $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ olsaydı, $\delta < \varepsilon$ gereği $x \in S$, yani bir j için $x = y_j$ olurdu; ama $|y_j - a| \geq \delta$ olduğundan bu, $|x - a| < \delta$ ile çelişir. Demek ki a 'nın δ -komşuluğu A 'nın a 'dan farklı hiçbir elemanını içermiyor; bu da $a \in A'$ varsayımıyla çelişir. O hâlde $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$ sonsuzdur.

($\Leftarrow$ yönü) a 'nın her ε -komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içeriyorsa, bu elemanlardan a çıkarıldığında geriye yine sonsuz çoklukta (özellikle en az bir) eleman kalır. Yani $B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve $a \in A'$. ■

Teorem iki yönde işe yarar: bir noktanın yığılma noktası olduğunu göstermek için “her komşulukta sonsuz eleman” bulmak yeter; yığılma noktası olmadığını göstermek içinse “yalnızca sonlu tane eleman içeren” tek bir komşuluk bulmak yeter.

Sonuç 17.1 (Sonlu Kümenin Yığılma Noktası Yoktur). $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir kümeysse $A' = \emptyset$.

İspat.

$a \in A'$ olsaydı, [Teorem 17.1](#) gereği $(a - 1, a + 1)$ komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerirdi. Oysa A sonludur; sonlu bir kümenin sonsuz alt kümesi olamaz. Çelişki. Öyleyse hiçbir a yığılma noktası değildir: $A' = \emptyset$. ■

Örneklere geçmeden önce sık kullanacağımız basit bir gözlem:

Önerme 17.1 (Yığılma Noktaları Kapsamayı Korur). $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ ise $A' \subseteq B'$.

İspat.

$a \in A'$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Tanım gereği $0 < |x - a| < \varepsilon$ olan bir $x \in A$ vardır. $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B$; dolayısıyla $B^*(a, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. ε keyfi olduğundan $a \in B'$. ■

Örnek 17.1 (Açık Aralığın Yığılma Noktaları). $a < b$ olsun. $(a, b)' = [a, b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İspatı üç adımda yapacağız: aralığın iç noktaları, uç noktaları ve dışındaki noktalar.

Adım 1: Aralığın her noktası yığılma noktasıdır. $x \in (a, b)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Üç pozitif sayının en küçüğünü alalım:

$$c = \min\{x - a, b - x, \varepsilon\} > 0, \quad y = x + \frac{c}{2}.$$

$c \leq b - x$ olduğundan $y \leq x + \frac{b-x}{2} < b$; ayrıca $y > x > a$. Dolayısıyla $y \in (a, b)$. Öte yandan $0 < |y - x| = \frac{c}{2} < \varepsilon$, yani $y \in B^*(x, \varepsilon)$. Böylece $B^*(x, \varepsilon) \cap (a, b) \neq \emptyset$ ve $x \in (a, b)'$. (Aynı biçimde $x - c/2$ de bu komşulukta ve aralıktadır; yani x 'in iki yanında da aralığın elemanları vardır.)

Adım 2: Uç noktalar yığılma noktasıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $d = \min\{b - a, \varepsilon\} > 0$ ve $y = a + \frac{d}{2}$ alalım. $d \leq b - a$ olduğundan $a < y \leq a + \frac{b-a}{2} < b$, yani $y \in (a, b)$; ayrıca $0 < |y - a| = \frac{d}{2} < \varepsilon$. Demek ki a 'nın her komşuluğu aralığın a 'dan farklı bir elemanını içerir: $a \in (a, b)'$. b için aynı akıl yürütme $y = b - \frac{d}{2}$ ile yapılır. Dikkat: a ve b yığılma noktasıdır ama **aralığın elemanı değildir**.

Adım 3: Aralığın dışındaki noktalar yığılma noktası değildir. $x > b$ olsun ve $\varepsilon = x - b > 0$ alalım. O zaman

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (b, 2x - b)$$

komşuluğunun her elemanı b 'den büyüktür, dolayısıyla (a, b) 'ye ait değildir: $B^*(x, \varepsilon) \cap (a, b) = \emptyset$ ve $x \notin (a, b)'$. $x < a$ durumunda $\varepsilon = a - x$ alınır; $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (2x - a, a)$ komşuluğunun her elemanı a 'dan küçüktür, yine aralıkla kesişmez. Üç adımı birleştirirsek $(a, b)' = [a, b]$.

■

Adım 1'deki fikir her açık kümede çalışır:

Önerme 17.2 (Açık Kümenin Her Noktası Yığılma Noktasıdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir açık kümeysse $A \subseteq A'$.

İspat.

$x \in A$ olsun. A açık olduğundan (Tanım 15.4) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Örnek 17.1 gereği $x, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ açık aralığının bir yığılma noktasıdır; bu aralık A 'nın alt kümesi olduğundan Önerme 17.1 ile $x \in A'$.

■

Örnek 17.2 (Kapalı Aralığın Yığılma Noktaları). $a < b$ için $[a, b]' = [a, b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$(a, b) \subseteq [a, b]$ olduğundan Önerme 17.1 ve Örnek 17.1 ile

$$[a, b] = (a, b)' \subseteq [a, b]'.$$

Ters kapsama için $x \notin [a, b]$ olsun; $x > b$ ya da $x < a$. $x > b$ ise $\varepsilon = x - b$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (b, 2x - b)$ aralığı $[a, b]$ ile kesişmez (her elemanı b 'den büyüktür); $x < a$ durumu benzerdir. Dolayısıyla $x \notin [a, b]'$. Sonuç: $[a, b]' = [a, b]$.

■

Örnek 17.3 (Tam Sayıların Yığılma Noktası Yoktur). $\mathbb{Z}' = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a \in \mathbb{R}$ keyfi olsun; iki durum vardır.

Durum 1: $a \in \mathbb{Z}$. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alalım. $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ aralığındaki bir m tam sayısı $|m - a| < \frac{1}{2} < 1$ sağlar; iki farklı tam sayının farkı en az 1 olduğundan $m = a$. (Gerçekten $m \neq a$ olsaydı $m - a$ ile $-(m - a)$ sıfırdan farklı birer tam sayı olurdu (Önerme 11.1), dolayısıyla $|m - a|$ pozitif bir tam sayı olurdu; Lemma 11.1 (1) gereği ise pozitif her tam sayı 1'den küçük değildir.) Yani bu komşuluk a dışında tam sayı içermez: $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} = \{a\}$ ve $a \notin \mathbb{Z}'$.

Durum 2: $a \notin \mathbb{Z}$. Teorem 12.3 gereği $p \leq a < p + 1$ olan bir $p \in \mathbb{Z}$ vardır; $a \notin \mathbb{Z}$ olduğundan aslında $p < a < p + 1$. $\varepsilon = \min\{a - p, p + 1 - a\} > 0$ alalım. O zaman $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq (p, p + 1)$ ve $(p, p + 1)$ açık aralığında hiç tam sayı yoktur (Lemma 11.1; önceki bölümde Örnek 16.3 içinde de kullanmıştık: $p < m < p + 1$ olan bir m tam sayısı olsaydı $m - p$, 0 ile 1 arasında bir tam sayı olurdu). Dolayısıyla bu komşuluk $\mathbb{Z}$ ile kesişmez ve $a \notin \mathbb{Z}'$.

Her iki durumda da $a \notin \mathbb{Z}'$; a keyfi olduğundan $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

■

Bu örnek, sonsuz bir kümenin de yığılma noktasının olmayabileceğini gösterir; Sonuç 17.1 sonucunun karşıtı doğrudur.

Örnek 17.4 (Bir Bölün Kümesinin Yığılma Noktaları). $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $A' = \{0\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

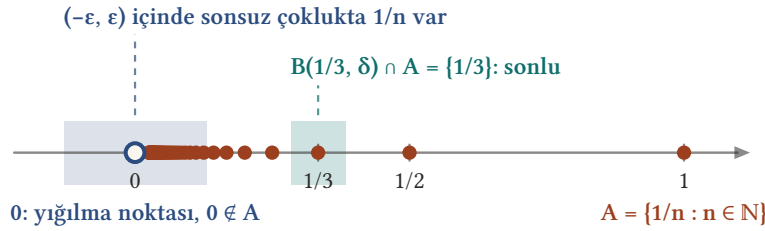
Adım 1: 0 bir yığılma noktasıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Arşimet özelliği (Sonuç 12.2) gereği $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq N$ için

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

olduğundan $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ve $\frac{1}{n} \neq 0$. Yani 0'ın her komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta (özellikle en az bir) elemanını içerir: $0 \in A'$.

Adım 2: Başka yığılma noktası yoktur. $x \neq 0$ olsun.

- $x < 0$ ise $\varepsilon = -x > 0$ alalım; $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (2x, 0)$ aralığının her elemanı negatiftir, oysa A 'nın bütün elemanları pozitifdir. Komşuluk A ile kesişmez, $x \notin A'$.
- $x > 0$ ise $\varepsilon = \frac{x}{2}$ alalım. $\frac{1}{n} \in (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$ olması için en azından $\frac{1}{n} > \frac{x}{2}$, yani $n < \frac{2}{x}$ olmalıdır. Bu eşitsizliği sağlayan yalnızca **sonlu** tane doğal sayı vardır. Dolayısıyla x 'in bu komşuluğu A 'nın en çok sonlu tane elemanını içerir ve Teorem 17.1 gereği $x \notin A'$.



Şekil 17.1: $A = \{1/n\}$ kümesinin noktaları 0'a yığılır: 0'ın her $(-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğu, ne kadar dar olursa olsun, sonsuz çoklukta $1/n$ içerir; bu yüzden 0 kümeye ait olmasa da yığılma noktasıdır. $1/3$ gibi bir noktanın yeterince küçük komşuluğu ise kümeden yalnızca kendisini içerir; kümenin hiçbir noktası yığılma noktası değildir.

Sonuç olarak $A' = \{0\}$. Özellikle A 'nın kendi elemanlarından hiçbirisi $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ yığılma noktası değildir; tek yığılma noktası olan 0 ise kümeye ait değildir.

■

17.2 Mükemmel Kümeler ve İzole Noktalar

$A' = A$ eşitliğinin sağlandığı kümeler özel bir ad alır. Bu eşitlik iki şey söyler: $A' \subseteq A$, yani küme bütün yığılma noktalarını içerir; $A \subseteq A'$, yani kümenin “tek başına duran”, etrafında kümeden başka eleman bulunmayan hiçbir noktası yoktur.

Tanım 17.2 (Mükemmel Küme). $A \subseteq \mathbb{R}$ için $A' = A$ ise A 'ya **mükemmel küme** (perfect set) denir.

Örnek 17.2 gereği her $[a, b]$ kapalı aralığı mükemmeldir. $\mathbb{R}$ de mükemmeldir: $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}$ apaçık, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}'$ ise **Önerme 17.2'** dan gelir. Buna karşılık (a, b) mükemmel değildir, çünkü $(a, b)' = [a, b] \neq (a, b)$; $\mathbb{Z}$ ve $\{1/n\}$ de mükemmel değildir, çünkü $\mathbb{Z}' = \emptyset$ ve $\{1/n\}' = \{0\}$.

Bir kümenin yığılma noktası olmayan elemanları, kümenin “tek başına duran” noktalarıdır.

Tanım 17.3 (İzole Nokta). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. $a \notin A'$ ise a 'ya A 'nın bir **izole noktası** (isolated point; ayrık nokta) denir.

Önerme 17.3 (İzole Nokta Ölçütü). $a \in A$ olsun. a 'nın A 'nın izole noktası olması için gerek ve yeter koşul,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ bulunmasıdır. Sözle: a , kendi bir komşuluğunda A 'nın tek elemanıdır.

İspat.

$a \notin A'$ olması, olumsuzlama gereği, $B^*(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ olan bir $\varepsilon > 0$ bulunmasına denktir. $a \in A$ olduğundan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = (B^*(a, \varepsilon) \cap A) \cup \{a\}$ yazılabilir; dolayısıyla $B^*(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ile $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \{a\}$ aynı şeydir.

■

Örnek 17.5 (Bir Aralık ve Bir Tek Nokta). $A = (0, 2) \cup \{3\}$ olsun. A' kümesini ve A' 'nin izole noktalarını bulunuz.

Çözüm.

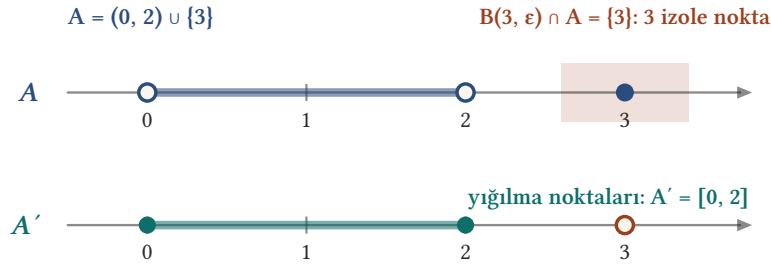
$[0, 2] \subseteq A'$: $(0, 2) \subseteq A$ olduğundan **Önerme 17.1** ve **Örnek 17.1** ile $[0, 2] = (0, 2)' \subseteq A'$.

3 izole noktadır: $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}) \cap A = \{3\}$, çünkü bu aralık $(0, 2)$ ile kesişmez. **Önerme 17.3** gereği 3 izole noktadır; özellikle $3 \notin A'$.

Başka yığılma noktası yoktur: $x \notin [0, 2]$ ve $x \neq 3$ olsun.

- $x < 0$: $\varepsilon = -x$ için $(2x, 0)$ komşuluğunun elemanları negatiftir, A ile kesişmez.
- $2 < x < 3$: $\varepsilon = \min\{x - 2, 3 - x\}$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (2, 3)$ ve $(2, 3) \cap A = \emptyset$.
- $x > 3$: $\varepsilon = x - 3$ için $(3, 2x - 3)$ komşuluğunun elemanları 3'ten büyüktür, A ile kesişmez.

Her durumda $x \notin A'$. Sonuç: $A' = [0, 2]$ ve A' 'nin tek izole noktası 3'tür.



Şekil 17.2: Üstte $A = (0, 2) \cup \{3\}$: 3 noktasının kümeyle kesişimi yalnızca kendisi olan bir komşuluğu vardır, yani 3 izole noktadır. Altta yığılma noktaları kümesi $A' = [0, 2]$: 0 ve 2 kümeye ait olmadığı hâlde yığılma noktasıdır, 3 ise kümeye ait olduğu hâlde değildir.

Dikkat edelim: $3 \in A$ ama $3 \notin A'$; $0, 2 \in A'$ ama $0, 2 \notin A$. Yani A ne $A' \subseteq A$ ne de $A' \subseteq A$ sağlar.

■

Örnek 17.6 (Doğal Sayıların Her Noktası İzole Dir). $\mathbb{N}$ 'nin her elemanının izole nokta olduğunu ve $\mathbb{N}' = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olsun. $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ aralığındaki bir m doğal sayısı $|m - a| < 1$ sağlar; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ olduğundan **Örnek 17.3**'daki gerekçe aynen geçerlidir (iki farklı tam sayının farkı en az 1'dir), dolayısıyla $m = a$. Yani $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{a\}$ ve **Önerme 17.3** gereği a izole noktadır.

$\mathbb{N}' = \emptyset$ için: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ olduğundan **Önerme 17.1** ile $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{Z}' = \emptyset$ (**Örnek 17.3**).

■

i Bir kümenin her noktası ya yığılma noktasıdır ya izole noktadır

$a \in A$ olsun. Ya $a \in A'$ 'dir ya da değildir; ikinci durumda tanım gereği a izole noktadır. Yani A 'nın elemanları iki ayrık sınıfa ayrılır: $A \cap A'$ (kümeyle ait yığılma noktaları) ve $A \setminus A'$ (izole noktalar). Örneğin $(0, 2) \cup \{3\}$ kümesinde $(0, 2)$ 'nin noktaları birinci, 3 ikinci sınıftadır; $\mathbb{N}$ 'de her nokta izoledir; $[a, b]$ 'de hiçbir nokta izole değildir.

17.3 Değme Noktaları ve Kapanış

Yığılma noktası tanımında “ a 'dan farklı” şartını kaldırırsak daha gevşek bir kavram elde ederiz: a 'nın her komşuluğu A ile kesişsin, kesişimde a 'nın kendisinin bulunması da sayılsın. Böyle noktalar kümeye “değer”: kümeye ya aittirler ya da kümenin elemanlarıyla istenildiği kadar yaklaşılabilir.

Tanım 17.4 (Değme Noktası). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a 'nın her komşuluğu A 'nın en az bir elemanını içeriyorsa, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$B(a, \varepsilon) \cap A = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

ise a 'ya A 'nın bir **değme noktası** (closure point, adherent point; kapanış noktası) denir.

Önerme 17.4 (Değme Noktalarının Temel Özellikleri). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A 'nın her elemanı A 'nın değme noktasıdır.
2. A 'nın her yığılma noktası A 'nın değme noktasıdır.
3. a , A 'nın değme noktasıysa ve $a \notin A$ ise $a \in A'$.

İspat.

(1) $a \in A$ ise her $\varepsilon > 0$ için $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$; kesişim boş değildir.

(2) $a \in A'$ ise her $\varepsilon > 0$ için $B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$; $B^*(a, \varepsilon) \subseteq B(a, \varepsilon)$ olduğundan $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\varepsilon > 0$ verilsin. a değme noktası olduğundan bir $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$ vardır. $a \notin A$ ve $x \in A$ olduğundan $x \neq a$; yani $0 < |x - a| < \varepsilon$. Dolayısıyla $B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve $a \in A'$.

■

Bir kümeye, ona “değer” bütün noktaları eklersek kümeyi dışarıya karşı kapatmış oluruz; ortaya çıkan kümeye kapanış diyoruz.

Tanım 17.5 (Kapanış). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A 'nın bütün değme noktalarının kümesine A 'nın **kapanışı** (closure) denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Bu gösterimle

$$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Olumsuzlaması: $a \notin \bar{A}$ olması için gerek ve yeter koşul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A = \emptyset$ olan bir $\varepsilon > 0$ bulunmasıdır; yani a 'nın A 'dan tamamen uzak duran bir komşuluğu vardır.

Teorem 17.2 (Kapanış, Küme ile Yığılma Noktalarının Birleşimidir). Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

İspat.

($\subseteq$) $x \in \bar{A}$ olsun. $x \in A$ ise $x \in A \cup A'$ ve iş biter. $x \notin A$ ise, x değme noktası olduğundan **Önerme 17.4** (3) gereği $x \in A'$; yine $x \in A \cup A'$.

($\supseteq$) $x \in A \cup A'$ olsun. $x \in A$ ise **Önerme 17.4** (1), $x \in A'$ ise **Önerme 17.4** (2) gereği x bir değme noktasıdır; yani $x \in \bar{A}$.

■

Bu teorem sayesinde bir kümenin kapanışını bulmak için yığılma noktalarını bulmak yeter: $\bar{A}$, A 'ya eksik yığılma noktalarını ekleyerek elde edilir. Şimdi kapanış ile kapalılık (Tanım 16.1) arasındaki ilişkiyi kuruyoruz.

Teorem 17.3 (Kapalı Kümeler ve Kapanış). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A kapalıdır ancak ve ancak $A = \bar{A}$.
2. $\bar{A}$ daima kapalı bir kümedir.

İspat.

(1), $\Rightarrow$ yönü: A kapalı olsun; yani $\mathbb{R} \setminus A$ açıktır. $A \subseteq \bar{A}$ kapsaması Önerme 17.4 (1)'den gelir; $\bar{A} \subseteq A$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ olsun ve olmayana ergi ile $x \notin A$ varsayalım. O zaman $x \in \mathbb{R} \setminus A$ ve bu küme açık olduğundan $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = \emptyset$ demektir; oysa $x \in \bar{A}$ olduğundan bu kesişim boş olamaz. Çelişki; demek ki $x \in A$.

(1), $\Leftarrow$ yönü: $A = \bar{A}$ olsun. $\mathbb{R} \setminus A$ 'nin açık olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R} \setminus A$ olsun. $A = \bar{A}$ olduğundan $x \notin \bar{A}$; kapanış tanımının olumsuzlaması gereği $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = \emptyset$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır, yani $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. x keyfi olduğundan $\mathbb{R} \setminus A$ açıktır ve A kapalıdır.

(2): (1) gereği $\bar{A} = A$ olduğunu göstermek yeter. $\bar{A} \subseteq \bar{A}$ kapsaması Önerme 17.4 (1)'den gelir. Tersine $x \in \bar{A}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $x, \bar{A}$ 'nin değme noktası olduğundan $|y - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir $y \in \bar{A}$ vardır. y de A 'nin değme noktası olduğundan $|z - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir $z \in A$ vardır. Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

yani $z \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$. ε keyfi olduğundan $x \in \bar{A}$. Böylece $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ve $\bar{A}$ kapalıdır.

■

Teorem, kapalı kümelerin Tanım 16.1 ile verilen “tümleyeni açık” tanımını çok daha kullanışlı bir ölçüte çevirir:

Sonuç 17.2 (Kapalı Küme Bütün Yığılma Noktalarını İçerir). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A kapalıdır ancak ve ancak $A' \subseteq A$; yani A bütün yığılma noktalarını içerir.
2. Özel olarak $A' = \emptyset$ ise A kapalıdır.

İspat.

(1) Teorem 17.3 (1) ve Teorem 17.2 ile: A kapalı $\Leftrightarrow A = \bar{A} = A \cup A'$. Öte yandan $A \cup A' = A$ eşitliği tam olarak $A' \subseteq A$ demektir (birleşim A 'yı büyütüyorsa A' 'nin her elemanı zaten A 'dadır; tersine $A' \subseteq A$ ise $A \cup A' = A$).

(2) $A' = \emptyset$ ise $A' \subseteq A$ apaçık sağlanır; (1) gereği A kapalıdır.

■

Bu sonuçla önceki bölümdeki bazı kapalılık ispatları tek satıra iner: $\mathbb{Z}' = \emptyset$ ve $\mathbb{N}' = \emptyset$ olduğundan $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kapalıdır; sonlu kümeler kapalıdır (Sonuç 17.1); $[a, b]' = [a, b]$ olduğundan $[a, b]$ kapalıdır. Tersine, (a, b) kapalı değildir, çünkü yığılma noktası a 'yı içermez.

Önerme 17.5 (Kapanışın Temel Özellikleri). $A, B \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. $A \subseteq \bar{A}$.
2. $A \subseteq B$ ise $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.
3. F kapalı ve $A \subseteq F$ ise $\bar{A} \subseteq F$. Yani $\bar{A}$, A 'yı içeren en küçük kapalı kümedir.

İspat.

(1) Önerme 17.4 (1).

(2) $x \in \bar{A}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq B$ olduğundan $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$; dolayısıyla $x \in \bar{B}$.

(3) $A \subseteq F$ ise (2) ile $\bar{A} \subseteq \bar{F}$; F kapalı olduğundan Teorem 17.3 (1) gereği $\bar{F} = F$. Öyleyse $\bar{A} \subseteq F$. Ayrıca $\bar{A}$ kendisi kapalıdır (Teorem 17.3 (2)) ve A 'yı içerir; dolayısıyla A 'yı içeren kapalı kümelerin en küçüğüdür.

■

Örnek 17.7 (Bir Bölümün Kapanışını). $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin kapanışını bulunuz; A kapalı mıdır?

Çözüm.

Örnek 17.4 gereği $A' = \{0\}$. Teorem 17.2 ile

$$\overline{A} = A \cup A' = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

$0 \in A'$ ama $0 \notin A$ olduğundan $A' \not\subseteq A$; Sonuç 17.2 gereği A kapalı **değildir**. Kapanışı $\overline{A} = A \cup \{0\}$ ise kapalıdır (Teorem 17.3 (2)). Dikkat: bu küme sonsuz tane tek noktalı kapalı kümenin birleşimidir; önceki bölümdeki sonlu birleşim teoremi (Teorem 16.1 (3)) burada işe yaramaz. Orada kapalılığı, tümleyeni açık aralıkların birleşimi olarak yazarak epeyce uğraşla göstermiştik (Alıştırma 16.1 (b)); yığılma noktaları aynı sonucu tek satırda verir.

■

Örnek 17.8 (Açık Aralığın Kapanışı). $a < b$ için $\overline{(a, b)} = [a, b]$ olduğunu iki yolla gösteriniz.

Çözüm.

Birinci yol: Örnek 17.1 gereği $(a, b)' = [a, b]$; Teorem 17.2 ile

$$\overline{(a, b)} = (a, b) \cup [a, b] = [a, b].$$

İkinci yol: $[a, b]$ kapalıdır ve $(a, b) \subseteq [a, b]$; Önerme 17.5 (3) gereği $\overline{(a, b)} \subseteq [a, b]$. Öte yandan a ve b değme noktalarıdır: her $\varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığı $a + \min\{b - a, \varepsilon\}/2 \in \overline{(a, b)}$ noktasını içerir (benzer biçimde b için). (a, b) 'nin noktaları zaten kapanıştıdır. Böylece $[a, b] \subseteq \overline{(a, b)}$ ve eşitlik sağlanır.

■

17.4 Yoğun Kümeler

Bir kümenin kapanışı bütün sayı doğrusuysa, kümenin elemanları her yere “yeterince yakın” demektir; her reel sayıya kümeden istenildiği kadar yaklaşılabilir.

Tanım 17.6 (Yoğun Küme). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $\overline{A} = \mathbb{R}$ ise A 'ya $\mathbb{R}$ 'de **yoğun** (dense) küme denir.

Bölüm 13'te yoğunluğu sıralama diliyle tanımlamıştık (Tanım 13.3): iki reel sayı arasında kümeden bir eleman bulunması. İki tanımın aynı şeyi söylediğini görelim.

Önerme 17.6 (Yoğunluğun Denk Biçimleri). $A \subseteq \mathbb{R}$ için aşağıdakiler denktir:

1. $\overline{A} = \mathbb{R}$; yani A yoğundur.
2. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|x - y| < \varepsilon$ olan bir $y \in A$ vardır.
3. $a < b$ olan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < y < b$ olan bir $y \in A$ vardır; yani A , Tanım 13.3 anlamında yoğundur.

İspat.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): $\overline{A} = \mathbb{R}$ demek, her $x \in \mathbb{R}$ 'nin değme noktası olması demektir; bu da tanım gereği her $\varepsilon > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, yani $|x - y| < \varepsilon$ olan bir $y \in A$ bulunması demektir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $a < b$ verilsin. $x = \frac{a+b}{2}$ ve $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ alalım. (2) gereği $|x - y| < \varepsilon$ olan bir $y \in A$ vardır; bu $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$, yani $a < y < b$ demektir.

(3) $\Rightarrow$ (2): $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. (3)'ü $a = x - \varepsilon < b = x + \varepsilon$ için uygularsak $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$, yani $|x - y| < \varepsilon$ olan bir $y \in A$ buluruz.

■

Örnek 17.9 (Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar Yoğundur). $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Teorem 13.5 gereği $a < b$ olan her iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır; bu, **Önerme 17.6 (3)** koşuludur. Dolayısıyla $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Aynı biçimde **Teorem 13.6**, her (a, b) aralığında bir irrasyonel sayı verir; öyleyse $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Bu örnek önceki bölümdeki bir gözlemi de açıklar: $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$ olduğundan **Teorem 17.3** gereği $\mathbb{Q}$ kapalı değildir.

■

Sonuç 17.3 (Yoğun Kümenin Her Reel Sayı Yığılma Noktasıdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ yoğunsa $A' = \mathbb{R}$.

İspat.

$x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. **Önerme 17.6 (3)**'ü $a = x, b = x + \varepsilon$ için uygularsak $x < y < x + \varepsilon$ olan bir $y \in A$ buluruz. Bu y için $0 < |y - x| = y - x < \varepsilon$; yani $y \in B^*(x, \varepsilon) \cap A$. ε keyfi olduğundan $x \in A'$; x keyfi olduğundan $A' = \mathbb{R}$.

■

Özellikle $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ ve $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$. Karşı örnek olarak $\mathbb{Z}$ yoğun değildir: $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$. Benzer biçimde $[0, 1]$ de yoğun değildir, çünkü kapalıdır ve kendisine eşit olan kapanışı $\mathbb{R}$ değildir.

17.5 Supremum, İnfimum ve Yığılma Noktaları

Tamlık aksiyomunun (Bölüm 10.4) verdiği supremum, kümeye ait olmadığına nerede durur? Yanıt: kümenin tam "kıyısında", yani bir yığılma noktası olarak.

Teorem 17.4 (Kümeye Ait Olmayan Supremum Yığılma Noktasıdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun.

1. A üstten sınırlı ve $\sup A \notin A$ ise $\sup A \in A'$.
2. A alttan sınırlı ve $\inf A \notin A$ ise $\inf A \in A'$.

İspat.

(1) $s = \sup A$ ve $s \notin A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Supremumun ε -karakterizasyonu (**Teorem 10.1**) gereği $s - \varepsilon < a \leq s$ olan bir $a \in A$ vardır. $s \notin A$ ve $a \in A$ olduğundan $a \neq s$; dolayısıyla $s - \varepsilon < a < s$, yani $a \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ ve $a \neq s$. Böylece $B^*(s, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. ε keyfi olduğundan $s \in A'$.

(2) $t = \inf A$ ve $t \notin A$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. İnfimumun ε -karakterizasyonu (**Teorem 10.2**) gereği $t \leq a < t + \varepsilon$ olan bir $a \in A$ vardır. $t \notin A$ olduğundan $a \neq t$, yani $t < a < t + \varepsilon$; dolayısıyla $a \in B^*(t, \varepsilon) \cap A$. Öyleyse $t \in A'$.

■

Sonuç 17.4 (Supremum ve İnfimum Kapanıştıdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun. A üstten sınırlıysa $\sup A \in \overline{A}$; alttan sınırlıysa $\inf A \in \overline{A}$.

İspat.

$s = \sup A$ olsun. $s \in A$ ise $s \in \overline{A}$ (**Önerme 17.5 (1)**). $s \notin A$ ise **Teorem 17.4** gereği $s \in A' \subseteq \overline{A}$ (**Teorem 17.2**). İnfimum için aynı akıl yürütme geçerlidir.

■

Sonuç 17.5 (Kapalı ve Sınırlı Kümenin Maksimumu ve Minimumu Vardır). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir küme olsun. O zaman A 'nın en büyük elemanı (maksimumu) ve en küçük elemanı (minimumu) vardır: $\sup A = \max A \in A$ ve $\inf A = \min A \in A$.

İspat.

A boş değil ve üstten sınırlı olduğundan tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği $s = \sup A$ vardır. **Sonuç 17.4** ile $s \in \overline{A}$; A kapalı olduğundan **Teorem 17.3 (1)** ile $\overline{A} = A$, yani $s \in A$. A 'nın elemanı olan bir üst sınır tanım gereği maksimumdur (**Tanım 10.3**): $s = \max A$. İnfimum için: $t = \inf A \in \overline{A} = A$, dolayısıyla $t = \min A$.

Bu sonuç ileride çok iş görecektir: Weierstrass'ın ekstremum teoreminde sürekli bir fonksiyonun kapalı sınırlı aralıktaki görüntü kümesinin kapalı ve sınırlı olduğu gösterilip maksimum ve minimumun varlığı buradan çıkarılır. Hipotezlerin gerekliliğine dikkat: $(0, 1)$ sınırlı ama kapalı değil, maksimumu yok; $[0, \infty)$ kapalı ama sınırlı değil, maksimumu yok.

Örnek 17.10 (Bir Bölü 2n Kümesi). $A = \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\}$ olsun. $\sup A$, $\inf A$, A' ve $\overline{A}$ kümelerini bulunuz; A' 'nin maksimumu ve minimumu var mıdır?

Çözüm.

Sınırlar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$; dolayısıyla A alttan 0, üstten $\frac{1}{2}$ ile sınırlıdır. $\frac{1}{2} \in A$ ($n = 1$) ve üst sınır olduğundan $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$.

İnfimum. $\inf A = 0$ olduğunu gösterelim. 0 bir alt sınırdır. $\varepsilon > 0$ verilsin; **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{N} < 2\varepsilon$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır, yani $\frac{1}{2N} < \varepsilon$. Demek ki $0 + \varepsilon$ 'dan küçük bir eleman vardır ve **Teorem 10.2** gereği $\inf A = 0$. $0 \notin A$ olduğundan (elemanların hepsi pozitif) A 'nin minimumu **yoktur**.

Yığılma noktaları. $\inf A = 0 \notin A$ olduğundan **Teorem 17.4** (2) ile $0 \in A'$. Başka yığılma noktası olmadığı **Örnek 17.4**'daki gibi görülür: $x < 0$ ise $(2x, 0)$ komşuluğu A ile kesişmez; $x > 0$ ise $(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$ komşuluğunda $\frac{1}{2n} > \frac{x}{2}$, yani $n < \frac{1}{x}$ olan sonlu tane eleman vardır. Dolayısıyla $A' = \{0\}$.

Kapanış. **Teorem 17.2** ile

$$\overline{A} = A \cup \{0\} = \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

$0 \notin A$ olduğundan A kapalı değildir; $\overline{A}$ ise kapalı ve sınırlıdır, minimumu 0, maksimumu $\frac{1}{2}$ 'dir — tam **Sonuç 17.5**'in söylediği gibi.

17.6 Bolzano–Weierstrass Teoremi

Şimdiye kadar gördük ki sonlu kümelerin yığılma noktası yoktur; $\mathbb{Z}$ gibi sonsuz ama “dağınık” kümelerin de yoktur. Peki sonsuz bir küme sınırlı bir aralığa sıkıştırılırsa ne olur? Sonsuz çoklukta nokta sonlu uzunlukta bir aralığa konulunca bir yerde yığılmak zorundadır. Bu sezgiyi kesinleştiren teorem, analizin en önemli sonuçlarından biridir; ispatı, tamlığı taşıyan iç içe aralıklar teoremine (**Teorem 10.5**) dayanır.

Teorem 17.5 (Bolzano–Weierstrass Teoremi (Küme Sürümü)). $\mathbb{R}$ 'nin sonsuz ve sınırlı her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat.

$A \subseteq \mathbb{R}$ sonsuz ve sınırlı olsun. Sınırlı olduğundan (**Tanım 10.2**) A 'nin bir alt sınırı m ve bir üst sınırı m' vardır; $M = \max\{|m|, |m'|\} + 1$ dersek her $x \in A$ için $-M < m \leq x \leq m' < M$, yani $A \subseteq [-M, M]$ olur. $I_1 = [-M, M]$ diyelim; I_1 , A 'nin sonsuz çoklukta elemanını içerir (hepsini içerir).

İkiye bölme. I_1 'i orta noktasından iki kapalı aralığa bölelim: $[-M, 0]$ ve $[0, M]$. Bu iki parçadan en az biri A 'nin sonsuz çoklukta elemanını içerir; çünkü her ikisi de yalnızca sonlu tane eleman içerseydi, birleşimleri I_1 de yalnızca sonlu tane eleman içerirdi (iki sonlu kümenin birleşimi sonludur). Sonsuz çoklukta eleman içeren parçayı (ikisi de öyleyse soldakini) I_2 olarak seçelim. I_2 'yi de ikiye bölüp A 'nin sonsuz çoklukta elemanını içeren parçasını I_3 olarak seçelim ve böyle devam edelim. Tümevarımla kapalı aralıklardan oluşan bir

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

dizisi elde ederiz; her I_n , A 'nin sonsuz çoklukta elemanını içerir ve uzunluğu her adımda yarılandığından

$$|I_n| = \frac{2M}{2^{n-1}}.$$

Ortak nokta. İç içe aralıklar teoremi (**Teorem 10.5**) gereği bütün I_n 'lere ait bir c noktası vardır: $c \in \bigcap_n I_n$. c bir yığılma noktasıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \geq n$ 'dir: $n = 1$ için $2^0 = 1$, $n \geq 2$ için Bernoulli eşitsizliği (**Teorem 9.5**) ile $2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} \geq 1 + (n - 1) = n$. Dolayısıyla

$$|I_n| = \frac{2M}{2^{n-1}} \leq \frac{2M}{n}.$$

Arşimet özelliği (Sonuç 12.1) gereği $n > \frac{2M}{\varepsilon}$ olan bir n seçebiliriz; bu n için $|I_n| < \varepsilon$. $c \in I_n$ ve I_n 'nin uzunluğu ε 'dan küçük olduğundan I_n 'nin her x noktası $|x - c| \leq |I_n| < \varepsilon$ sağlar; yani

$$I_n \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

I_n , A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerdiğinden $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ de A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerir. Teorem 17.1 gereği $c \in A'$.

■

⚠ İki hipotez de gereklidir

“Sonsuz” şartı kaldırılamaz: sonlu kümelerin yığılma noktası yoktur (Sonuç 17.1). “Sınırlı” şartı da kaldırılamaz: $\mathbb{N}$ sonsuzdur ama $\mathbb{N}' = \emptyset$ (Örnek 17.6). Öte yandan teorem yığılma noktasının kümeye ait olduğunu söylemez: $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ sonsuz ve sınırlıdır, tek yığılma noktası olan 0 kümeye ait değildir. Yığılma noktası tek de olmak zorunda değildir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ kümesinin yığılma noktaları kümesi $[0, 1]$ 'dir (bkz. alıştırmalar).

i Tarihçe ve devamı

Teorem ilk kez 1817'de Bohemyalı matematikçi ve filozof Bernard Bolzano (1781–1848) tarafından ispatlandı; sonra Karl Weierstrass (1815–1897) tarafından yeniden keşfedilip Berlin'deki derslerinde analizin temel taşı hâline getirildi, bu yüzden her iki ismi taşır. Teoremin ispatındaki ikiye bölme yöntemi, bir sonraki bölümde Heine–Borel teoreminin ispatında da karşımıza çıkacaktır. Dizilerle çalışmaya başladığımızda teoremin dizi sürümünü (Teorem 24.5: her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır) ispatlayacak ve iki sürümün birbirine denk olduğunu göreceğiz: Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi.

17.7 Alıştırmalar

Alıştırma 17.1 (Yığılma Noktası ve Kapanış Alıştırmaları).

- $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi için A' ve $\overline{A}$ kümelerini bulunuz. A 'nın izole noktaları hangileridir?
- $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ için A' ve $\overline{A}$ kümelerini bulunuz. A açık mıdır, kapalı mıdır?
- Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için A' kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
- Her $A, B \subseteq \mathbb{R}$ için $(A \cup B)' = A' \cup B'$ ve $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olduğunu gösteriniz.
- $F \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir küme olsun. Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için $(A \setminus F)' = A'$ olduğunu gösteriniz. Yani bir kümeden sonlu tane nokta çıkarmak yığılma noktalarını değiştirmez.

Çözüm.

a) Çift $n = 2k$ için elemanlar $1 + \frac{1}{2k}$, tek $n = 2k - 1$ için $-1 + \frac{1}{2k-1}$ biçimindedir. $1 \in A'$: $\varepsilon > 0$ verilsin; Sonuç 12.2 ile $\frac{1}{2k} < \varepsilon$ olan k vardır (ve tüm daha büyük k 'lar için de sağlanır). Bu k 'lar için $0 < |(1 + \frac{1}{2k}) - 1| = \frac{1}{2k} < \varepsilon$; dolayısıyla 1'in her komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerir ve $1 \in A'$. Aynı biçimde $|(-1 + \frac{1}{2k-1}) - (-1)| = \frac{1}{2k-1} < \varepsilon$ ile $-1 \in A'$. Başka yığılma noktası yoktur: $x \notin \{-1, 1\}$ olsun ve $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|x - 1|, |x + 1|\} > 0$ alalım. $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğu $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ ve $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ komşuluklarıyla kesişmez. A 'nın $1 + \frac{1}{2k}$ biçimindeki elemanlarından yalnızca $\frac{1}{2k} \geq \varepsilon$, yani $k \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ olanlar (sonlu tane) $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ 'un dışındadır; benzer biçimde $-1 + \frac{1}{2k-1}$ biçimindekilerin de sonlu tanesi $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ 'un dışındadır. Dolayısıyla x 'in komşuluğu A 'nın en çok sonlu tane elemanını içerir ve Teorem 17.1 gereği $x \notin A'$. Sonuç: $A' = \{-1, 1\}$ ve $\overline{A} = A \cup \{-1, 1\}$. 1 ve -1 kümeye ait değildir ($1 + \frac{1}{2k} \neq 1$, $-1 + \frac{1}{2k-1} \neq -1$); dolayısıyla $A \cap A' = \emptyset$ ve A 'nın her elemanı izole noktadır.

b) $A' = [0, 1]: x \in [0, 1]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $x < 1$ ise $(x, x + \varepsilon) \cap (0, 1) = (x, \min\{x + \varepsilon, 1\})$ boş olmayan bir açık aralıktır ve Teorem 13.5 gereği bir q rasyonel sayısı içerir; bu q için $q \in A$ ve $0 < |q - x| < \varepsilon$. $x = 1$ ise $(1 - \varepsilon, 1) \cap (0, 1) = (\max\{1 - \varepsilon, 0\}, 1)$ boş olmayan açık aralığında bir rasyonel q seçilir; yine $q \in A$ ve $0 < |q - 1| < \varepsilon$. Böylece $[0, 1] \subseteq A'$. Tersine $x \notin [0, 1]$ ise Örnek 17.2'deki gibi x 'in $[0, 1]$ ile (dolayısıyla A ile) kesişmeyen bir komşuluğu vardır; $x \notin A'$. Öyleyse $A' = [0, 1]$ ve $\bar{A} = A \cup [0, 1] = [0, 1]$.

Açık değildir: $q \in A$ için her $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ komşuluğu Teorem 13.6 gereği bir irrasyonel sayı içerir; bu sayı A 'ya ait değildir, dolayısıyla hiçbir komşuluk A 'nın içinde kalmaz. *Kapalı değildir:* $0 \in A'$ ama $0 \notin A$; Sonuç 17.2.

c) Sonuç 17.2 gereği $(A')' \subseteq A'$ olduğunu göstermek yeter. $x \in (A')'$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $0 < |y - x| < \varepsilon$ olan bir $y \in A'$ vardır. Şimdi

$$\delta = \min\{|y - x|, \varepsilon - |y - x|\} > 0$$

alalım. $y \in A'$ olduğundan $0 < |z - y| < \delta$ olan bir $z \in A$ vardır. Üçgen eşitsizliğiyle

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < \delta + |y - x| \leq \varepsilon,$$

ve ters üçgen eşitsizliğiyle (Sonuç 8.3)

$$|z - x| \geq |y - x| - |z - y| > |y - x| - \delta \geq 0,$$

yani $z \neq x$. Böylece $z \in B^*(x, \varepsilon) \cap A$; ε keyfi olduğundan $x \in A'$. Demek ki $(A')' \subseteq A'$ ve A' kapalıdır.

d) $(A \cup B)' \supseteq A' \cup B'$: $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan Önerme 17.1 ile $A' \subseteq (A \cup B)'$ ve $B' \subseteq (A \cup B)'$.

$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$: Karşıt tersini gösterelim: $x \notin A' \cup B'$ olsun. $x \notin A'$ olduğundan $B^*(x, \varepsilon_1) \cap A = \emptyset$ olan $\varepsilon_1 > 0$, $x \notin B'$ olduğundan $B^*(x, \varepsilon_2) \cap B = \emptyset$ olan $\varepsilon_2 > 0$ vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ için $B^*(x, \varepsilon)$ hem $B^*(x, \varepsilon_1)$ 'in hem $B^*(x, \varepsilon_2)$ 'nin alt kümesidir; dolayısıyla

$$B^*(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) = (B^*(x, \varepsilon) \cap A) \cup (B^*(x, \varepsilon) \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,$$

yani $x \notin (A \cup B)'$.

Kapanış: Teorem 17.2 ve ilk kısım ile

$$\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

e) $A \setminus F \subseteq A$ olduğundan Önerme 17.1 ile $(A \setminus F)' \subseteq A'$. Tersine $x \in A'$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 17.1 gereği $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerir. Bunlardan F 'ye ait olanlar (en çok sonlu tane) ve x 'in kendisi çıkarıldığında geriye yine sonsuz çoklukta eleman kalır; bunlar $A \setminus F$ 'ye aittir ve x 'ten farklıdır. Dolayısıyla $B^*(x, \varepsilon) \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ ve $x \in (A \setminus F)'$. Böylece $(A \setminus F)' = A'$.

■

Yığılma noktaları bize kapalı kümelerin gerçek doğasını gösterdi: kapalı küme, kendi yığılma noktalarından hiçbirini dışarıda bırakmayan kümedir. Bolzano–Weierstrass teoremi ise “kapalı ve sınırlı” ikilisinin ne kadar güçlü olduğuna ilk işaretidir. Bir sonraki bölümde bu ikiliyi bambaşka bir kavramla, açık örtülerle tanımlanan kompaktlıkla eşleyen Heine–Borel teoremini ispatlayacağız: **Kompaktlık ve Heine–Borel Teoremi**.

18. Kompaktlık ve Heine–Borel Teoremi

Sonlu kümelerle çalışmak kolaydır: sonlu bir kümenin en büyük elemanı vardır, sonlu tane pozitif sayının en küçüğü yine pozitifdir. Sonsuz kümelerde bu kolaylıklar kaybolur; $(0, 1)$ aralığının en büyük elemanı yoktur, $\{1/n\}$ kümesinin pozitif elemanlarının en küçüğü de yoktur. Bu bölümde, sonsuz olmasına rağmen “sonlu gibi yönetilebilen” kümeleri tanıyacağız: **kompakt kümeler**. Tanım, kümeyi açık kümelerle örtme fikrine dayanır ve ilk bakışta soyut görünür; ama Heine–Borel teoremi bu soyut tanımın $\mathbb{R}$ ’de son derece somut bir karşılığı olduğunu gösterir: kompakt kümeler tam olarak **kapalı ve sınırlı** kümelerdir. Bu bölümde şunları öğreneceğiz: açık örtü, sonlu alt örtü ve kompakt küme tanımları; kompakt kümelerin sınırlı ve kapalı olduğu; kompakt kümenin kapalı alt kümelerinin ve kompakt kümelerin sonlu birleşimlerinin kompakt olduğu; Heine–Borel teoreminin, önceki bölümün ikiye bölme yöntemiyle tam ispatı.

18.1 Açık Örtüler

Bir kümeyi “örtmek”, onu tamamen içine alan başka kümeler bulmak demektir; tıpkı bir masayı birkaç örtüyle kaplamak gibi. Örtüler açık kümelerden oluştuğunda ve kümeyi sonlu tane örtü parçasıyla kaplamak mümkün olduğunda ilginç şeyler olur. İndisli aileler için [Tanım 3.8](#) gösterimini kullanıyoruz.

Tanım 18.1 (Açık Örtü ve Sonlu Alt Örtü). $A \subseteq \mathbb{R}$ bir küme ve $\{U_i\}_{i \in I}$ açık kümelerden oluşan bir aile olsun. A bu ailenin birleşimi içinde kalıyorsa, yani

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

ise $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesine A ’nın bir **açık örtüsü** (open cover) denir.

Aileden seçilen sonlu tane küme, diyelim $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$, hâlâ A ’yı örtüyorsa, yani

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

ise bu sonlu aileye A ’nın (verilen örtüden seçilmiş) bir **sonlu alt örtüsü** (finite subcover) denir.

i Örtü parçaları kümenin içinde kalmak zorunda değildir

Örtüdeki U_i kümelerinin A ’nın alt kümesi olması gerekmez; önemli olan birleşimlerinin A ’yı **içermesidir**. Ayrıca sonlu alt örtü, yeni kümeler icat ederek değil, verilen ailenin içinden seçim yaparak oluşturulur. Bir kümenin pek çok farklı açık örtüsü vardır; en basiti tek elemanlı $\{\mathbb{R}\}$ ailesidir.

Örnek 18.1 (Sonlu Alt Örtüsü Olmayan Bir Örtü). $A = (0, 1)$ olsun. $n \geq 2$ için $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$ alalım. $\{U_n\}_{n \geq 2}$ ailesinin A ’nın bir açık örtüsü olduğunu, ama bu örtünün sonlu alt örtüsünün bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Açık örtüdür. Her U_n bir açık aralıktır, dolayısıyla açıktır ([Önerme 15.2](#)). Birleşimin $(0, 1)$ ’i örttüğünü görelim: $x \in (0, 1)$ olsun. Arşimet özelliği ([Sonuç 12.2](#)) gereği $\frac{1}{n} < x$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır; $x < 1$ olduğundan bu n için $\frac{1}{n} < 1$, yani $n \geq 2$. Böylece $x \in (\frac{1}{n}, 1) = U_n$. Öyleyse

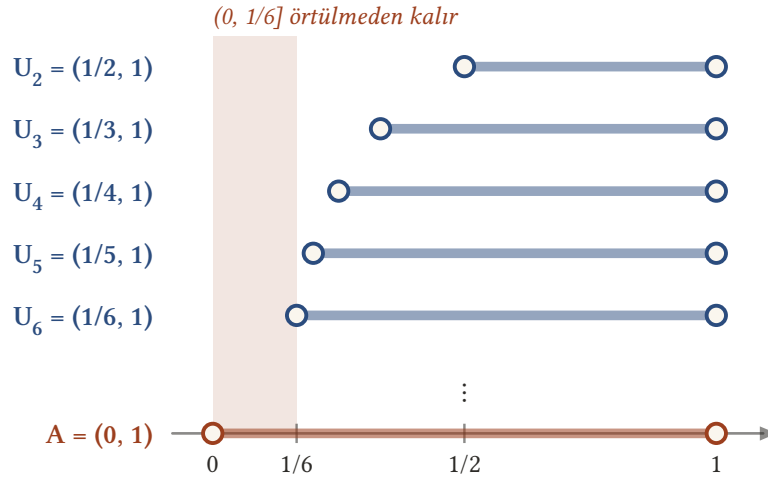
$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n \geq 2} U_n.$$

(Aslında her $U_n \subseteq (0, 1)$ olduğundan birleşim tam olarak $(0, 1)$ ’e eşittir.)

Sonlu alt örtüsü yoktur. Aileden sonlu tane küme seçelim: $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_k}$. $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ olsun. $n \leq N$ için $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{n}$ olduğundan $U_n \subseteq U_N$; yani aralıklar iç içedir ve seçilenlerin birleşimi

$$U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = U_N = \left(\frac{1}{N}, 1\right)$$

olur. Ama $\frac{1}{N+1} \in (0, 1)$ noktası bu birleşimde değildir, çünkü $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N}$. Demek ki hangi sonlu alt aileyi seçersek seçelim $(0, 1/N]$ parçası açıkta kalır; sonlu alt örtü yoktur.



Şekil 18.1: $U_n = (1/n, 1)$ aralıkları $A = (0, 1)$ 'in bir açık örtüsüdür: her $x \in (0, 1)$ yeterince büyük n için U_n 'ye düşer. Ama sonlu tanesi, örneğin $U_2, \dots, U_6$, yalnızca $(1/6, 1)$ 'i örter; 0'a yakın $(0, 1/6]$ parçası hep açıkta kalır. $(0, 1)$ kompakt değildir.

Açıkta kalan kısım hep 0'a yakındır: 0 aralığın kümeye ait olmayan yığılma noktasıdır ve örtü parçaları ona ancak “sonsuz adımda” ulaşabilmektedir.

■

Örnek 18.2 (Kapalı Aralık İçin Bir Örtü). $[0, 1]$ kapalı aralığını ele alalım ve

$$\mathcal{V} = \left\{ \left(-1, \frac{1}{5}\right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 2\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ailesini düşünelim. $\mathcal{V}$ 'nin $[0, 1]$ 'in bir açık örtüsü olduğunu gösteriniz ve bir sonlu alt örtü bulunuz.

Çözüm.

Ailenin her elemanı açık aralıktır, dolayısıyla açıktır. $0 \in (-1, \frac{1}{5})$ 'tir. $x \in (0, 1]$ ise **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n} < x$ olan bir n vardır ve $x \leq 1 < 2$ olduğundan $x \in (\frac{1}{n}, 2)$. Böylece $\mathcal{V}$ bir açık örtüdür. Sonlu alt örtü için iki küme yeter: $(-1, \frac{1}{5})$ ve $(\frac{1}{6}, 2)$. Gerçekten $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ olduğundan

$$\left(-1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, 2\right) = (-1, 2) \supseteq [0, 1].$$

■

Bu iki örneğin farkına dikkat edelim. $(0, 1)$ için sonlu alt örtüsü olmayan bir örtü bulduk; $[0, 1]$ için ise seçtiğimiz örtünün sonlu alt örtüsü vardı. Ama $[0, 1]$ 'in **her** açık örtüsünün sonlu alt örtüsü var mıdır? Bu sorunun yanıtı bu bölümün ana teoremidir. Önce kavrama ad verelim.

Tanım 18.2 (Kompakt Küme). $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. K 'nin **her** açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa K 'ye **kompakt küme** (compact set) denir.

 Kompaktlığı göstermek ile çürütmek arasındaki asimetri

Bir kümenin kompakt **olmadığını** göstermek için sonlu alt örtüsü bulunmayan **tek bir** açık örtü bulmak yeter; **Örnek 18.1** tam olarak bunu yapar ve $(0, 1)$ 'in kompakt olmadığını kanıtlar. Kompakt **olduğunu** göstermek içinse verilebilecek **bütün** açık örtülerle başa çıkmak gerekir; **Örnek 18.2** bu yüzden $[0, 1]$ 'in kompakt olduğunu kanıtlamaz, yalnızca tek bir örtüyü inceler. Kompaktlık tanımının gücü de tam buradadır: sonsuz bir kümeyi sonlu tane “parça” ile yönetmemize izin verir.

Önerme 18.1 (Sonlu Kümeler Kompakttır). $\mathbb{R}$ 'nin her sonlu alt kümesi (boş küme dâhil) kompakttır.

İspat.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ve $\{U_i\}_{i \in I}$, A 'nın herhangi bir açık örtüsü olsun. Her a_j birleşimin elemanı olduğundan $a_j \in U_{i_j}$ olan bir $i_j \in I$ vardır. O zaman $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ sonlu ailesi A 'yı örter: $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Boş küme için örtülecek nokta yoktur: örtüde en az bir küme varsa herhangi birini seçmek yeter; örtü ailesinin kendisi boşsa ($I = \emptyset$) hiç küme seçmeyen boş alt aile de işi görür, çünkü boş ailenin birleşimi $\emptyset$ 'dir ve $\emptyset \subseteq \emptyset$ 'dir.

■

Örnek 18.3 (Kompakt Olmayan Kümeler). $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

$\mathbb{R}$: $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = (-n, n)$ alalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için **Sonuç 12.1** gereği $n > |x|$ olan bir n vardır ve $x \in (-n, n)$; dolayısıyla $\{U_n\}$ bir açık örtüdür. Sonlu tane $U_{n_1}, \dots, U_{n_k}$ seçilirse, $N = \max n_j$ için aralıklar iç içe olduğundan birleşim $(-N, N)$ 'dir ve N sayısı örtülmez. Sonlu alt örtü yoktur.

$\mathbb{N}$: $n \in \mathbb{N}$ için $V_n = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ alalım. Her $n \in V_n$ olduğundan $\{V_n\}$ bir açık örtüdür; ama V_n aralığı n 'den başka doğal sayı içermez (iki farklı doğal sayının farkı en az 1'dir). Sonlu tane $V_{n_1}, \dots, V_{n_k}$ seçilirse, indisler arasında olmayan bir doğal sayı (örneğin $\max n_j + 1$) örtülmez. Sonlu alt örtü yoktur.

■

Kompaktlığı doğrudan tanımdan göstermenin nasıl bir şey olduğunu da görelim.

Örnek 18.4 (Bir Bölü n Kümesi Sıfırla Birlikte Kompakttır). $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin kompakt olduğunu tanımdan yola çıkarak gösteriniz.

Çözüm.

$\{U_i\}_{i \in I}$, K 'nin herhangi bir açık örtüsü olsun. $0 \in K$ olduğundan $0 \in U_{i_0}$ olan bir $i_0 \in I$ vardır. U_{i_0} açık olduğundan $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim. Her $n \geq N$ için $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, yani

$$\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_{i_0} \quad (n \geq N).$$

Demek ki tek bir U_{i_0} kümesi, 0 'ı ve $\frac{1}{n}$ 'lerin “sonsuz kuyruğunu” birden örter. Geriye yalnızca sonlu tane nokta kalır: $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{N-1}$. Her biri örtünün bir elemanıdır; $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$ diyelim ($1 \leq n \leq N-1$). O zaman

$$U_{i_0}, U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_{N-1}}$$

ailesi K 'yi örten sonlu bir alt örtüdür. Örtü keyfi olduğundan K kompakttır.

■

İspattaki kilit nokta, 0 'ın kümeye ait olmasıydı: 0 'ı örten açık küme, ona yığılan bütün noktaları da yutar. 0 kümeden çıkarılırsa bu avantaj kaybolur; $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin kompakt olmadığını alıştırılarda göreceğiz.

18.2 Kompakt Kümelerin Özellikleri

Kompaktlığın somut sonuçlarına geçiyoruz. İlk iki teorem, kompakt kümelerin sınırlı ve kapalı olmak zorunda olduğunu söyler.

Teorem 18.1 (Kompakt Kümeler Sınırlıdır). $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktsa K sınırlıdır.

İspat.

$n \in \mathbb{N}$ için $U_n = (-n, n)$ açık aralıklarını alalım. [Örnek 18.3](#)'de gördüğümüz gibi $\bigcup_n U_n = \mathbb{R}$; dolayısıyla $K \subseteq \bigcup_n U_n$ ve $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, K 'nin bir açık örtüsüdür. K kompakt olduğundan bu örtünün bir sonlu alt örtüsü vardır: $K \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k}$. $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ olsun. $n \leq N$ için $(-n, n) \subseteq (-N, N)$ olduğundan

$$K \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} \subseteq (-N, N).$$

Yani her $x \in K$ için $-N < x < N$: N bir üst sınır, $-N$ bir alt sınırdır ve K sınırlıdır ([Tanım 10.2](#)).

Bir uzlaşım: [Tanım 10.2](#) boş olmayan kümeler için yazılmıştı. $K = \emptyset$ hâlinde “her $x \in K$ için $-N < x < N$ ” koşulu boşlukla doğru olduğundan (her reel sayı boş kümenin hem alt hem üst sınırındır), bundan böyle **boş kümeyi de sınırlı sayıyoruz**. Bu uzlaşım sayesinde yukarıdaki teorem ve [Teorem 18.5](#), $K = \emptyset$ için de olduğu gibi geçerlidir.

■

Teorem 18.2 (Kompakt Kümeler Kapalıdır). $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktsa K kapalıdır.

İspat.

$K = \emptyset$ ise K kapalıdır (tümleyeni $\mathbb{R}$ açıktır); $K \neq \emptyset$ olsun. $\mathbb{R} \setminus K$ 'nin açık olduğunu göstereceğiz. $a \in \mathbb{R} \setminus K$ keyfi olsun.

Ayırma adımı. Her $x \in K$ için $x \neq a$ 'dır; $\varepsilon_x = \frac{|x-a|}{2} > 0$ alalım. $B(x, \varepsilon_x)$ ve $B(a, \varepsilon_x)$ komşulukları ayrıktır: bir y her ikisine de ait olsaydı, üçgen eşitsizliğiyle ([Teorem 8.2](#))

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a| < \varepsilon_x + \varepsilon_x = |x - a|$$

çelişkisi çıkardı.

Örtü ve sonlu alt örtü. Her $x \in K$ kendi komşuluğu $B(x, \varepsilon_x)$ 'in elemanı olduğundan $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in K}$ ailesi K 'nin bir açık örtüsüdür. K kompakt olduğundan sonlu tane komşuluk yeter:

$$K \subseteq B(x_1, \varepsilon_1) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{x_j}.$$

a 'nın güvenli komşuluğu. $\delta = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ alalım; sonlu tane pozitif sayının minimumu olduğundan $\delta > 0$. İddia: $B(a, \delta) \cap K = \emptyset$. Gerçekten, $y \in B(a, \delta) \cap K$ olsaydı, $y \in K$ olduğundan bir j için $y \in B(x_j, \varepsilon_j)$ olurdu; ayrıca $\delta \leq \varepsilon_j$ olduğundan $y \in B(a, \delta) \subseteq B(a, \varepsilon_j)$. Yani y , ayrık olduklarını gösterdiğimiz $B(x_j, \varepsilon_j)$ ve $B(a, \varepsilon_j)$ komşuluklarının ortak elemanı olurdu — çelişki.

Demek ki $B(a, \delta) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$. a keyfi olduğundan $\mathbb{R} \setminus K$ açıktır ve K kapalıdır ([Tanım 16.1](#)).

■

İspatın özü şudur: sonsuz tane “ayırma yarıçapı” ε_x 'in en küçüğü sıfır olabilirdi; kompaktlık sayesinde yalnızca sonlu tanesine ihtiyaç duyduk ve sonlu tane pozitif sayının minimumu pozitiftir. Kompaktlığın “sonsuzu sonlu gibi yönetme” gücü tam olarak budur.

Sonuç 18.1 (Kompakt Olmama Ölçütleri). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A sınırlı değilse kompakt değildir.
2. A kapalı değilse kompakt değildir.

İspat.

(1), [Teorem 18.1](#)'nin; (2), [Teorem 18.2](#)'nin karşıt tersidir.

■

Bu ölçütlerle pek çok küme anında elenir: $[0, \infty)$ ve $\mathbb{Z}$ sınırsız olduğundan; $(0, 1]$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ kapalı olmadığından kompakt değildir. Kapalı olmadıklarını [Sonuç 17.2](#) ile görürüz: ilk ikisi için 0, üçüncüsü için $\frac{\sqrt{2}}{2}$ kümeye ait olmayan bir yığılma noktasıdır (irrasyonel sayının her komşuluğunda $[0, 1]$ 'den rasyoneller vardır, [Teorem 13.5](#)).

Sonuç 18.2 (Kompakt Kümenin Maksimumu ve Minimumu Vardır). $K \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan kompakt bir kümeysse $\max K$ ve $\min K$ vardır.

İspat.

[Teorem 18.1](#) ve [Teorem 18.2](#) gereği K kapalı ve sınırlıdır; [Sonuç 17.5](#) sonucu uygulanır.

■

Şimdi kompakt kümelerden yeni kompakt kümeler üretmenin iki yolunu görelim.

Teorem 18.3 (Kompakt Kümenin Kapalı Alt Kümesi Kompaktır). $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ve $F \subseteq K$ kapalı ise F kompaktır.

İspat.

$\{U_i\}_{i \in I}$, F 'nin bir açık örtüsü olsun. F kapalı olduğundan $V = \mathbb{R} \setminus F$ açıktır. Aileye V 'yi ekleyelim: $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{V\}$. Bu yeni aile $\mathbb{R}$ 'nin tamamını örter, çünkü bir nokta ya F 'dedir (o zaman bir U_i 'dedir) ya da değildir (o zaman V 'dedir). Özellikle K 'yi örter. K kompakt olduğundan sonlu bir alt örtü vardır:

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup V$$

(V seçilmemiş olabilir; seçilmişse böyle yazalım). $F \subseteq K$ olduğundan F de bu birleşimin içindedir. Ama $F \cap V = \emptyset$; yani F 'nin hiçbir noktası V 'de değildir. Dolayısıyla F 'nin her noktası $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ 'den birindedir:

$$F \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Bu, verilen örtüden seçilmiş bir sonlu alt örtüdür. Örtü keyfi olduğundan F kompaktır.

■

Teorem 18.4 (Kompakt Kümelerin Sonlu Birleşimi Kompaktır). $K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq \mathbb{R}$ kompakt kümelerse $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ kompaktır.

İspat.

$\{U_i\}_{i \in I}$, K 'nin bir açık örtüsü olsun. Her $K_j \subseteq K$ olduğundan aynı aile her K_j 'nin de açık örtüsüdür. K_j kompakt olduğundan K_j 'yi örten sonlu bir alt aile $\mathcal{F}_j$ seçebiliriz ($j = 1, \dots, n$). $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n$ ailesi sonlu tane sonlu ailenin birleşimi olduğundan sonludur ve her K_j 'yi, dolayısıyla K 'yi örter. Böylece K 'nin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü vardır.

■

⚠ Sonsuz birleşim kompakt olmayabilir

Teoremdaki “sonlu” şartı kaldırılamaz. Her $\{n\}$ tek noktalı kümesi kompaktır ([Önerme 18.1](#)), ama $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ kompakt değildir ([Örnek 18.3](#)). Benzer biçimde her $[\frac{1}{n}, 1]$ kapalı aralığı (Heine–Borel teoremiyle göreceğimiz gibi) kompaktır, ama birleşimleri $(0, 1]$ kapalı olmadığından kompakt değildir.

18.3 Heine–Borel Teoremi

Kompakt kümelerin kapalı ve sınırlı olduğunu gördük. Şaşırtıcı olan, bunun tersinin de doğru olmasıdır: $\mathbb{R}$ 'de kapalı ve sınırlı olmak kompaktlık için **yeterlidir**. İspat, Bolzano–Weierstrass teoreminin ([Teorem](#)

17.5) ispatındaki ikiye bölme yöntemini kullanır ve yine iç içe aralıklar teoremine (Teorem 10.5), yani tamlığa dayanır.

Teorem 18.5 (Heine–Borel Teoremi). $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. K kompakttır ancak ve ancak K kapalı ve sınırlıdır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) K kompaktsa Teorem 18.1 gereği sınırlı, Teorem 18.2 gereği kapalıdır.

($\Leftarrow$ yönü) K kapalı ve sınırlı olsun. $K = \emptyset$ ise Önerme 18.1 gereği kompakttır; $K \neq \emptyset$ olsun. Olmayana ergi ile K ’nin kompakt olmadığını varsayalım: sonlu alt örtüsü bulunmayan bir $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü vardır ($K \neq \emptyset$ olduğundan $I \neq \emptyset$). Bu örtüyü ispat boyunca sabit tutuyoruz.

Terim. Bir J kapalı aralığına, $K \cap J$ kesişimi örtünün sonlu tane elemanı ile örtülemiyorsa **kötü**, örtülebiliyorsa **iyi** diyelim. Şu gözlem önemlidir: $K \cap J = \emptyset$ ise J iyidir (boş küme herhangi tek bir U_i ile örtülür); dolayısıyla **her kötü aralık K ile kesişir**.

Başlangıç. K sınırlı olduğundan bir alt sınırı m ve bir üst sınırı m' vardır; $M = \max\{|m|, |m'|\} + 1$ dersek $K \subseteq [-M, M]$ olur. $I_1 = [-M, M]$ diyelim. $K \cap I_1 = K$ sonlu tane U_i ile örtülemediğinden I_1 kötüdür.

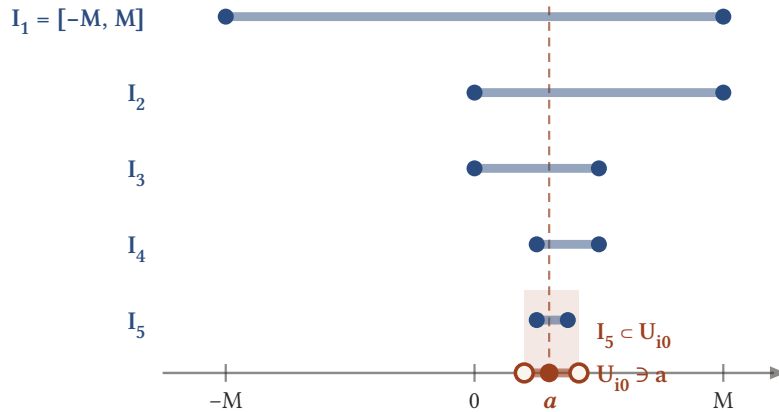
İkiye bölme. I_1 ’i orta noktasından iki kapalı aralığa bölelim: $[-M, 0]$ ve $[0, M]$. Bu iki yarıdan en az biri kötüdür. Çünkü ikisi de iyi olsaydı, $K \cap [-M, 0]$ sonlu tane, $K \cap [0, M]$ sonlu tane U_i ile örtülür; bu iki sonlu ailenin birleşimi sonludur ve

$$K \cap I_1 = (K \cap [-M, 0]) \cup (K \cap [0, M])$$

kümesini örterdi — I_1 ’in kötülüğüyle çelişki. Kötü olan yarıyı (ikisi de kötüyse soldakini) I_2 olarak seçelim. Aynı işlemi I_2 ’ye uygulayıp kötü bir yarisını I_3 olarak seçelim ve böyle devam edelim. Tümevarımla, her biri kötü olan iç içe kapalı aralıklar elde ederiz:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots, \quad |I_n| = \frac{2M}{2^{n-1}}.$$

her I_n sonlu tane U_i ile örtülemez, uzunluk $2M/2^{n-1}$



Şekil 18.2: İkiye bölme: $[-M, M]$ sonlu tane U_i ile örtülemiyorsa iki yarısından en az biri de örtülemez; bu yarı seçilip yeniden bölünür. Daralan I_n aralıklarının ortak noktası a , örtüdeki bir U_{i_0} açık aralığına düşer; uzunluğu sıfıra giden I_n bir yerden sonra bu tek aralığın içine girer, yani tek bir U_i ile örtülür: çelişki.

Ortak nokta. İç içe aralıklar teoremi (Teorem 10.5) gereği bütün I_n ’lere ait bir a noktası vardır. Ayrıca aralıkların uzunluğu istenildiği kadar küçülür: her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \geq n$ ’dir ($n = 1$ için apaçık, $n \geq 2$ için Bernoulli eşitsizliği (Teorem 9.5) ile $(1 + 1)^{n-1} \geq 1 + (n - 1) = n$), dolayısıyla $|I_n| \leq \frac{2M}{n}$; verilen her $\varepsilon > 0$ için Arşimet özelliği (Sonuç 12.1) ile $n > \frac{2M}{\varepsilon}$ seçilirse $|I_n| < \varepsilon$ olur.

$a \in K$. Olmayana ergi ile $a \notin K$ varsayalım. Her I_n kötü olduğundan K ile kesişir; $x_n \in K \cap I_n$ seçelim. $a \notin K$ ve $x_n \in K$ olduğundan $x_n \neq a$. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $|I_n| < \varepsilon$ olacak biçimde n seçilsin. a ve x_n aynı I_n aralığında olduklarından $|x_n - a| \leq |I_n| < \varepsilon$; yani $0 < |x_n - a| < \varepsilon$. ε keyfi olduğundan

a , K 'nin bir yığılma noktasıdır: $a \in K'$. K kapalı olduğundan [Sonuç 17.2](#) gereği $K' \subseteq K$, yani $a \in K$ – varsayımımızla çelişki. Öyleyse $a \in K$.

Çelişki. $a \in K$ olduğundan örtünün bir elemanı a 'yı içerir: $a \in U_{i_0}$. U_{i_0} açık olduğundan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi $|I_n| < \varepsilon$ olacak biçimde n seçelim. $a \in I_n$ ve I_n 'nin uzunluğu ε 'dan küçük olduğundan I_n 'nin her x noktası $|x - a| \leq |I_n| < \varepsilon$ sağlar; yani

$$I_n \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}.$$

Dolayısıyla $K \cap I_n \subseteq U_{i_0}$: kesişim, örtünün **tek bir** elemanı ile örtülmüştür. Bu, I_n 'nin iyi olması demektir; oysa I_n kötü seçilmişti. Çelişki.

Demek ki varsayımımız yanlıştır: K 'nin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü vardır, yani K kompakttır. ■

Teoremin değeri şudur: kompaktlığı tanımdan göstermek her örtüyle uğraşmayı gerektirirken, kapalılık ve sınırlılık genellikle birkaç satırda denetlenir. Artık $[a, b]$ kapalı aralıklarının, sonlu kümelerin, $\{0\} \cup \{1/n\}$ gibi kümelerin kompakt olduğunu tek cümleyle söyleyebiliriz.

Örnek 18.5 (Hangileri Kompakt). Aşağıdaki kümelerin kompakt olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $[a, b]$ ($a < b$) ve $[0, 1] \cup [2, 3]$
- b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ ve $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$
- c) $[0, 1) \cup \{2\}$
- d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- e) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Çözüm.

a) $[a, b]$ kapalıdır ve $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$ ile sınırlıdır; [Teorem 18.5](#) gereği kompakttır. $[0, 1] \cup [2, 3]$ iki kapalı kümenin birleşimi olarak kapalıdır ([Teorem 16.1](#)) ve $[0, 3]$ içinde kaldığından sınırlıdır; kompakttır. (Aynı sonuç [Teorem 18.4](#)'den de çıkar.)

b) $\sqrt{2}$ sayısı [Teorem 13.1](#) ile vardır ve kareler pozitif sayılarda sıralamayı korur ([Önerme 7.12 \(4\)](#)); dolayısıyla $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$ ve birinci küme $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ kapalı aralığıdır: kompakttır. İkinci küme $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ açık aralığıdır; $\sqrt{2}$ kümeye ait olmayan bir yığılma noktası olduğundan ([Örnek 17.1](#)) küme kapalı değildir ve [Sonuç 18.1](#) gereği kompakt değildir.

c) [Örnek 16.6](#) gereği $[0, 1) \cup \{2\}$ kapalı değildir (1 kümeye ait olmayan bir yığılma noktasıdır). Kompakt değildir.

d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = [0, 1]$ 'dir (her $x \in [0, 1]$ 'e rasyonellerle istenildiği kadar yaklaşılr, [Teorem 13.5](#)); örneğin $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0, 1]$ irrasyoneldir ([Önerme 13.3 \(2\)](#)), kapanışta olup kümede değildir. Dolayısıyla küme kapalı değildir ([Teorem 17.3](#)) ve kompakt değildir. Sınırlı olmak yetmez.

e) $K = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $[0, 1]$ içinde kaldığından sınırlıdır. Kapalı olduğunu tümleyenini yazarak görelim:

$$\mathbb{R} \setminus K = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$

Gerçekten, $x \notin K$ ise ya $x < 0$, ya $x > 1$, ya da $0 < x < 1$ ve x hiçbir $\frac{1}{n}$ 'ye eşit değildir; son durumda $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır: Arşimet özelliğiyle $\frac{1}{m} < x$ olan doğal sayılar vardır, iyi sıralama ilkesiyle ([Teorem 9.2](#)) en küçüğünü m alalım; $x < 1$ olduğundan $m \geq 2$ 'dir. $n = m - 1$ alalım: $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{m} < x$; öte yandan m en küçük olduğundan $\frac{1}{n} \geq x$, ve x hiçbir $\frac{1}{k}$ 'ye eşit olmadığından $\frac{1}{n} > x$. Sağ taraf açık aralıkların birleşimidir; [Önerme 15.2](#) ve [Teorem 15.1](#) gereği açıktır. Dolayısıyla K kapalıdır ([Tanım 16.1](#)) ve Heine–Borel ile kompakttır; bu, [Örnek 18.4](#)'taki doğrudan ispatla uyumludur. ■

Sonuç 18.3 (Kompakt Kümelerin Kesişimi Kompakttır). $\{K_i\}_{i \in I}$ kompakt kümelerden oluşan boş olmayan bir aile ise $\bigcap_{i \in I} K_i$ kompakttır.

İspat.

Her K_i kapalıdır (Teorem 18.2); kapalı kümelerin herhangi bir ailesinin kesişimi kapalıdır (Teorem 16.1). Kesişim, ailenin herhangi bir K_{i_0} elemanının alt kümesidir ve K_{i_0} sınırlı olduğundan (Teorem 18.1) kesişim de sınırlıdır. (Kesişim boş olabilir; Teorem 18.1'nin ardından benimsediğimiz uzlaşım gereği boş küme sınırlıdır, ayrıca Teorem 16.1 (1) gereği kapalıdır.) Kapalı ve sınırlı olan kesişim Teorem 18.5 gereği kompaktır. ■

i Tarihçe

Teorem, Alman matematikçi Eduard Heine (1821–1881) ile Fransız matematikçi Émile Borel (1871–1956)'in adlarını taşır. Heine, 1872'de kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların düzgün sürekli olduğunu gösterirken örtü fikrini örtük biçimde kullandı; Borel, 1895'te teoremi sayılabilir örtüler için açıkça ifade edip ispatladı; keyfi örtülere genelleme Henri Lebesgue (1875–1941) ile geldi. Bu yüzden teoreme bazen Heine–Borel–Lebesgue teoremi de denir.

i Dizisel kompaktlık ve devamı

Kompaktlığın üçüncü bir yüzü daha vardır: K içindeki her dizinin, limiti yine K 'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa K 'ye **dizisel kompakt** denir. Diziler bölümünde, Heine–Borel ve Bolzano–Weierstrass teoremlerini birleştirerek $\mathbb{R}$ 'de üç koşulun denk olduğunu ispatlayacağız: kompakt $\Leftrightarrow$ dizisel kompakt $\Leftrightarrow$ kapalı ve sınırlı (Tanım 24.3 ve Teorem 24.8; bkz. Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi). Kompaktlığın asıl gücü ise süreklilik bölümünde ortaya çıkar: kompakt bir kümenin sürekli görüntüsü kompaktır (Teorem 35.5) ve bu, sürekli fonksiyonların kapalı aralıkta maksimum ve minimum almasının nedenidir (Teorem 35.4).

18.4 Alıştırmalar

Alıştırma 18.1 (Kompaktlık Alıştırmaları).

- $(0, 1]$ kümesinin kompakt olmadığını, sonlu alt örtüsü bulunmayan bir açık örtü göstererek kanıtlayınız.
- $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin kompakt olmadığını, Heine–Borel teoremini kullanmadan, doğrudan tanımdan kanıtlayınız.
- K kompakt ve F kapalı ise $K \cap F$ 'nin kompakt olduğunu iki yolla gösteriniz: Heine–Borel teoremiyle ve Teorem 18.3 ile.
- (Cantor kesişim teoremi) $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ boş olmayan kompakt kümelerse $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ olduğunu gösteriniz.
- $K_n = [\frac{1}{n}, 1]$ ve $L_n = [n, n+1]$ kümelerinin her birinin kompakt olduğunu, ama $\bigcup_n K_n$ ve $\bigcup_n L_n$ birleşimlerinin kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = (\frac{1}{n}, 2)$ alalım. Her U_n açıktır. $x \in (0, 1]$ için Sonuç 12.2 gereği $\frac{1}{n} < x$ olan n vardır ve $x \leq 1 < 2$ olduğundan $x \in U_n$; dolayısıyla $\{U_n\}$ bir açık örtüdür. Sonlu tane $U_{n_1}, \dots, U_{n_k}$ seçilirse, $N = \max n_j$ için aralıklar iç içe olduğundan birleşim $U_N = (\frac{1}{N}, 2)$ 'dir; $\frac{1}{N+1} \in (0, 1]$ noktası bu birleşimde değildir. Sonlu alt örtü yoktur; $(0, 1]$ kompakt değildir.

b) Her $\frac{1}{n}$ 'yi, A 'nın başka hiçbir elemanını içermeyen bir açık aralıkla örtelim:

$$U_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \quad (n \geq 2).$$

$\frac{1}{n} \in U_n$ olduğundan $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, A 'nın bir açık örtüsüdür. Öte yandan $n \geq 2$ için $\frac{1}{k} \in U_n$ olması $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1}$, yani $n-1 < k < n+1$, yani $k = n$ demektir; U_1 için de $\frac{1}{k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k < 2 \Leftrightarrow k = 1$. Demek

ki $U_n \cap A = \{\frac{1}{n}\}$: her örtü parçası A 'nın yalnızca **bir** elemanını içerir. Sonlu tane $U_{n_1}, \dots, U_{n_k}$ seçilirse, indisler arasında olmayan bir m için $\frac{1}{m}$ örtülmez. Sonlu alt örtü yoktur; A kompakt değildir. (Tabii Heine–Borel ile de görülür: $0 \in A'$ ama $0 \notin A$, A kapalı değildir.)

c) Heine–Borel ile: K kompakt olduğundan kapalı ve sınırlıdır. $K \cap F$ iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır (Teorem 16.1) ve K 'nin alt kümesi olarak sınırlıdır. Teorem 18.5 gereği kompakttır.

Alt küme teoremiyle: $K \cap F$, kapalı bir kümedir ve K 'nin alt kümesidir; Teorem 18.3 gereği kompakttır.

d) Olmayana ergi ile $\bigcap_n K_n = \emptyset$ varsayalım. Her K_n kapalı olduğundan (Teorem 18.2) $V_n = \mathbb{R} \setminus K_n$ açıktır. De Morgan kuralıyla (Teorem 3.3)

$$\bigcup_n V_n = \mathbb{R} \setminus \bigcap_n K_n = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Dolayısıyla $\{V_n\}$, K_1 'in bir açık örtüsüdür. K_1 kompakt olduğundan sonlu bir alt örtü vardır: $K_1 \subseteq V_{n_1} \cup \dots \cup V_{n_k}$. $N = \max n_j$ olsun. Kümeler $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ biçiminde azaldığından tümleyenleri artar: $n \leq N$ için $V_n \subseteq V_N$. Böylece

$$K_1 \subseteq V_N = \mathbb{R} \setminus K_N.$$

Ama $K_N \neq \emptyset$; bir $x \in K_N$ alalım. $K_N \subseteq K_1$ olduğundan $x \in K_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus K_N$, yani $x \notin K_N$ – çelişki. Öyleyse $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Bu sonuç, iç içe aralıklar teoreminin (Teorem 10.5) geniş bir genellemesidir: aralık yerine herhangi kapalı ve sınırlı kümeler alınabilir. “Kompakt” şartı gereklidir: $(0, 1/n)$ açık aralıkları ve $[n, \infty)$ kapalı ama sınırsız kümeleri iç içe ve boş olmayan olmalarına rağmen boş kesişime sahiptir.

e) Her $K_n = [\frac{1}{n}, 1]$ ve $L_n = [n, n+1]$ kapalı aralıktır; Teorem 18.5 gereği kompakttır.

$\bigcup_n K_n = (0, 1]$: her $x \in (0, 1]$ için $\frac{1}{n} \leq x$ olan n vardır (Arşimet), dolayısıyla $x \in K_n$; tersine her $K_n \subseteq (0, 1]$. $(0, 1]$ kapalı değildir (0 kümeye ait olmayan bir yığılma noktasıdır), dolayısıyla kompakt değildir (a şıkkı da bunu doğrudan gösterir).

$\bigcup_n L_n = [1, \infty)$: her $x \geq 1$ için $n = \lfloor x \rfloor$ alınırsa $n \leq x < n+1$ (Teorem 12.3), yani $x \in L_n$. $[1, \infty)$ sınırsızdır; Sonuç 18.1 gereği kompakt değildir.

■

Kompaktlık, reel sayıların topolojisine ayırdığımız dört bölümün doruk noktasıdır: komşuluklarla başlayıp açık ve kapalı kümelerden, yığılma noktaları ve kapanıştan geçerek “sonsuzu sonlu gibi yöneten” kümelerle ulaştık. Bundan sonra sahneye diziler çıkıyor. Bu bölümün kavramları orada yeniden karşımıza çıkacak: kapalı kümeler dizi limitleriyle, kompakt kümeler yakınsak alt dizilerle karakterize edilecek. Dizilerin tanımı, sınırlılığı ve monotonluğuyla başlıyoruz: Diziler: Tanım, Sınırlılık ve Monotonluk.

19. Diziler: Tanım, Sınırlılık ve Monotonluk

Buraya kadar reel sayıların yapısını (aksiyomlar, tamlık, Arşimet özelliği) ve sayı doğrusunun topolojisini (açık ve kapalı kümeler, yığılma noktaları, kompaktlık) inceledik. Şimdi analizin asıl konusuna, **limit** kavramına yaklaşıyoruz. Limitin en yalın hâli dizilerde ortaya çıkar: sonsuz bir sayı listesinin terimleri, ilerledikçe bir sayıya “yaklaşır mı”?

Bu bölümde henüz limitten söz etmeyeceğiz. Önce dizinin ne olduğunu kesin biçimde tanımlayacak, ardından dizilerin iki temel davranış özelliğini inceleyeceğiz: **sınırlılık** (terimler bir aralığın içinde kalıyor mu?) ve **monotonluk** (terimler hep aynı yönde mi ilerliyor?). Bu iki kavram, sonraki bölümlerde yakınsaklığın hem gerekli koşullarını hem de en güçlü yeter koşulunu (monoton yakınsaklık teoremi) verecek.

19.1 Dizi Kavramı

Bir dizi, sezgisel olarak sonsuz ve **sıralı** bir sayı listesidir:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Listede hangi sayının kaçınıcı sırada olduğu önemlidir; yani her doğal sayıya (sıra numarasına) bir reel sayı karşılık gelir. “Her doğal sayıya bir reel sayı karşılık getirme” ise tam olarak bir fonksiyondur ([Tanım 5.1](#)). Tanımı buna göre yapalım.

Tanım 19.1 (Dizi). Tanım kümesi $\mathbb{N}$, değer kümesi $\mathbb{R}$ olan bir $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **reel sayı dizisi** (sequence of real numbers) ya da kısaca **dizi** denir.

- $n \in \mathbb{N}$ için $a(n)$ değeri a_n ile gösterilir ve dizinin **n -inci terimi** (term) diye adlandırılır; n 'ye bu terimin **indisi** denir.
- a_n 'yi n cinsinden veren formüle dizinin **genel terimi** (general term) denir.
- Dizinin kendisi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kısaca (a_n) ya da terimleri sıralanarak $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ile gösterilir.
- $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ kümesine dizinin **görüntü kümesi** (range) ya da **terimler kümesi** denir.

Gerektiğinde indis 0'dan ya da başka bir $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısından başlatılabilir; bu durumda $(a_n)_{n \geq k}$ yazılır. Aşağıdaki sonuçların hepsi bu durumda da aynen geçerlidir.

⚠ Dizi ile görüntü kümesi aynı şey değildir

(a_n) yazımı (yuvarlak ayraç) **dizi**yi, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ yazımı (küme ayraç) **görüntü kümesini** gösterir. Dizide sıra ve tekrar önemlidir, kümede değildir. Örneğin $a_n = (-1)^n$ dizisi

$$(-1, 1, -1, 1, \dots)$$

biçiminde sonsuz terimlidir; ama görüntü kümesi yalnızca iki elemanlı $\{-1, 1\}$ kümesidir. Aynı biçimde sabit $(5, 5, 5, \dots)$ dizisinin görüntü kümesi tek elemanlı $\{5\}$ kümesidir. İleride “dizinin yığılma noktası” ile “görüntü kümesinin yığılma noktası” arasındaki fark gibi ince ayrımlar tam olarak buradan kaynaklanacak.

Bir dizi üç biçimde verilebilir:

1. **Genel terimle:** $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = n^2$, $a_n = (-1)^n$ gibi bir formülle.

2. **İlk terimleri listeleterek:** $(2, 4, 6, 8, \dots)$ gibi. Bu yol kesin değildir: listeyi sürdürmenin tek bir yolu yoktur $(1, 2, 4, 8, \dots)$ dizisi 2^{n-1} olabileceği gibi başka bir kuralla da devam edebilir. Bu yüzden yalnızca kural açıkça anlaşılıyorsa kullanılır.
3. **Özyinelemeyle:** İlk terim(ler) verilir, sonraki her terim öncekiler cinsinden bir kuralla tanımlanır. Bunu birazdan ayrıca tanımlayacağız.

Örnek 19.1 (Temel Dizi Örnekleri). Aşağıdaki dizilerin ilk dört terimini ve görüntü kümelerini yazınız.

- a) $a_n = \frac{1}{n}$
 b) $b_n = (-1)^n$
 c) $c_n = n^2$
 d) Sabit dizi: $d_n = 5$
 e) Aritmetik dizi: $a, d \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere $e_n = a + (n-1)d$; özel olarak $a = 3, d = 4$.
 f) Geometrik dizi: $a, r \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere $g_n = ar^{n-1}$; özel olarak $a = 2, r = 3$.

Çözüm.

- a) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. Görüntü kümesi $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$; bu küme sonsuzdur, çünkü $n \neq m$ iken $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m}$ 'dir (dizi birebirdir).
 b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$. Görüntü kümesi $\{-1, 1\}$; yalnızca iki eleman.
 c) $(1, 4, 9, 16, \dots)$. Görüntü kümesi tam kare doğal sayılar kümesi $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.
 d) $(5, 5, 5, 5, \dots)$. Görüntü kümesi $\{5\}$. Her sabit dizi böyledir: sonsuz terim, tek elemanlı görüntü kümesi.
 e) Aritmetik dizide ardışık terimlerin farkı sabittir: $e_{n+1} - e_n = d$. $a = 3, d = 4$ için $(3, 7, 11, 15, \dots)$; görüntü kümesi $\{3 + 4k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
 f) Geometrik dizide ($a \neq 0, r \neq 0$ iken) ardışık terimlerin oranı sabittir: $\frac{g_{n+1}}{g_n} = r$. $a = 2, r = 3$ için $(2, 6, 18, 54, \dots)$; görüntü kümesi $\{2 \cdot 3^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Bir diziyi görselleştirmenin en kullanışlı yolu, bir fonksiyon olduğunu hatırlayıp grafiğini çizmektir: yatay eksene indis n , dikey eksene terim a_n konur. Grafik, sürekli bir eğri değil, ayrık noktalardan oluşur.

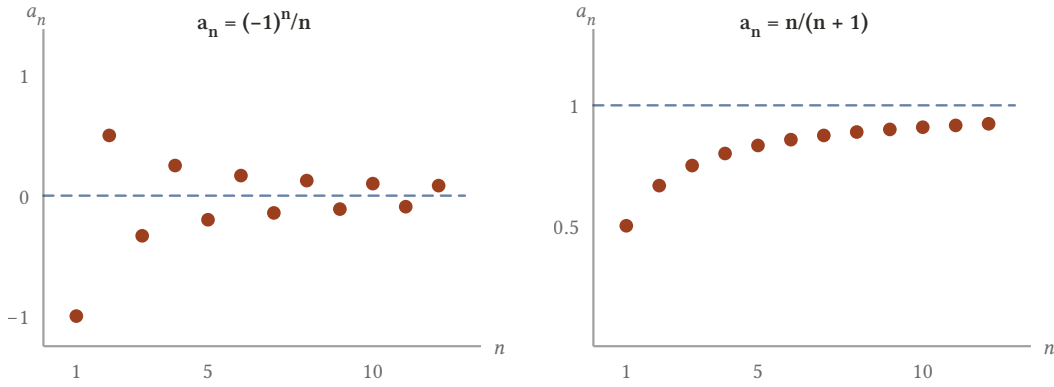
Örnek 19.2 (Bir Dizinin Grafiği). $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ve $b_n = \frac{n}{n+1}$ dizilerinin ilk beş terimini hesaplayıp grafiklerini yorumlayınız.

Çözüm.

İlk beş terim:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = -\frac{1}{5};$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \quad b_3 = \frac{3}{4}, \quad b_4 = \frac{4}{5}, \quad b_5 = \frac{5}{6}.$$



Şekil 19.1: Bir dizinin grafiği: yatay ekseninde indis $n = 1, 2, 3, \dots$, düşeyde terim a_n . Solda $(-1)^n/n$ işaret değiştirerek 0'a yaklaşır; sağda $n/(n+1)$ artarak 1'e yaklaşır ama 1'e hiç ulaşmaz.

(a_n) dizisinin terimleri sıfırın bir sağına bir soluna düşer; ama sıfıra olan uzaklıkları $\frac{1}{n}$ giderek küçülür. Terimler işaret değiştirerek 0'a "yaklaşır". (b_n) dizisinin terimleri ise hep aynı yönde, yukarı doğru ilerler ve 1'i hiç geçmeden 1'e "yaklaşır". Bu iki davranışı — yaklaşmayı ve tek yönde ilerlemeyi — bu bölümde ve bir sonrakinde kesin tanımlara dönüştüreceğiz.

Şimdi diziyi vermenin üçüncü yolunu tanımlayalım. Sezgi şudur: bazen bir terimi doğrudan n 'den hesaplamak yerine, bir önceki terimden (ya da önceki birkaç terimden) üretmek daha doğaldır.

Tanım 19.2 (Özyineli Dizi). İlk terimi (ya da ilk birkaç terimi) verilen ve bundan sonraki her terimi kendinden önceki terimler cinsinden bir kuralla belirlenen diziye **özyineli dizi** (recursively defined sequence) denir. Terimleri birbirine bağlayan kurala **özyineleme bağıntısı** (recurrence relation) denir. En sık rastlanan biçim, a_1 'in verildiği ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

kuralının geçerli olduğu bir f fonksiyonuyla tanımlanan dizilerdir.

Böyle bir tanımın gerçekten her n için bir a_n değeri belirlediği, tümevarım ilkesinden (Teorem 9.1) gelir: a_1 tanımlıdır ve a_n tanımlıysa $a_{n+1} = f(a_n)$ de tanımlıdır; dolayısıyla a_n her $n \in \mathbb{N}$ için tanımlıdır.

Örnek 19.3 (Fibonacci Dizisi ve Bir Doğrusal Özyineleme).

- a) **Fibonacci dizisi:** $F_1 = 1, F_2 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ile tanımlanır. İlk sekiz terimini yazınız.
- b) $a_1 = 2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ olsun. İlk dört terimi hesaplayınız.

Çözüm.

a) Her terim kendinden önceki iki terimin toplamıdır:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21.$$

Bu dizide iki başlangıç terimi gerekir; çünkü kural, iki önceki terime bakar.

b) Kuralı art arda uygulayalım:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}, \quad a_3 = \frac{\frac{7}{3}+5}{3} = \frac{22}{9}, \quad a_4 = \frac{\frac{22}{9}+5}{3} = \frac{67}{27}.$$

Ondalık yaklaşık değerler 2; 2, 333; 2, 444; 2, 481'dir. Terimler artıyor ve 2, 5'e yaklaşıyor gibi görünüyor. Bu gözlemi **Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı** bölümünde ispata dönüştüreceğiz; bu bölümde ise bu tür dizilerin sınırlılık ve monotonluğunun nasıl gösterildiğini öğreneceğiz.

■

19.2 Sınırlı Diziler

Bir dizinin terimleri sonsuz tane olduğu hâlde sayı doğrusunun sınırlı bir parçasında kalabilir ($1/n$, $(-1)^n$) ya da sınır tanımadan büyüyebilir (n^2). Bu ayrımı, kümeler için kurduğumuz sınırlılık kavramını (**Tanım 10.2**) dizinin görüntü kümesine uygulayarak yapıyoruz.

Tanım 19.3 (Sınırlı Dizi). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

- Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisine **üstten sınırlı** (bounded above), M 'ye dizinin bir **üst sınırı** denir.
- Her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq a_n$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisine **alttan sınırlı** (bounded below), m 'ye dizinin bir **alt sınırı** denir.
- Hem üstten hem alttan sınırlı diziye **sınırlı dizi** (bounded sequence) denir.

Sınırlı olmayan diziye **sınırsız** denir.

Tanım, doğrudan görüntü kümesine bakar: (a_n) dizisi sınırlıdır ancak ve ancak $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi **Tanım 10.2** anlamında sınırlıysa. Terimler kümesi hiçbir zaman boş olmadığından, sınırlı bir dizinin terimler kümesinin supremumu ve infimumu vardır (supremum için tamlik aksiyomu, Bölüm 10.4; infimum için **Teorem 10.3**); bunlar $\sup_n a_n$ ve $\inf_n a_n$ ile gösterilir.

Uygulamada sınırlılığı iki ayrı eşitsizlikle değil, tek bir mutlak değer eşitsizliğiyle göstermek daha pratiktir.

Önerme 19.1 (Sınırlılığın Mutlak Değerle İfadesi). (a_n) dizisi sınırlıdır ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|a_n| \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır.

İspat.

($\Rightarrow$ **yönü**) (a_n) sınırlı olsun; her n için $m \leq a_n \leq K$ olacak $m, K \in \mathbb{R}$ vardır. $M = \max\{|m|, |K|\} + 1$ alalım; $M > 0$ 'dır. **Teorem 8.1** (4) gereği $|m| \leq m$ ve $K \leq |K|$ olduğundan her n için

$$-M < -|m| \leq m \leq a_n \leq K \leq |K| < M.$$

Böylece $-M \leq a_n \leq M$, ve **Teorem 8.1** (7) ile $|a_n| \leq M$.

($\Leftarrow$ **yönü**) Her n için $|a_n| \leq M$ olsun. **Teorem 8.1** (7) ile $-M \leq a_n \leq M$; yani $-M$ bir alt sınır, M bir üst sınırdır. Dizi sınırlıdır.

■

Bu önerme sayesinde “sınırlı” demek, “bütün terimler $[-M, M]$ aralığının içinde” demektir. Sınırsızlığı göstermek içinse bu ifadenin olumsuzlamasını kullanırız.

İ Sınırsız dizi ne demektir?

Teorem 2.1 ile “ $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M$ ” ifadesinin olumsuzlaması şudur:

$$(a_n) \text{ sınırsızdır} \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| > M.$$

Yani ne kadar büyük bir M seçilirse seçilsin, dizinin mutlak değerce M 'yi aşan **en az bir** terimi vardır. Benzer biçimde (a_n) üstten sınırsızdır ancak ve ancak her $M \in \mathbb{R}$ için $a_n > M$ olan bir n varsa. Dikkat: sınırsızlık için terimlerin “sürekli büyümesi” gerekmez; tek tük büyük terimler yeter.

Örnek 19.4 (Sınırlı ve Sınırsız Diziler). Aşağıdaki dizilerin sınırlı olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $a_n = \frac{1}{n}$
- b) $b_n = (-1)^n$
- c) $c_n = \frac{n}{n+1}$
- d) $d_n = n^2$
- e) $e_n = (-1)^n n$

Çözüm.

a) $n \geq 1$ olduğundan $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ 'dir: pozitiflik **Önerme 7.9** ile gelir; üst sınır için $n = 1$ 'de $\frac{1}{n} = 1$, $n > 1$ 'de ise $0 < 1 < n$ olduğundan **Önerme 7.10** ile $\frac{1}{n} < 1$. Dizi sınırlıdır; $|a_n| \leq 1$.

b) Her n için $|(-1)^n| = 1 \leq 1$. Dizi sınırlıdır.

c) $0 < n < n+1$ olduğundan $0 < \frac{n}{n+1} < 1$; dizi sınırlıdır ve $|c_n| < 1$.

d) Alttan sınırlıdır: $n^2 \geq 1$. Üstten sınırlı **değildir**: herhangi bir $M > 0$ verilsin. **Sonuç 12.1** gereği $n > M$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır; $n \geq 1$ olduğundan $n^2 = n \cdot n \geq n > M$. Demek ki hiçbir M üst sınır olamaz. Dizi sınırsızdır.

e) Terimler $-1, 2, -3, 4, \dots$ biçimindedir. $M > 0$ verilsin; **Sonuç 12.1** ile $k > M$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. k çiftse $n = k$, tekse $n = k + 1$ alalım; n çift ve $n > M$ olduğundan $e_n = n > M$. Aynı yolla n 'yi tek ve M 'den büyük seçersek $e_n = -n < -M$. Dizi ne üstten ne alttan sınırlıdır.

■

Sınırlı bir dizinin terimler kümesi için supremum ve infimum hesabı, Bölüm 10'da öğrendiğimiz ölçütlerle yapılır. Bir örnekle hatırlayalım.

Örnek 19.5 (Bir Dizinin Supremumu ve İnfimumu). $c_n = \frac{n}{n+1}$ dizisi için $\inf_n c_n$ ve $\sup_n c_n$ değerlerini bulunuz; dizinin en büyük ve en küçük terimi var mıdır?

Çözüm.

Terimler $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ biçimindedir. $c_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ yazılışı işleri kolaylaştırır.

İnfimum. $n \geq 1$ için $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, dolayısıyla $c_n \geq \frac{1}{2} = c_1$. Yani $\frac{1}{2}$ hem alt sınırdır hem de kümenin elemanıdır: $\inf_n c_n = \min_n c_n = \frac{1}{2}$ (**Tanım 10.3**).

Supremum. Her n için $c_n < 1$ olduğundan 1 bir üst sınırdır. **Teorem 10.1** ile $1 = \sup_n c_n$ olduğunu gösterelim: $\varepsilon > 0$ verilsin. **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ vardır (önce $\frac{1}{k} < \varepsilon$ olan k bulup $n = k$ alınır; $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$). Bu n için

$$c_n = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon.$$

Her iki koşul sağlandı: $\sup_n c_n = 1$. Ama 1 hiçbir terime eşit değildir; dizinin en büyük terimi (maksimumu) **yoktur**.

■

Sınırlılık, yakınsaklıkla yakından ilgilidir: bir sonraki bölümde her yakınsak dizinin sınırlı olduğunu (**Teorem 20.2**), ama sınırlı her dizinin yakınsak olmadığını (yine $(-1)^n$!) göreceğiz.

19.3 Monoton Diziler

Dizinin ikinci temel davranış özelliği, terimlerin **yönüdür**. $1/n$ dizisi hep küçülür, $n/(n+1)$ hep büyür, $(-1)^n/n$ ise bir ileri bir geri gider. Hep aynı yönde ilerleyen dizilere monoton diyeceğiz.

Tanım 19.4 (Monoton Dizi). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun. $n < m$ olan **her** $n, m \in \mathbb{N}$ indis çifti için

1. $a_n \leq a_m$ ise (a_n) dizisine **artan** (increasing),
2. $a_n \geq a_m$ ise **azalan** (decreasing),
3. $a_n < a_m$ ise **kesin artan** (strictly increasing),
4. $a_n > a_m$ ise **kesin azalan** (strictly decreasing)

dizi denir. Bu dört koşuldan herhangi birini sağlayan diziye **monoton** (monotonic), (3) ya da (4)'ü sağlayan diziye **kesin monoton** (strictly monotonic) dizi denir.

İ Adlandırma üzerine

Bu tanımda “artan”, eşitliğe izin verir: $a_n \leq a_m$. Bazı kitaplar buna “azalmayan” (non-decreasing) der ve “artan” sözcüğünü bizim “kesin artan” dediğimiz kavram için kullanır. Biz bu derste yukarıdaki adlandırmayı kullanıyoruz; başka bir kitap okurken hangi anlamın kastedildiğine dikkat edin. Bu adlandırmayla:

- Kesin artan her dizi artandır; kesin azalan her dizi azalandır (çünkü $a_n < a_m$ ise $a_n \leq a_m$).
- Sabit dizi hem artan hem azalandır; ama kesin monoton değildir.
- Kesin artan bir dizi birebirdir: $n \neq m$ iken $a_n \neq a_m$.

Tanımdaki koşul, bütün indis çiftleri üzerinde konuşur; bu, doğrudan denetlemesi güç bir koşuldur. Neyse ki yalnızca **ardışık** terimlere bakmak yeterlidir.

Önerme 19.2 (Ardışık Terim Testi). (a_n) bir dizi olsun.

1. (a_n) artandır ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise.
2. (a_n) azalandır ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq a_{n+1}$ ise.
3. (a_n) kesin artandır ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < a_{n+1}$ ise.
4. (a_n) kesin azalandır ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > a_{n+1}$ ise.

İspat.

(1) ($\Rightarrow$ yönü) Dizi artan olsun. Her n için $n < n + 1$ olduğundan tanım gereği $a_n \leq a_{n+1}$.

($\Leftarrow$ yönü) Her n için $a_n \leq a_{n+1}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ sabit tutalım ve

$$P(k) : a_n \leq a_{n+k}$$

önermesinin her $k \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu tümevarımla (Teorem 9.1) gösterelim. $P(1)$, hipotezin kendisidir. $P(k)$ doğru olsun: $a_n \leq a_{n+k}$. Hipotezi $n + k$ indisine uygularsak $a_{n+k} \leq a_{n+k+1}$ olur. Sıralamanın geçişlilik özelliğiyle (Bölüm 7.1)

$$a_n \leq a_{n+k} \leq a_{n+k+1},$$

yani $P(k + 1)$ doğrudur. Demek ki $P(k)$ her k için doğrudur.

Şimdi $n < m$ olan herhangi bir indis çifti alalım. Önerme 9.3 (4) gereği $k = m - n$ bir doğal sayıdır. $P(k)$ gereği $a_n \leq a_{n+k} = a_m$. Dizi artandır.

(2) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$ 'tir: kesin eşitsizlik hâli Önerme 7.3'dir ($x < y \Leftrightarrow -y < -x$), eşitlik hâli ise $x = y \Leftrightarrow -y = -x$ olmasından çıkar. Dolayısıyla (a_n) azalandır ancak ve ancak $(-a_n)$ artansa. $(-a_n)$ dizisine (1)'i uygulamak yeter: her n için $-a_n \leq -a_{n+1}$ olması, her n için $a_n \geq a_{n+1}$ olmasıyla denktir.

(3) ve (4) (1) ve (2)'nin ispatları, $\leq$ yerine $<$ (ve $\geq$ yerine $>$) yazılarak kelimesi kelimesine tekrarlanır; çünkü kesin eşitsizlik de geçişlidir: $a_n < a_{n+k}$ ve $a_{n+k} < a_{n+k+1}$ ise $a_n < a_{n+k+1}$.

■

Bu önerme, monotonluk ispatlarının tamamının dayandığı sonuçtur: sonsuz çoklukta indis çifti yerine tek bir n için a_n ile a_{n+1} 'i karşılaştırmak yeter. Karşılaştırmanın iki standart yolu vardır.

Sonuç 19.1 (Fark ve Oran Testi). (a_n) bir dizi olsun.

1. **Fark testi.** Her n için $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ise dizi artan, ≤ 0 ise azalandır. Eşitsizlik kesinse (> 0 ya da < 0) dizi kesin artan ya da kesin azalandır.
2. **Oran testi.** Dizinin bütün terimleri pozitif olsun ($a_n > 0$). Her n için $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ise dizi artan, ≤ 1 ise azalandır. Eşitsizlik kesinse dizi kesin artan ya da kesin azalandır.

Her iki testte de koşullar yalnızca yeterli değil, aynı zamanda gereklidir.

İspat.

1. Sıralamanın toplamıyla uyumu (O3, Bölüm 7.1) ile $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 0 < a_{n+1} - a_n$ ($\Rightarrow$ yönünde iki yana $-a_n$, $\Leftarrow$ yönünde iki yana a_n eklenir); eşitlik durumu $a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 0$ ise açıktır. İkisi birlikte $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow 0 \leq a_{n+1} - a_n$ verir. Sonuç **Önerme 19.2** ile gelir.

2. $a_n > 0$ olduğundan **Önerme 7.9** ile $\frac{1}{a_n} > 0$ 'dır. Bir eşitsizliğin iki yanını pozitif bir sayıyla çarpmak yönü korur (O4). $a_n \leq a_{n+1}$ eşitsizliğini $\frac{1}{a_n}$ ile çarpınca $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$; tersine $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eşitsizliğini a_n ile çarpınca $a_n \leq a_{n+1}$ elde edilir. Yani

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Diğer üç durum aynı biçimdedir. Sonuç yine **Önerme 19.2** ile gelir.

■

⚠ Oran testi yalnızca pozitif terimli diziler içindir

Terimler negatifse eşitsizliğin yönü tersine döner; terimler işaret değiştiriyorsa oran hiçbir şey söylemez. Örneğin $a_n = (-1)^n$ için oran hep -1 'dir ve dizi monoton değildir. Emin olmadığınız durumlarda fark testine dönün: fark testinin ön koşulu yoktur.

Örnek 19.6 (Bir Bölü n Dizisi Kesin Azalandır). $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin kesin azalan olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önerme 19.2 (4) gereği her n için $a_{n+1} < a_n$, yani $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğunu göstermek yeter. $n < n+1$ eşitsizliğinin iki yanını pozitif $\frac{1}{n(n+1)}$ sayısıyla çarpalım (**Önerme 7.9** ve O4):

$$\frac{n}{n(n+1)} < \frac{n+1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Aynı sonuç fark testiyle de görülür: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$.

■

Örnek 19.7 (n Bölü n Artı Bir Dizisi Kesin Artandır). $c_n = \frac{n}{n+1}$ dizisinin kesin artan olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Fark testini kullanalım:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Pay ve payda pozitif olduğundan fark her n için pozitifdir; **Sonuç 19.1** ile dizi kesin artandır. **Örnek 19.4** (c) ile birlikte: (c_n) hem kesin artan hem sınırlıdır. **Örnek 19.2** grafiğinde gördüğümüz “hep yukarı, ama 1’i geçmeden” davranışı tam olarak budur.

■

Örnek 19.8 (Oran Testiyle Monotonluk).

a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ dizisinin azalan olduğunu, $n \geq 2$ için kesin azalan olduğunu gösteriniz.

b) $b_n = \frac{n}{2^n}$ dizisinin azalan olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Bütün terimler pozitifdir. Oran:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

$n \geq 1$ için $n + 1 \geq 2$, yani $\frac{2}{n+1} \leq 1$; **Sonuç 19.1** ile dizi azalandır. Eşitlik yalnızca $n = 1$ 'de olur ($a_1 = a_2 = 2$); $n \geq 2$ için $\frac{2}{n+1} < 1$, dolayısıyla $a_2 > a_3 > a_4 > \dots$ kesin azalandır. İlk terimler: $2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \dots$

b) Terimler pozitifdir. Oran:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

$n \geq 1$ için $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$, dolayısıyla oran ≤ 1 'dir; dizi azalandır. Yine eşitlik yalnızca $n = 1$ 'de ($b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$), sonrası kesin azalandır.

Her iki dizide de oran testi, faktöriyel ve üstel ifadelerin sadeleşmesi sayesinde fark testinden çok daha kısa bir yol verdi. Genel kural: **toplam ve fark** içeren dizilerde fark testi, **çarpım, kuvvet ve faktöriyel** içeren dizilerde oran testi daha elverişlidir.

■

Monoton olmadığını göstermek için tek bir “bozulma” yeter; çünkü **Tanım 19.4**'deki her koşul, bütün indis çiftleri üzerinde bir tümel önermedir ve tek bir karşıt örnekle çürütülür.

Örnek 19.9 (Monoton Olmayan Diziler).

a) $a_n = n + (-1)^n$ dizisinin monoton olmadığını gösteriniz.

b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dizisinin monoton olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) İlk terimler: $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 5, a_5 = 4$. $a_1 < a_2$ olduğundan dizi azalan değildir; $a_2 > a_3$ olduğundan artan da değildir. Monoton değildir. (Dizinin “genel eğilimi” büyümek olsa da, tanım her adımda aynı yönü ister.)

b) $b_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{3}$. $b_1 < b_2$ ve $b_2 > b_3$: dizi ne artan ne azalandır. Buna karşılık $|b_n| = \frac{1}{n}$ dizisi kesin azalandır; monotonluk mutlak değer alınca değişebilir.

■

Özyineli dizilerde genel terim elimizde olmadığından fark ve oranı doğrudan hesaplayamayız; bunun yerine sınırlılık ve monotonluk **tümevarımla** gösterilir. Bu, ilerideki bölümlerde sık kullanacağımız bir tekniktir; şimdi bir örnekle öğrenelim.

Örnek 19.10 (Özyineli Dizide Tümevarımla Sınırlılık ve Monotonluk). $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ olsun. (a_n) dizisinin üstten 2 ile sınırlı ve kesin artan olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İlk terimler: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots$ Terimler büyüyor ve 2'nin altında kalıyor gibi; bunu ispatlayalım.

Sınırlılık. $P(n) : a_n < 2$ önermesini tümevarımla gösterelim. $P(1) : a_1 = 1 < 2$, doğru. $P(n)$ doğru olsun, yani $a_n < 2$. O zaman

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < \frac{2}{2} + 1 = 2,$$

yani $P(n+1)$ doğrudur. **Teorem 9.1** ile her n için $a_n < 2$. Ayrıca aynı yolla $a_n > 0$ olduğu da görülür ($a_1 = 1 > 0$ ve $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 1 > 0$); dizi sınırlıdır.

Monotonluk. Fark testi için özyineleme bağıntısını kullanalım:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} = \frac{2 - a_n}{2}.$$

Az önce $a_n < 2$ olduğunu gösterdik; dolayısıyla $2 - a_n > 0$ ve $a_{n+1} - a_n > 0$. **Sonuç 19.1** ile dizi kesin artandır.

Dikkat edin: monotonluk ispatı, sınırlılık ispatına dayandı. Özyineli dizilerde bu iki adım çoğu zaman birbirine bağlıdır ve önce sınırın bulunması gerekir. Bu dizinin gerçekten 2'ye yakınsadığı, **Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı** bölümündeki monoton yakınsaklık teoremi (artan ve üstten sınırlı

her dizi yakınsar) ve orada özyineli diziler için göstereceğimiz “bağıntıda limite geçme” yöntemiyle görülecektir.

■

Monoton diziler için sınırlılığın yarısı bedavadır: artan bir dizinin en küçük terimi, azalan bir dizinin en büyük terimi ilk terimidir.

Önerme 19.3 (Monoton Diziler Bir Yandan Sınırlıdır).

1. Artan her dizi alttan sınırlıdır; a_1 bir alt sınırdır. Dolayısıyla artan bir dizi sınırlıdır ancak ve ancak üstten sınırlıysa.
2. Azalan her dizi üstten sınırlıdır; a_1 bir üst sınırdır. Dolayısıyla azalan bir dizi sınırlıdır ancak ve ancak alttan sınırlıysa.

İspat.

1. (a_n) artan olsun. $n = 1$ için $a_1 \leq a_1$ açıktır; $n > 1$ için $1 < n$ olduğundan Tanım 19.4 ile $a_1 \leq a_n$. Demek ki a_1 bir alt sınırdır. Dizi zaten alttan sınırlı olduğundan, sınırlı olması için gerek ve yeter koşul üstten sınırlı olmasıdır (Tanım 19.3).
2. Aynı ispat $\leq$ yerine $\geq$ ile tekrarlanır: $n \geq 1$ için $a_n \leq a_1$.

■

 Monotonluğu göstermenin üç yolu

Bir dizinin monoton olduğunu göstermek için Önerme 19.2 gereği yalnızca a_n ile a_{n+1} 'i karşılaştırmak yeter. Bunun için:

1. **Fark:** $a_{n+1} - a_n$ hesaplanır ve işareti belirlenir (her dizi için geçerli; toplam/fark içeren dizilerde elverişli).
2. **Oran:** Terimler pozitifse $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hesaplanıp 1 ile karşılaştırılır (çarpım, kuvvet, faktöriyel içeren dizilerde elverişli).
3. **Tümevarım:** Özyineli dizilerde önce uygun bir sınır tümevarımla bulunur, sonra $a_{n+1} - a_n$ 'nin işareti bu sınırdan çıkarılır.

Bir de şu gözlem sık işe yarar: kimi diziler ilk birkaç terimden sonra monoton olur (“bir yerden sonra monoton”). Yakınsaklık dizinin başındaki sonlu sayıda terime bağlı olmadığından, ileride bu da yeterli olacaktır.

Peki monoton ve sınırlı bir dizi hakkında ne söyleyebiliriz? Sezgi açıktır: hep yukarı giden ama bir tavanı aşamayan bir dizi “sıkışıp” bir sayıya yaklaşmak zorundadır. Bu sezgi doğrudur, ispatı tamlik aksiyomuna dayanır ve **monoton yakınsaklık teoremi** adıyla Teorem 23.1 olarak karşımıza çıkacak. Önce “yaklaşmak” sözcüğünü kesinleştirmeliyiz; bu da bir sonraki bölümün konusu.

19.4 Alıştırmalar

Alıştırma 19.1 (Diziler Üzerine Alıştırmalar).

- a) $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$ dizisinin ilk üç terimini yazınız; dizinin sınırlı ve kesin artan olduğunu gösteriniz.
- b) $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ dizisinin sınırlı olduğunu, ama monoton olmadığını gösteriniz.
- c) $c_n = \frac{3^n}{n!}$ dizisinin monoton olmadığını, ama $n \geq 2$ için azalan olduğunu gösteriniz. Dizi sınırlı mıdır?
- d) Fibonacci dizisi (F_n) için her $n \in \mathbb{N}$ 'de $F_n \geq 1$ olduğunu, dizinin artan olduğunu ve $n \geq 2$ için $F_n \geq n - 1$ sağlandığını tümevarımla gösteriniz. Buradan dizinin üstten sınırsız olduğunu çıkarınız.
- e) $d_n = \frac{n^2}{2^n}$ dizisinin ilk beş terimini hesaplayınız ve dizinin $n \geq 3$ için kesin azalan olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

- a) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{5}{6}$.

Sınırlılık. Pay ve payda pozitif olduğundan $a_n > 0$. Üstten: $2n - 1 < 2n + 6 = 2(n + 3)$ olduğundan $a_n < 2$. Böylece $0 < a_n < 2$; dizi sınırlıdır.

Monotonluk. Fark testi:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+3)(n+4)}.$$

Payı açalım: $(2n+1)(n+3) = 2n^2 + 7n + 3$ ve $(2n-1)(n+4) = 2n^2 + 7n - 4$; fark 7'dir. Demek ki

$$a_{n+1} - a_n = \frac{7}{(n+3)(n+4)} > 0,$$

ve **Sonuç 19.1** ile dizi kesin artandır.

b) $|b_n| = \frac{n}{n+1} < 1$ olduğundan **Önerme 19.1** ile dizi sınırlıdır. İlk üç terim $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $b_3 = -\frac{3}{4}$ 'tür. $b_1 < b_2$ olduğundan azalan değil, $b_2 > b_3$ olduğundan artan değildir; dizi monoton değildir.

c) Terimler pozitifdir; oran

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}.$$

$n = 1$ için oran $\frac{3}{2} > 1$, yani $c_1 = 3 < c_2 = \frac{9}{2}$; $n = 2$ için oran 1, yani $c_3 = c_2 = \frac{9}{2}$; $n \geq 3$ için oran < 1 . Dizi, $c_1 < c_2$ olduğundan azalan değildir; $c_3 = \frac{9}{2} > c_4 = \frac{27}{8}$ olduğundan artan da değildir. Yani monoton değildir. Ama $n \geq 2$ için $\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq 1$ olduğundan $(c_n)_{n \geq 2}$ azalandır ve $n \geq 3$ 'ten itibaren kesin azalandır. Sınırlılık: $c_n > 0$ ve $n \geq 2$ için $c_n \leq c_2 = \frac{9}{2}$, ayrıca $c_1 = 3 \leq \frac{9}{2}$; dolayısıyla $0 < c_n \leq \frac{9}{2}$ ve dizi sınırlıdır.

d) $F_n \geq 1$. İki terime birden bakan bir tümevarımla: $F_1 = F_2 = 1 \geq 1$. $F_n \geq 1$ ve $F_{n+1} \geq 1$ ise $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq 2 \geq 1$. (Burada $P(n)$ olarak " $F_n \geq 1$ ve $F_{n+1} \geq 1$ " alınıp **Teorem 9.1** uygulanır.)

Artanlık. Her n için $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n \geq 1 > 0$; ayrıca $F_2 - F_1 = 0 \geq 0$. Yani her n için $F_{n+1} - F_n \geq 0$ ve **Sonuç 19.1** ile dizi artandır (kesin artan değildir: $F_1 = F_2$; ama $n \geq 2$ için kesin artandır).

$F_n \geq n - 1$ ($n \geq 2$). $n = 2$: $F_2 = 1 \geq 1$. $n \geq 2$ için doğru olsun: $F_n \geq n - 1$. O zaman $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq (n - 1) + 1 = n$; çünkü $F_{n-1} \geq 1$. Tümevarımla her $n \geq 2$ için doğrudur.

Sınırsızlık. $M > 0$ verilsin. **Sonuç 12.1** ile $n > M + 1$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır; $n \geq 2$ 'dir ve $F_n \geq n - 1 > M$. Hiçbir M üst sınır olamaz; dizi üstten sınırsızdır.

e) $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = 1$, $d_3 = \frac{9}{8}$, $d_4 = 1$, $d_5 = \frac{25}{32}$. Dizi önce artıp sonra azalıyor; $d_2 < d_3 > d_4$ olduğundan monoton değildir. Oran:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}.$$

Bu oranın 1'den küçük olması için $(n+1)^2 < 2n^2$, yani $n^2 + 2n + 1 < 2n^2$, yani $n^2 - 2n - 1 > 0$ gerekir. $n \geq 3$ için $n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0$. Demek ki $n \geq 3$ için $\frac{d_{n+1}}{d_n} < 1$ ve **Sonuç 19.1** ile $(d_n)_{n \geq 3}$ kesin azalandır. (Kontrol: $d_3 = \frac{9}{8} > d_4 = 1 > d_5 = \frac{25}{32}$.)

■

Dizilerin dilini ve iki temel davranış özelliğini öğrendik. Şimdi asıl soruya geçiyoruz: bir dizinin terimleri bir sayıya "yaklaşır" derken tam olarak ne demek istiyoruz? Bunun kesin tanımı ve ilk sonuçları için: **Dizilerde Yakınsaklık ve Limit.**

20. Dizilerde Yakınsaklık ve Limit

Önceki bölümde $\frac{(-1)^n}{n}$ dizisinin terimlerinin 0'a, $\frac{n}{n+1}$ dizisinin terimlerinin 1'e "yaklaştığını" gözlemledik; ama "yaklaşmak" sözcüğünü tanımlamadık. Bu bölümde analizin merkezi kavramı olan **limiti** diziler için kesin biçimde tanımlıyoruz. Tanım, matematiğin en ünlü ifadelerinden biridir: "her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_ε vardır ki..." Bu cümleyi okumayı, kullanmayı ve olumsuzlamayı öğrenmek, analizin geri kalanının anahtarıdır.

Tanımdan sonra ilk sonuçları kanıtlayacağız: limit varsa tektir; yakınsak her dizi sınırlıdır; limit mutlak değerle uyumludur. Ayrıca beş temel örnek üzerinde tanımı adım adım çalıştıracğız.

20.1 Yakınsaklık Tanımı

$\frac{1}{n}$ dizisini düşünelim. "Terimler 0'a yaklaşır" derken kastettiğimiz şudur: hangi hata payını (toleransı) seçersek seçelim, dizide yeterince ileri gidersek terimler 0'dan bu hata payından daha az uzakta kalır. Hata payına ε , "yeterince ileri"nin başladığı yere n_ε diyelim. Tanım tam olarak bunu söyler.

Tanım 20.1 (Dizinin Limiti ve Yakınsaklık). (a_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n \geq n_\varepsilon$ olan her $n \in \mathbb{N}$ 'de

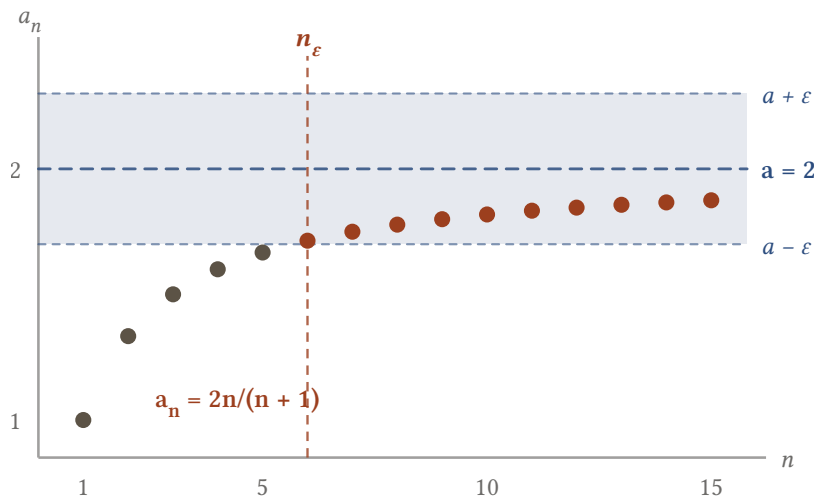
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (a_n) dizisi a sayısına **yakınsar** (converges) denir. Bu durumda (a_n) dizisine **yakınsak dizi** (convergent sequence), a sayısına dizinin **limiti** (limit) denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{ya da} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

yazılır. Sembolik olarak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$



Şekil 20.1: $a_n = 2n/(n+1)$ dizisi 2'ye yakınsar. Verilen ε için $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ bandı taranmıştır: n_ε 'dan önceki terimler bandın dışında kalabilir, ama n_ε 'dan itibaren bütün terimler bandın içindedir. Daha küçük bir ε daha dar bir bant ve genellikle daha büyük bir n_ε demektir.

Tanımı iki açıdan okuyalım.

- **Geometrik anlam.** Önerme 8.6 gereği $|a_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliği $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ ile, yani $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = B(a, \varepsilon)$ ile denktir (Tanım 15.1). Dizi a 'ya yakınsar demek, a 'nın her ε -komşuluğunun, bir yerden sonra dizinin **bütün** terimlerini içermesi demektir. Yukarıdaki grafikte bu, a etrafındaki yatay bandın n_ε 'den sonraki bütün noktaları yutması olarak görünür.
- **Mantıksal anlam.** ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin (bant ne kadar daraltılırsa daraltılsın), n_ε indisinden sonraki bütün terimler bandın içine düşmelidir. Bandın dışında yalnızca **sonlu sayıda** terim ($a_1, a_2, \dots, a_{n_\varepsilon-1}$) kalabilir. Bant daraldıkça n_ε büyür; yani dışarıda kalan terim sayısı artabilir, ama hep sonlu kalır.

Niceleyicilerin sırası tanımın özüdür: önce ε verilir, **sonra** ona bağlı bir n_ε bulunur. n_ε yazımındaki alt indis bu bağımlılığı hatırlatır. Sıra değişseydi (“öyle bir n_0 vardır ki her ε için...”) bambaşka ve çok daha güçlü bir koşul elde edilirdi: o koşul, dizinin bir yerden sonra sabit a olmasını gerektirir.

i Sıfır dizisi

Limiti 0 olan diziye **sıfır dizisi** (null sequence) denir. Her limit sorusu bir sıfır dizisi sorusuna çevrilebilir; çünkü tanımdaki eşitsizlik yalnızca $a_n - a$ farkına bakar.

Önerme 20.1 (Limitin Sıfır Dizisine İndirgenmesi). (a_n) bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.

İspat.

Üç ifadeyi de Tanım 20.1 ile açalım. $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için sağlanması istenen eşitsizlikler sırasıyla

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |(a_n - a) - 0| < \varepsilon, \quad ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$$

biçimindedir. $|(a_n - a) - 0| = |a_n - a|$ açıktır. Üçüncüsü için Teorem 8.1 (1) gereği $|a_n - a| \geq 0$ olduğundan $||a_n - a| - 0| = |a_n - a|$ 'dır. Yani üç eşitsizlik aynı eşitsizliktir; biri için işe yarayan n_ε ötekiler için de işe yarar.

■

Şimdi madalyonun öteki yüzü: yakınsamayan diziler.

Tanım 20.2 (İraksak Dizi). Hiçbir $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsamayan diziye **iraksak dizi** (divergent sequence) denir.

İraksaklığı göstermek için tanımın olumsuzlamasına ihtiyacımız var. Bunu dikkatle yazalım; çünkü niceleyicili bir önermenin olumsuzlaması sezgiyle değil, kuralla (Teorem 2.1) alınır.

Önerme 20.2 (Yakınsamamanın Sembolik İfadesi). (a_n) dizisi $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsamaz ancak ve ancak

$$\exists \varepsilon_a > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \text{ve} \quad |a_n - a| \geq \varepsilon_a.$$

Dolayısıyla (a_n) iraksaktır ancak ve ancak bu koşul **her** $a \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa.

İspat.

Tanım 20.1'ndeki sembolik ifadeye Teorem 2.1'yi adım adım uygulayalım: $\forall \varepsilon$ yerine $\exists \varepsilon$, $\exists n_\varepsilon$ yerine $\forall N$, $\forall n$ yerine $\exists n$ gelir ve en içteki $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ gerektirmesinin olumsuzlaması “ $n \geq N$ ve $|a_n - a| \geq \varepsilon$ ” olur (bir gerektirme yalnızca hipotezi doğru, sonucu yanlışken yanlıştır; Tanım 1.7). İraksaklık, “her a için yakınsamama” olduğundan ikinci ifade de tanımdan çıkar.

■

Sözle: (a_n) dizisinin a' 'ya yakınsamaması demek, öyle bir sabit hata payı ε_a bulunması demektir ki dizide ne kadar ileri gidersek gidelim (N ne kadar büyük olursa olsun), a' 'dan en az ε_a uzakta kalan bir terim $(a_n, n \geq N)$ yine bulunur. Başka bir deyişle, a' 'nın ε_a -komşuluğunun dışında **sonsuz sayıda** terim vardır.

20.2 Limitin Tekliği

Tanım “bir limit” der; peki bir dizinin iki farklı limiti olabilir mi? Sezgi hayır der: terimler hem a' 'ya hem de a' 'dan farklı bir b' 'ye keyfi yakınlıkta kalmaz. Bunu ispatlayalım.

Teorem 20.1 (Limitin Tekliği). *Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ise $a = b$ 'dir.*

İspat.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım: (a_n) dizisi hem a' 'ya hem b' 'ye yakınsasın ve $a \neq b$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin; $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ olduğundan tanımı iki kez uygulayabiliriz.

1. $\lim a_n = a$ olduğundan, $n \geq n_\varepsilon$ iken $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır.
2. $\lim a_n = b$ olduğundan, $n \geq n'_\varepsilon$ iken $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır.

$n = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ alalım; bu n için her iki eşitsizlik de geçerlidir. $a - b$ farkına a_n 'yi ekleyip çıkararak üçgen eşitsizliğini (Teorem 8.2) uygulayalım:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(Burada $|a - a_n| = |a_n - a|$ eşitliği Teorem 8.1 (3)'ten gelir.) Böylece $|a - b| < \varepsilon$ elde ettik; ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan bu, her pozitif ε için doğrudur.

Her pozitif sayıdan küçük olan tek negatif olmayan sayı 0'dır: gerçekten $|a - b| > 0$ olsaydı $\varepsilon = |a - b|$ seçerek $|a - b| < |a - b|$ çelişmesine düşerdik. O hâlde $|a - b| = 0$ ve Teorem 8.1 (2) ile $a = b$. Bu, $a \neq b$ varsayımıyla çelişir. Demek ki limit tektir.

■

Bu teorem, “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ” yazımını meşrulaştırır: yakınsak bir dizi için **dizinin limiti** diye tek bir sayıdan söz edebiliriz. Teorem olmasaydı $\lim a_n$ yazımı belirsiz kalırdı.

20.3 Tanımla Limit Hesaplama

Bir limiti tanımla göstermek, verilen her ε için işe yarayan bir n_ε **bulmak** demektir. Bunun bir reçetesi vardır; örneklere geçmeden önce onu yazalım.

❓ ε verildiğinde n_ε nasıl bulunur?

$\lim a_n = a$ olduğunu tanımla göstermek için:

1. **Uzaklığı sadeleştir.** $|a_n - a|$ ifadesini hesapla ve mümkün olduğunca sadeleştir. Gerekirse onu daha basit bir ifadeyle **üstten sınırla**: $|a_n - a| \leq c_n$ olacak, n cinsinden basit bir c_n bul (örneğin $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$). Amaç, ikinci adımda çözülebilecek bir eşitsizlik elde etmektir.
2. **Eşitsizliği n için çöz.** $c_n < \varepsilon$ eşitsizliğini “ $n > (\varepsilon$ 'a bağlı bir sayı)” biçimine getir.
3. **n_ε 'yi seç.** Bulduğun sayıyı aşan bir doğal sayı al; varlığı **Sonuç 12.1** ile güvence altındadır ve somut bir seçim taban fonksiyonuyla (Tanım 12.1) verilir: sayı $x > 0$ ise $n_\varepsilon = \lfloor x \rfloor + 1 > x$ alınır ($\lfloor x \rfloor \geq 0$ olduğundan bu gerçekten bir doğal sayıdır).
4. **Doğrula.** $n \geq n_\varepsilon$ olan her n için zinciri yeniden yaz: $|a_n - a| \leq c_n \leq c_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. (Bu adım, c_n 'nin azalan olmasını kullanır; değilse doğrudan $n > x$ 'ten $c_n < \varepsilon$ çıkarılır.)

İlk üç adım kâğıt üzerinde “çözüm arama”, dördüncü adım ise gerçek ispattır. Sınavda ve yazılı ispatta dördüncü adımı atlamayın.

Örnek 20.1 (Bir Bölü n Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $n \geq n_\varepsilon$ iken $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak bir n_ε arıyoruz.

Uzaklık. $n > 0$ olduğundan $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$.

Çözüm. $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ (iki yanı pozitif $n\varepsilon$ ile çarparak; **Önerme 7.9**).

Seçim. $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alalım; **Tanım 12.1** gereği $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ ve $n_\varepsilon \geq 1$ olduğundan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ 'dir. (Böyle bir n_ε 'nin varlığı doğrudan **Sonuç 12.2** ile de görülür.)

Doğrulama. $n \geq n_\varepsilon$ olsun. **Örnek 19.6** gereği $\frac{1}{n}$ dizisi azalandır; dolayısıyla

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Tanım sağlandı: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

■

Örnek 20.2 (Sabit Dizi). $c \in \mathbb{R}$ olsun. $(c, c, c, \dots)$ sabit dizisinin c 'ye yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.

$a_n = c$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her n için $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ 'dur; eşitsizlik **her** indiste sağlanır. Dolayısıyla $n_\varepsilon = 1$ seçmek yeter: $n \geq 1$ olan her n için $|a_n - c| < \varepsilon$. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

Bu örnekte $n_\varepsilon, \varepsilon$ 'a bağlı olmadı; tanım buna izin verir, yalnızca “bağlı olabilir” der.

■

Örnek 20.3 (İki n Bölü n Artı Bir Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin.

Uzaklık. Paydaları eşitleyelim:

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Üstten sınırlama. $n+1 > n$ olduğundan $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$. Daha basit olan $\frac{2}{n}$ ile çalışacağız.

Çözüm. $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$.

Seçim. $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$; o zaman $n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$.

Doğrulama. $n \geq n_\varepsilon$ olsun. O zaman $n > \frac{2}{\varepsilon}$, yani $\frac{2}{n} < \varepsilon$ ve

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Demek ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$. Örneğin $\varepsilon = 0,5$ için reçete $n_\varepsilon = \lfloor 4 \rfloor + 1 = 5$ verir ve $n \geq 5$ olan bütün terimler $(1,5; 2,5)$ bandının içindedir. Bölüm başındaki grafik de bu diziyi gösterir; orada $\varepsilon = 0,3$ alınmış ve $\frac{2}{n+1} < 0,3$ eşitsizliği doğrudan çözülerek $n_\varepsilon = 6$ bulunmuştur (reçetede kaba sınır $\frac{2}{n}$ ise $n_\varepsilon = 7$ verirdi; ikisi de işe yarar, çünkü n_ε tek değildir).

■

Örnek 20.4 (Üstten Sınırlayarak Limit). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu örnekte $\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon$ eşitsizliğini doğrudan n için çözmek zahmetlidir; sınırlama adımı işi kurtarır. $n \geq 1$ için $n+1 \leq n+n = 2n$ ve $n^2+1 > n^2$ olduğundan

$$\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| = \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin ve $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ olsun. $n \geq n_\varepsilon$ için $n > \frac{2}{\varepsilon}$, dolayısıyla

$$\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Böylece limit 0'dır. Sınırlama yaparken tek kural, “ $\leq$ ” zincirinin doğru yönde ilerlemesidir: uzaklığı **büyüten** ama daha basit bir ifadeye geçilir.

■

Örnek 20.5 (Bir Bölü n Üssü p Dizisi). $p > 0$ bir rasyonel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ olduğunu gösteriniz. Özel olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Çözüm.

Pozitif sayıların rasyonel kuvvetleri (Tanım 13.2) sıralamayı korur: $0 < x < y$ ve $q > 0$ rasyonel ise $x^q < y^q$; q tam sayı iken bu Teorem 11.3'nin, kesirli üs için ise kök fonksiyonunun kesin artan olmasının sonucudur. Bu olguyu kullanacağız.

$\varepsilon > 0$ verilsin.

Uzaklık. $n^p > 0$ olduğundan $\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p}$.

Çözüm. $\frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow n^p > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/p}$; son adımda iki yanın $\frac{1}{p}$ -inci kuvveti alındı ve kuvvetin sıralamayı koruması kullanıldı.

Seçim. Sonuç 12.1 ile $n_\varepsilon > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/p}$ olan bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ seçelim.

Doğrulama. $n \geq n_\varepsilon$ ise $n > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/p}$; iki yanın p -inci kuvvetini alınca $n^p > \frac{1}{\varepsilon}$, yani

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon.$$

Özel durumlar: $p = \frac{1}{2}$ için $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ve $p = 2$ için $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$. Sonuç her reel $p > 0$ için de doğrudur; reel üs tanımlandığında (ve sıralamayı koruduğu gösterildiğinde) aynı ispat kelimesi kelimesine geçerli kalır. Bu derste yalnızca rasyonel üsle çalışacağız.

■

Şimdi ıraksak bir dizi. $(-1)^n$ dizisi -1 ile 1 arasında gidip gelir; hiçbir sayıya yerleşmez. Bunu iki yöntemle göstereceğiz; ikinci yöntem Önerme 20.2'nin doğrudan kullanımudur.

Örnek 20.6 (Eksi Bir Üssü n Dizisi İraksaktır). $a_n = (-1)^n$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

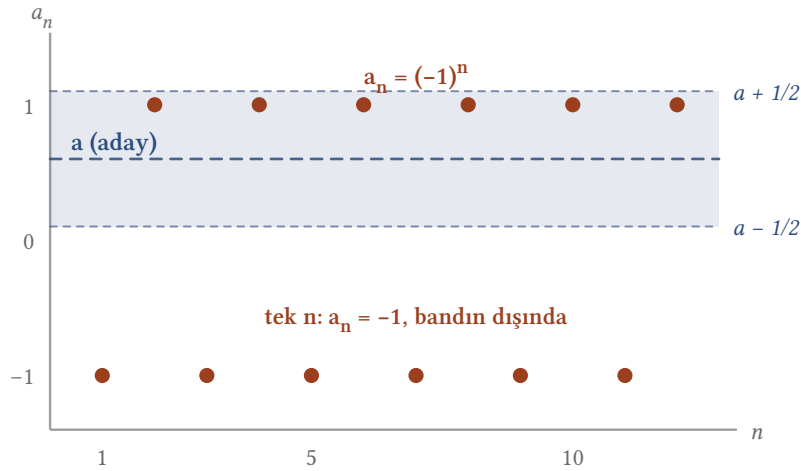
Birinci yol (olmayana ergi). Dizi yakınsak olsun ve limiti a olsun. Tanımda $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alalım: $n \geq n_\varepsilon$ olan her n için $|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}$ olan bir n_ε vardır.

- $n = 2n_\varepsilon$ çift ve $\geq n_\varepsilon$ 'dir: $|1 - a| < \frac{1}{2}$.
- $n = 2n_\varepsilon + 1$ tek ve $\geq n_\varepsilon$ 'dir: $|-1 - a| = |1 + a| < \frac{1}{2}$.

Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$2 < 1$ çelişkinine ulaştık. Demek ki dizi hiçbir a 'ya yakınsamaz; ıraksaktır.



Şekil 20.2: $(-1)^n$ dizisi hiçbir a 'ya yakınsamaz: $\varepsilon = 1/2$ alınınca $(a - 1/2, a + 1/2)$ bandının genişliği 1'dir ve 1 ile -1 'i aynı anda içeremez. Hangi aday seçilirse seçilsin terimlerin sonsuz çoğu bandın dışında kalır.

Grafiğin söylediği şudur: a nerede olursa olsun, $\frac{1}{2}$ yarıçaplı bant 1 ile -1 'in ikisini birden içeremez (uzaklıkları 2'dir); dizi ise her iki değeri sonsuz kez ziyaret eder.

İkinci yol (olumsuzlamayla). Önerme 20.2'yı her $a \in \mathbb{R}$ için doğrulayalım; $\varepsilon_a = 1$ her a için işe yarar. $N \in \mathbb{N}$ keyfi olsun.

- $a \geq 0$ ise $n = 2N + 1 \geq N$ (tek) alalım: $|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1$.
- $a < 0$ ise $n = 2N \geq N$ (çift) alalım: $|a_n - a| = |1 - a| = 1 - a > 1$.

Her iki durumda $n \geq N$ ve $|a_n - a| \geq 1 = \varepsilon_a$. Koşul her a için sağlandığından dizi iraksaktır.

■

İ Tanım üzerine üç not

1. **Sonlu sayıda terim önemsizdir.** Yakınsaklık dizinin “kuyruğuyla” ilgilidir: dizinin başındaki sonlu sayıda terimi değiştirmek, silmek ya da başa yeni terimler eklemek ne yakınsaklığı ne de limitin değerini değiştirir. Çünkü tanım yalnızca $n \geq n_\varepsilon$ koşulunu sağlayan sonsuz sayıda terime bakar; n_ε 'yi yeterince büyütmek değiştirilen terimleri devre dışı bırakır. (Bu gözlem ileride Tanım 24.2 ve Teorem 24.3 ile kesinleşecek.)
2. **n_ε , ε 'a bağlıdır ve tek değildir.** ε küçüldükçe (hata payı daraldıkça) n_ε genellikle büyür: dizide daha ileri gitmek gerekir. Öte yandan bir n_ε işe yarıyorsa ondan büyük her doğal sayı da işe yarar; bu yüzden “en küçük” n_ε 'yi bulmak gerekmez, herhangi biri yeter.
3. **Limit bir reel sayı olmalıdır.** Tanımda $a \in \mathbb{R}$ 'dir. $(1, 2, 3, \dots)$ gibi sınırsızca büyüyen bir dizi hiçbir reel sayıya yakınsamaz; reel sayılarda iraksaktır. Bu tür diziler için “sonsuz iraksama” kavramı ayrıca tanımlanacaktır: [Sonsuz Iraksayan Diziler ve Özel Limitler](#).

20.4 Yakınsak Diziler Sınırlıdır

Yakınsaklık ile önceki bölümde tanımladığımız sınırlılık arasındaki ilk bağ şudur: bir dizi bir sayıya yakınsıyorsa terimleri bir yerden sonra o sayının 1 yakınına sıkışır; öncesinde ise yalnızca sonlu sayıda terim vardır ve sonlu bir kümenin en büyüğü bulunur.

Teorem 20.2 (Yakınsak Diziler Sınırlıdır). Her yakınsak dizi sınırlıdır.

İspat.

(a_n) dizisi a sayısına yakınsasın. Tanımda $\varepsilon = 1$ alalım: $n \geq n_1$ olan her n için $|a_n - a| < 1$ olan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n 'ler için üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Böylece n_1 'den sonraki bütün terimler mutlak değerce $1 + |a|$ 'yı aşmaz. Geriye kalan $a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}$ terimleri sonlu sayıdadır; sonlu bir sayı kümesinin maksimumu vardır (Tanım 7.4). O hâlde

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1-1}|, 1 + |a|\}$$

alalım; $M \geq 1 + |a| > 0$ 'dır. ($n_1 = 1$ ise dışarıda kalan terim yoktur ve küme yalnızca $1 + |a|$ 'dan oluşur.) $n < n_1$ ise $|a_n|$ kümenin bir elemanı olduğundan $|a_n| \leq M$; $n \geq n_1$ ise $|a_n| < 1 + |a| \leq M$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$; Önerme 19.1 ile dizi sınırlıdır. ■

Teorem, yakınsaklık için bir **gerek koşul** verir: sınırlı olmayan bir dizi yakınsak olamaz. Karşıt tersini ayrıca kaydedelim.

Sonuç 20.1 (Sınırsız Diziler Iraksaktır). Sınırlı olmayan her dizi iraksaktır.

İspat.

Teorem 20.2'nin karşıt tersidir: “yakınsak $\Rightarrow$ sınırlı” önermesi “sınırlı değil $\Rightarrow$ yakınsak değil” ile denktir (Teorem 1.1). ■

⚠ Karşıtı doğru değildir

Sınırlı her dizi yakınsak **değildir**. $(-1)^n$ dizisi sınırlıdır ($|(-1)^n| = 1$), ama Örnek 20.6 gereği iraksaktır. Sınırlılık, yakınsaklığın gerek koşuludur; yeter koşulu değildir. Sınırlılığa **monotonluk** eklenince yeter koşul elde edilecektir (Teorem 23.1).

Örnek 20.7 (Sınırsızlıktan Iraksaklık). (n^2) ve $(-1)^n n$ dizilerinin iraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Örnek 19.4 (d) ve (e)'de bu iki dizinin sınırsız olduğunu Arşimet özelliğiyle göstermiştik. Sonuç 20.1 gereği ikisi de iraksaktır.

İkinci dizi öğreticidir: $(-1)^n n$ dizisi ne $+\infty$ 'a “gider” (tek indislerde negatiftir) ne de bir sayıya yaklaşır; yine de sınırsız olduğu için iraksaklığı tek satırda görülür. Tanımla uğraşmaya gerek kalmadı. ■

20.5 Mutlak Değer ve Limit

Bir dizi a 'ya yakınsıyorsa terimlerinin mutlak değerleri $|a|$ 'ya yakınsar. İspatın bütün yükünü ters üçgen eşitsizliği taşır.

Teorem 20.3 (Mutlak Değerin Limiti). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ 'dır.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow a$ olduğundan $n \geq n_\varepsilon$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olan bir n_ε vardır. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) her n için

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

verir. Dolayısıyla $n \geq n_\varepsilon$ için

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

Bu, Tanım 20.1'nin $(|a_n|)$ dizisi ve $|a|$ sayısı için sağlandığını söyler; aynı n_ε işe yarar.

⚠ Karşıtı genel olarak doğru değildir

$|a_n| \rightarrow |a|$ olması $a_n \rightarrow a$ olmasını gerektirmez. $a_n = (-1)^n$ için $|a_n| = 1 \rightarrow 1$ olur; ama (a_n) ıraksaktır. Mutlak değer, işaret bilgisini siler; $(|a_n|)$ dizisinin yakınsaması, (a_n) 'nin işaretinin yerleşmesi hakkında hiçbir şey söylemez. Tek istisna, limitin 0 olmasıdır.

Önerme 20.3 (Sıfır Limiti için Denklik). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

İspat.

Hern için $||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| = |a_n - 0|$ 'dir (Teorem 8.1 (1) gereği $|a_n| \geq 0$ olduğundan mutlak değerın mutlak değeri kendisidir). Yani iki dizi için tanımdaki eşitsizlikler aynıdır; biri için bulunan n_ε öteki için de geçerlidir. ($\Rightarrow$ yönü ayrıca Teorem 20.3'nin $a = 0$ özel hâlidir.)

Bu küçük önerme pratikte çok kullanışlıdır: işaret değiştiren bir dizinin sıfıra gittiğini göstermek için işareti atıp mutlak değerle çalışabiliriz.

Örnek 20.8 (İşaret Değiştiren Bir Sıfır Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ olsun. Teorem 8.1 (5) ve (6) ile

$$|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}.$$

Örnek 20.1 gereği $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, yani $|a_n| \rightarrow 0$. Önerme 20.3 ile $a_n \rightarrow 0$.

Doğrudan tanımla da görülebilir: $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ alınırsa $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Örnek 19.2'ndeki ilk grafik bu diziyi gösterir: terimler 0'ın bir sağına bir soluna düşse de 0'a sıkışır. Öte yandan Örnek 19.9'de gördüğümüz gibi bu dizi monoton değildir; yakınsaklık monotonluk gerektirmez.

20.6 Alıştırmalar

Alıştırma 20.1 (Yakınsaklık Üzerine Alıştırmalar).

- Tanımı kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ olduğunu gösteriniz.
- Tanımı kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ olduğunu gösteriniz.
- $a_n = 1 + (-1)^n$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.
- Bütün terimleri tam sayı olan bir (a_n) dizisi yakınsaksa dizinin bir yerden sonra sabit olduğunu, yani $n \geq N$ için $a_n = a_N$ olacak bir $N \in \mathbb{N}$ bulunduğunu gösteriniz.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $\varepsilon > 0$ verilsin. Uzaklık:

$$\left| \frac{3n+2}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n+2-3n-3}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

$n_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ alalım; $n \geq n_\varepsilon$ için $n > \frac{1}{\varepsilon}$, yani $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ve dolayısıyla $\left| \frac{3n+2}{n+1} - 3 \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Limit 3'tür.

b) $n^2 + 1 > n^2$ olduğundan her n için

$$\left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin; $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alınırsa $n \geq n_\varepsilon$ için $\frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Limit 0'dır.

c) Terimler $0, 2, 0, 2, \dots$ biçimindedir: n tekse $a_n = 0$, çiftse $a_n = 2$. **Önerme 20.2**'yi her $a \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon_a = 1$ ile doğrulayalım. $N \in \mathbb{N}$ keyfi olsun.

- $a \geq 1$ ise $n = 2N + 1 \geq N$ alalım: $|a_n - a| = |0 - a| = a \geq 1$.
- $a < 1$ ise $n = 2N \geq N$ alalım: $|a_n - a| = |2 - a| = 2 - a > 1$.

Her durumda $n \geq N$ ve $|a_n - a| \geq 1$. Dizi hiçbir a 'ya yakınsamaz; ıraksaktır. (Alternatif: dizi bir a sayısına yakınsasaydı, her n için $|(a_n - 1) - (a - 1)| = |a_n - a|$ olduğundan aynı n_ε 'lerle $a_n - 1 = (-1)^n$ dizisi de $a - 1$ 'e yakınsardı; bu, **Örnek 20.6** ile çelişir.)

d) (a_n) dizisi a 'ya yakınsasın; tanımda $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alalım: $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ olan bir N vardır. $n \geq N$ olan herhangi bir n için üçgen eşitsizliğiyle

$$|a_n - a_N| = |(a_n - a) + (a - a_N)| \leq |a_n - a| + |a - a_N| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$a_n - a_N$ bir tam sayıdır (**Önerme 11.1**). Mutlak değeri 1'den küçük olan tek tam sayı 0'dır: $k \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq 0$ ise k ya da $-k$ pozitif bir tam sayı, yani bir doğal sayıdır ve **Önerme 9.3** (1) gereği 1'den küçük olamaz; dolayısıyla $|k| \geq 1$. O hâlde $a_n - a_N = 0$, yani $n \geq N$ için $a_n = a_N$. Dizi N 'den sonra sabittir (ve limiti $a = a_N$ 'dir).

e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ 'dır, çünkü kök fonksiyonu kesin artandır. Eşleniğiyle çarpıp bölelim:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n} \geq \sqrt{n}$ olduğundan

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin. **Örnek 20.5** ($p = \frac{1}{2}$) gereği $n \geq n_\varepsilon$ iken $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ olan bir n_ε vardır; somut olarak $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ alınabilir, çünkü $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Bu n 'ler için $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Limit 0'dır.

■

Limit tanımını ve ilk sonuçlarını öğrendik; ama her limiti tanımla göstermek zahmetlidir. Bir sonraki bölümde toplamın, çarpımın ve bölümün limitini terimlerin limitlerinden hesaplamayı, eşitsizliklerin limite nasıl aktarıldığını ve iki dizi arasında sıkışan bir dizinin limitini bulmayı öğreneceğiz: **Limitin Cebirsel Özellikleri ve Sıkıştırma Teoremi**.

21. Limitin Cebirsel Özellikleri ve Sıkıştırma Teoremi

Önceki bölümde bir dizinin limitini ε - n_ε diliyle tanımladık ve birkaç limiti doğrudan tanımdan hesapladık. Ama her limiti tanımdan hesaplamak, her toplamı tek tek saymaya benzer: doğru ama yorucu. Bu bölümde limiti bir “işlem” gibi kullanmayı öğreneceğiz. Yakınsak dizileri toplar, çarpır, böler, kuvvetini ya da kökünü alırsak limit ne olur? Bir diziyi iki tanıdık dizi arasına sıkıştırabilirsek limitini söyleyebilir miyiz? Bölümün sonunda diziler dilini, daha önce kümeler için tanımladığımız supremum, yoğunluk, kapalılık ve kapanış kavramlarına da bağlayacağız: bu kavramların her birinin “dizisel” bir karşılığı vardır. Bölüm boyunca (a_n) , (b_n) reel sayı dizileridir; “ $a_n \rightarrow a$ ” yazımı $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ anlamındadır (Tanım 20.1).

21.1 Limitin Cebirsel Özellikleri

Sezgi şudur: a_n terimleri a 'ya, b_n terimleri b 'ye “çok yakın” ise $a_n + b_n$ de $a + b$ 'ye çok yakın olmalıdır. Aynı şey çarpım ve bölüm için de beklenir; ama çarpımda “yakınlık”ın büyük sayılarla çarpılınca büyümesi, bölümde ise paydanın sıfıra yaklaşmaması gibi teknik engeller vardır. Teorem bu engellerin nasıl aşıldığını gösterir.

Teorem 21.1 (Limit Aritmetiği). (a_n) ve (b_n) yakınsak diziler, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ olsun. O zaman:

1. **Toplam.** $(a_n + b_n)$ dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.
2. **Çarpım.** $(a_n b_n)$ dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$.
3. **Bölüm.** $b \neq 0$ ve her n için $b_n \neq 0$ ise $(\frac{a_n}{b_n})$ dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
4. **Skaler çarpım.** Her $k \in \mathbb{R}$ için (ka_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = ka$.

İspat.

1. **Toplam.** $\varepsilon > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow a$ olduğundan öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_1$ için $|a_n - a| < \varepsilon/2$; $b_n \rightarrow b$ olduğundan öyle bir n_2 vardır ki $n \geq n_2$ için $|b_n - b| < \varepsilon/2$. $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ alalım. $n \geq n_\varepsilon$ için üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. **Çarpım.** Önce uzaklığı, kontrol edebildiğimiz iki parçaya ayıralım. ab yerine ab_n ekleyip çıkararak

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b|.$$

Sağdaki $|b_n|$ çarpanı n 'ye bağlıdır; onu sabit bir sayıyla değiştirmeliyiz. (b_n) yakınsak olduğundan sınırlıdır (Teorem 20.2): her n için $|b_n| \leq M_1$ olacak bir $M_1 > 0$ vardır. $M = \max\{M_1, |a|\}$ diyelim; $M \geq M_1 > 0$ 'dır. Böylece her n için

$$|a_n b_n - ab| \leq M |a_n - a| + M |b_n - b|.$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. $n \geq n_1$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ve $n \geq n_2$ için $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak biçimde n_1, n_2 seçelim. $n \geq n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ için

$$|a_n b_n - ab| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

3. **Bölüm.** Önce $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ olduğunu gösterelim; sonra $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ yazıp çarpım kuralını uyguluyoruz. Adım 1: Payda sıfırdan uzak kalır. $b \neq 0$ olduğundan $\varepsilon_0 = |b|/2 > 0$ alabiliriz. $b_n \rightarrow b$ gereği öyle bir n_1 vardır ki $n \geq n_1$ için $|b_n - b| < |b|/2$. Ters üçgen eşitsizliğiyle (Sonuç 8.3) $|b_n| \geq |b| - |b_n - b|$ olduğundan, $n \geq n_1$ için

$$|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Yani belli bir yerden sonra b_n terimleri sıfırın $|b|/2$ yarıçaplı komşuluğunun dışındadır; bu, $1/b_n$ 'nin kontrolsüz büyümesini engeller.

Adım 2: Uzaklığı hesaplayalım. $n \geq n_1$ için

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| |b|} \leq \frac{|b_n - b|}{(|b|/2) |b|} = \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|.$$

(Ortadaki adımda $|b_n| > |b|/2$ olduğundan $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ kullanıldı; $b_n = b$ olan n 'lerde iki taraf da 0'dır, bu yüzden $\leq$ yazdık.)

Adım 3: n_2 'yi seçelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n \geq n_2$ için $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$ olacak biçimde n_2 seçelim. $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ için

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demek ki $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. Son olarak $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ olduğundan çarpım kuralıyla $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

4. Skaler çarpım. $k = 0$ ise (ka_n) sabit sıfır dizisidir ve limiti $0 = ka$ 'dır. $k \neq 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin; $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - a| < \varepsilon/|k|$ olacak biçimde n_ε seçelim. O zaman $n \geq n_\varepsilon$ için

$$|ka_n - ka| = |k| |a_n - a| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

(Bu, çarpım kuralında $b_n = k$ sabit dizisi alınarak da elde edilir.)

■

Bu teorem sayesinde limit hesabı bir “cebir” olur: karmaşık bir ifadenin limitini, parçalarının limitinden okuruz. Aşağıdaki sonuçlar teoremin doğrudan uygulamalarıdır.

Sonuç 21.1 (Limit Aritmetiğinin Sonuçları). $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ olsun. O zaman:

1. Her $p \in \mathbb{N}$ için $a_n^p \rightarrow a^p$; özel olarak $a_n^2 \rightarrow a^2$.
2. Her $c \in \mathbb{R}$ için $a_n + c \rightarrow a + c$.
3. $-a_n \rightarrow -a$.
4. $a_n - b_n \rightarrow a - b$.

İspat.

1. p üzerinden tümevarım (Teorem 9.1). $p = 1$ için iddia varsayımın kendisidir. $a_n^p \rightarrow a^p$ ise çarpım kuralıyla $a_n^{p+1} = a_n^p \cdot a_n \rightarrow a^p \cdot a = a^{p+1}$.

2. Sabit (c) dizisinin limiti c 'dir; toplam kuralı uygulanır.

3. Skaler çarpım kuralında $k = -1$ alınır.

4. $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$ yazılır; 3 ve toplam kuralı uygulanır.

■

💡 Rasyonel ifadelerde en yüksek dereceli terime bölme

Pay ve paydası n 'nin polinomu olan bir dizinin limiti hesaplanırken pay ve payda, paydadaki **en yüksek dereceli** terime bölünür. Böylece ifade, limitleri bilinen $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots$ dizilerinin (hepsi 0'a gider; Örnek 20.1 ve Sonuç 21.1) toplam, çarpım ve bölümlerine dönüşür; sonra Teorem 21.1 uygulanır. Bölüm kuralının koşulunu ($b \neq 0$) unutmayın: paydanın limiti sıfırsa bu kural çalışmaz.

Örnek 21.1 (Rasyonel İfadelerin Limiti). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n}{5n^3 + 3n - 1}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 5}{3n^2 - 2n}$

Çözüm.

a) Pay ve paydayı n^3 'e bölelim:

$$\frac{4n^3 + 2n}{5n^3 + 3n - 1} = \frac{4 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}.$$

$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ve $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$ olduğundan (Sonuç 21.1, 1) skaler çarpım ve toplam kurallarıyla pay $4 + 0 = 4$ 'e, payda $5 + 0 - 0 = 5$ 'e yakınsar. Payda limiti $5 \neq 0$ olduğundan bölüm kuralı uygulanabilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n}{5n^3 + 3n - 1} = \frac{4}{5}.$$

b) Paydadaki en yüksek dereceli terim n^2 'dir. Pay ve paydayı n^2 'ye bölelim:

$$\frac{7n - 5}{3n^2 - 2n} = \frac{\frac{7}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{2}{n}}.$$

Pay $0 - 0 = 0$ 'a, payda $3 - 0 = 3 \neq 0$ 'a yakınsar. Bölüm kuralıyla limit $\frac{0}{3} = 0$ 'dır.

■

21.2 Yakınsak ve İraksak Dizilerin Toplamı

Toplam, fark ve çarpım işlemleri yakınsak diziler arasında limitle uyumludur. Peki dizilerden biri ıraksaksa (Tanım 20.2) ne olur? Toplam için kesin bir şey söylenebilir.

Önerme 21.1 (Yakınsak Artı İraksak). (a_n) yakınsak, (b_n) ıraksak bir dizi ise $(a_n + b_n)$ toplam dizisi ıraksaktır.

İspat.

Olmayana ergi yöntemiyle. $(a_n + b_n)$ dizisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Her n için

$$b_n = (a_n + b_n) - a_n$$

yazılabilir. Sağ taraf, iki yakınsak dizinin farkıdır; Sonuç 21.1 (4) gereği yakınsaktır. O hâlde (b_n) yakınsak olmalıdır. Bu, (b_n) 'nin ıraksak olduğu varsayımıyla çelişir. Demek ki $(a_n + b_n)$ yakınsak olamaz.

■

Bu önerme bir “ıraksaklık testi” olarak da kullanılır: bir diziden yakınsak bir dizi çıkardığımızda ıraksak bir dizi kalıyorsa, dizinin kendisi ıraksaktır. Olası durumları toplayalım:

(a_n)	(b_n)	$(a_n + b_n)$
yakınsak	yakınsak	yakınsak (Teorem 21.1)
yakınsak	ıraksak	ıraksak (Önerme 21.1)
ıraksak	ıraksak	belirsiz: yakınsak da ıraksak da olabilir

⚠️ İraksak artı iraksak belirsizdir

$a_n = n^2$ ve $b_n = -n^2$ dizilerinin ikisi de iraksaktır (sınırsız olduklarından; [Sonuç 20.1](#)). Ama toplamı sabit (0) dizisidir ve yakınsaktır. Öte yandan $a_n = n^2$, $b_n = n^2$ alınırsa toplam $2n^2$ yine iraksaktır. Yani iki iraksak dizinin toplamı için genel bir kural yoktur.

Çarpım için de benzer bir belirsizlik vardır: $a_n = 0$ yakınsak, $b_n = (-1)^n$ iraksaktır ([Örnek 20.6](#)), ama çarpımları (0) yakınsaktır. Yakınsak çarpı iraksak, ancak yakınsak dizinin limiti **sıfırdan farklıysa** kesinlikle iraksaktır: $a_n \rightarrow a \neq 0$ ve $(a_n b_n)$ yakınsak olsaydı, belli bir n_0 'dan sonra $a_n \neq 0$ olacağından ([Teorem 20.3](#) ile $|a_n| \rightarrow |a| > 0$) bu n 'ler için $b_n = (a_n b_n)/a_n$ yazılır ve bölüm kuralı (b_n) 'nin kuyruğunun, dolayısıyla kendisinin yakınsak olduğunu verirdi (sonlu sayıda başlangıç terimi yakınsaklığı etkilemez; bu adım ileride [Teorem 24.3](#) ile ispatlanacaktır).

21.3 Sınırlı Dizi ile Sıfır Dizisinin Çarpımı

Çarpım kuralı iki dizinin de yakınsak olmasını ister. Ama bir çarpan sıfıra gidiyorsa, diğer çarpanın yakınsak olmasına gerek yoktur; sınırlı olması yeter. Bu, özellikle $\sin n$, $\cos n$, $(-1)^n$ gibi yakınsamayan ama sınırlı kalan çarpanlar içeren limitlerde çok işe yarar.

Teorem 21.2 (Sınırlı Dizi Çarpı Sıfır Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ve (b_n) sınırlı bir dizi ise $(a_n b_n)$ yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

İspat.

(b_n) sınırlı olduğundan ([Tanım 19.3](#) ve [Önerme 19.1](#)) her n için $|b_n| \leq M$ olacak bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow 0$ olduğundan öyle bir n_ε vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Bu n 'ler için

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Demek ki $a_n b_n \rightarrow 0$.

■

Örnek 21.2 (Sinüs Bölü n Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a_n = \frac{1}{n}$ ve $b_n = \sin n$ alalım. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 'dır ([Örnek 20.1](#)) ve her n için $|\sin n| \leq 1$ olduğundan $(\sin n)$ sınırlıdır. $(\sin n)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını bilmiyoruz (aslında yakınsak değildir; ama bunu göstermek kolay değildir). Bu yüzden çarpım kuralına başvuramayız. Ama [Teorem 21.2](#) tam bu durum içindir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0.$$

■

21.4 Limitlerde Sıralama

Limit, eşitsizlikleri korur mu? Her n için $a_n \leq b_n$ ise limitler için de $a \leq b$ olmasını bekleriz. Bu doğrudur; ancak kesin eşitsizliğin limitte kesinliğini yitirebileceğini göreceğiz.

Teorem 21.3 (Limitlerde Sıralama). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olsun. O zaman $a \leq b$.

İspat.

Olmayana ergi ile. $a > b$ olduğunu varsayalım ve

$$\varepsilon = \frac{a - b}{2} > 0$$

alalım. $a_n \rightarrow a$ olduğundan öyle bir n_1 vardır ki $n \geq n_1$ için $|a_n - a| < \varepsilon$, dolayısıyla

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

$b_n \rightarrow b$ olduğundan öyle bir n_2 vardır ki $n \geq n_2$ için $|b_n - b| < \varepsilon$, dolayısıyla

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

$n \geq \max\{n_1, n_2\}$ alalım. İki eşitsizliği birleştirirsek

$$b_n < \frac{a + b}{2} < a_n,$$

yani $b_n < a_n$ olur. Bu, her n için $a_n \leq b_n$ varsayımıyla çelişir. Demek ki $a \leq b$.

■

Sezgisel olarak $a > b$ olsaydı, a ve b 'nin ortasından geçen bir çizgi çekebilirdik; belli bir yerden sonra a_n 'ler çizginin üstünde, b_n 'ler altında kalırdı ve sıralama bozulurdu.

⚠ Kesin eşitsizlik limitte korunmaz

Diziler arasındaki eşitsizlik kesin ($<$) olsa bile limitler arasındaki eşitsizlik yalnızca $\leq$ biçiminde çıkar. Örneğin $a_n = 0$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ için her n 'de $a_n < b_n$ 'dir; ama $\lim a_n = 0 = \lim b_n$. Yani " $a_n < b_n \Rightarrow a < b$ " **yanlıştır**; doğru olan " $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$ "dir.

Teoremden diziler yerine sabitler alınırsa çok kullanılan bir sonuç elde edilir.

Sonuç 21.2 (Limit ve Sabit Sınırlar). $a_n \rightarrow a$ olsun.

1. Her n için $a_n \geq 0$ ise $a \geq 0$.
2. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her n için $\alpha \leq a_n \leq \beta$ ise $\alpha \leq a \leq \beta$. Başka bir deyişle, kapalı bir $[\alpha, \beta]$ aralığında kalan yakınsak bir dizinin limiti de bu aralıktadır.

İspat.

1. **Teorem 21.3**'ü sabit (0) dizisi ile (a_n) dizisine uygulayalım: her n için $0 \leq a_n$ ve sabit dizi 0'a yakınsadığından $0 \leq a$.

2. Sabit (α) dizisi α 'ya yakınsar; $\alpha \leq a_n$ olduğundan **Teorem 21.3** ile $\alpha \leq a$. Benzer biçimde $a_n \leq \beta$ ve sabit (β) dizisiyle $a \leq \beta$.

■

Sıralama teoreminin bir başka biçimi, bir diziyi sıfıra giden bir diziyle **mutlak değerce** karşılaştırmaktır. Bu sonucu sık sık kullanacağız.

Teorem 21.4 (Sıfır Dizisiyle Karşılaştırma). $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq |b_n|$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $b_n \rightarrow 0$ olduğundan öyle bir n_ε vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $|b_n| = |b_n - 0| < \varepsilon$. Aynı n 'ler için varsayım gereği

$$|a_n - 0| = |a_n| \leq |b_n| < \varepsilon.$$

Bu, tam olarak $a_n \rightarrow 0$ demektir.

■

i Koşulun belli bir yerden sonra sağlanması yeter

Sıralama ve karşılaştırma teoremlerinde “her n için” koşulu, “belli bir n_0 ’dan sonraki her n için” biçiminde gevşetilebilir. Çünkü yakınsaklık yalnızca dizinin kuyruğuna bağlıdır: sonlu sayıda terimi değiştirmek limiti değiştirmez (ileride [Teorem 24.3](#) ile ispatlanacak; teoremi n_0 -kuyruklarına uygulamak yeter). Aynı gevşetme aşağıdaki sıkıştırma teoremi için de geçerlidir. Ayrıca $|a_n| \leq C |b_n|$ ($C > 0$ sabit) biçimindeki bir karşılaştırma da yeter; çünkü $Cb_n \rightarrow 0$ ’dır.

21.5 Kuvvet ve Kök Dizileri

Yakınsak bir dizinin kuvvetlerinin limitini [Sonuç 21.1](#) ile zaten biliyoruz. Burada aynı sonucu, kök dizileri için de işe yarayan cebirsel bir özdeşlikle yeniden kuracağız. Kullanacağımız özdeşlik, her $c, d \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için geçerli olan

$$c^m - d^m = (c - d)(c^{m-1} + c^{m-2}d + \dots + c d^{m-2} + d^{m-1}) = (c - d) \sum_{k=0}^{m-1} c^{m-1-k} d^k \quad (1)$$

çarpanlara ayırmasıdır ([Lemma 13.1](#); sağ tarafı açınca ardışık terimler birbirini götürür, yalnızca c^m ile $-d^m$ kalır). Sigma yazımında $k = 0$ ve $k = m - 1$ terimleri $c^{m-1}d^0$ ve c^0d^{m-1} biçiminde görünür; [Tanım 11.5](#) 0^0 ’ı tanımsız bıraktığından burada $c^0 = d^0 = 1$ uzlaşımını kullanıyoruz (taban sıfır olsa bile). Bu bir kısaltmadan ibarettir: açık yazılıştaki söz konusu terimler zaten c^{m-1} ve d^{m-1} ’dir, dolayısıyla özdeşlik her $c, d \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. Negatif olmayan bir sayının m -inci kökünün var ve tek olduğunu [Teorem 13.2](#) ile biliyoruz; $x \geq 0$ için $x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$, m -inci kuvveti x olan tek negatif olmayan sayıdır. Kök alma sıralamayı korur: $0 \leq s < t$ ise $s^{1/m} < t^{1/m}$ olur (aksi hâlde $s^{1/m} \geq t^{1/m} \geq 0$ eşitsizliğinin m -inci kuvveti alınca $s \geq t$ çıkardı; negatif olmayan sayılarda kuvvet alma sıralamayı korur).

Teorem 21.5 (Kuvvet ve Kök Dizileri). $m \in \mathbb{N}$ sabit olsun.

1. **Kuvvet.** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = a^m$.
2. **Kök.** Her n için $a_n \geq 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$.

İspat.

1. **Kuvvet.** (1) özdeşliğinde $c = a_n$, $d = a$ alalım:

$$|a_n^m - a^m| = |a_n - a| \cdot \left| \sum_{k=0}^{m-1} a_n^{m-1-k} a^k \right|.$$

Sağdaki ikinci çarpanı sınırlayalım. (a_n) yakınsak olduğundan sınırlıdır ([Teorem 20.2](#)): her n için $|a_n| \leq M_1$ olacak bir $M_1 > 0$ vardır. $M = \max\{M_1, |a|\}$ diyelim. Toplamın her teriminde $|a_n^{m-1-k} a^k| \leq M^{m-1-k} M^k = M^{m-1}$ olduğundan, genelleştirilmiş üçgen eşitsizliğiyle ([Teorem 9.7](#))

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} a_n^{m-1-k} a^k \right| \leq m M^{m-1} =: K.$$

Böylece her n için $|a_n^m - a^m| \leq K |a_n - a|$. $a_n \rightarrow a$ olduğundan $K |a_n - a| \rightarrow K \cdot 0 = 0$ (skaler çarpım kuralı ve [Teorem 20.3](#)). [Teorem 21.4](#) gereği $a_n^m - a^m \rightarrow 0$, yani $a_n^m \rightarrow a^m$ ([Sonuç 21.1](#), 2).

2. **Kök.** Önce $a \geq 0$ olduğuna dikkat edelim: $a_n \geq 0$ olduğundan [Sonuç 21.2](#) ile $a \geq 0$; dolayısıyla $\sqrt[m]{a}$ tanımlıdır. İki durum vardır.

Durum $a = 0$. $\varepsilon > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow 0$ ve $a_n \geq 0$ olduğundan öyle bir n_ε vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $0 \leq a_n < \varepsilon^m$. Kök alma sıralamayı koruduğundan bu n ’ler için

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \sqrt[m]{\varepsilon^m} = \varepsilon,$$

yani $|\sqrt[m]{a_n} - 0| < \varepsilon$. Demek ki $\sqrt[m]{a_n} \rightarrow 0 = \sqrt[m]{0}$.

Durum $a > 0$. $x_n = \sqrt[m]{a_n} \geq 0$ ve $y = \sqrt[m]{a} > 0$ yazalım. (1) özdeşliğinde $c = x_n$, $d = y$ alırsak

$$a_n - a = x_n^m - y^m = (x_n - y) \sum_{k=0}^{m-1} x_n^{m-1-k} y^k.$$

Toplamdaki her terim negatif değildir ve $k = m - 1$ terimi $x_n^0 y^{m-1} = y^{m-1} > 0$ 'dır (yukarıdaki $c^0 = 1$ uzlaşımı gereği; $a_n = 0$ olan indislerde $x_n = 0$ olabilir); dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{m-1} x_n^{m-1-k} y^k \geq y^{m-1} > 0.$$

Bu, toplamın **alttan** pozitif bir sabitle sınırlı olduğunu söyler. Mutlak değer alıp bu sabite bölersek her n için

$$|x_n - y| = \frac{|a_n - a|}{\sum_{k=0}^{m-1} x_n^{m-1-k} y^k} \leq \frac{|a_n - a|}{y^{m-1}}.$$

Sağ taraf $\frac{1}{y^{m-1}} \cdot |a_n - a| \rightarrow 0$ olduğundan Teorem 21.4 ile $x_n - y \rightarrow 0$, yani $\sqrt[m]{a_n} \rightarrow \sqrt[m]{a}$.

■

Bu teorem, limit işlemini kök işaretinin içine sokmamıza izin verir: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim a_n}$. Örneğin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1.$$

21.6 Sıkıştırma Teoremi

Bazen bir dizinin limitini doğrudan hesaplayamayız ama diziye, limitleri bilinen ve aynı sayıya giden iki dizi arasına sıkıştırabiliriz. O zaman ortadaki dizinin de aynı limite gitmekten başka çaresi yoktur.

Teorem 21.6 (Sıkıştırma Teoremi). $(a_n), (b_n), (c_n)$ dizileri her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ eşitsizliğini sağlasın. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ise (c_n) dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow L$ olduğundan öyle bir n_1 vardır ki $n \geq n_1$ için $|a_n - L| < \varepsilon$, özellikle $L - \varepsilon < a_n, b_n \rightarrow L$ olduğundan öyle bir n_2 vardır ki $n \geq n_2$ için $|b_n - L| < \varepsilon$, özellikle $b_n < L + \varepsilon, n \geq n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ için varsayım ile birleştirirsek

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon,$$

yani $|c_n - L| < \varepsilon$. Bu, $c_n \rightarrow L$ demektir.

■

İspat (limit aritmetiğiyle).

Eşitsizlikten a_n çıkaralım: $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$. Sonuç 21.1 (4) ile $b_n - a_n \rightarrow L - L = 0$; Teorem 21.4 ile $c_n - a_n \rightarrow 0$. O hâlde toplam kuralıyla $c_n = (c_n - a_n) + a_n \rightarrow 0 + L = L$.

■

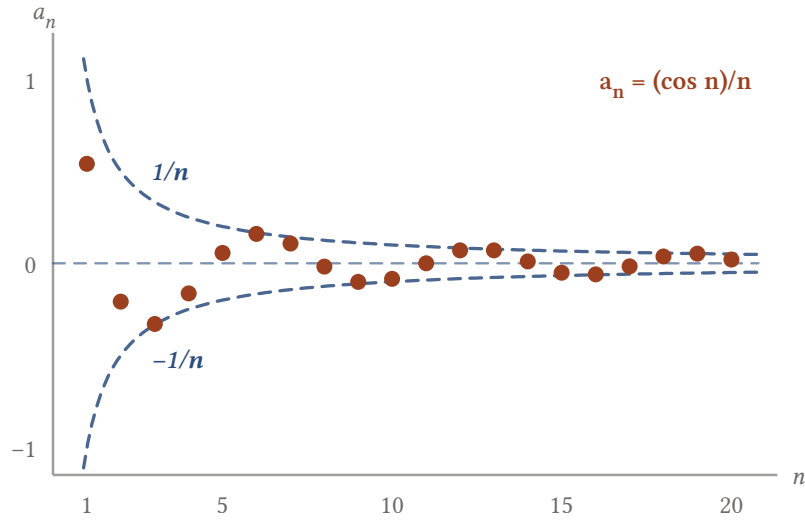
Teoremin gücü, (c_n) hakkında hiçbir yakınsaklık varsayımı yapmamasındadır: yakınsaklık, sıkıştırmanın bir sonucudur. Dikkat: eşitsizliğin sonlu sayıda n için bozulması önemli değildir (yukarıdaki nota bakınız).

Örnek 21.3 (Kosinüs Bölü n Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq \cos n \leq 1$ 'dir. Eşitsizliğin her tarafını pozitif n sayısına bölersek

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$



Şekil 21.1: $(\cos n)/n$ dizisinin terimleri $-1/n$ ile $1/n$ arasında kalır. İki zarf da 0'a gittiğinden aradaki dizi 0'a sıkışır; terimlerin işaretinin düzensiz olması sonucu değiştirmez.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan (Örnek 20.1 ve skaler çarpım kuralı) Teorem 21.6 gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

(Aynı sonuç Teorem 21.2 ile de elde edilir: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ve $(\cos n)$ sınırlıdır.)

⚠ Sınır dizilerinin limitleri farklıysa sıkıştırma çalışmaz

$a_n \leq c_n \leq b_n$ olsa bile $\lim a_n \neq \lim b_n$ ise ortadaki dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin $a_n = -1$, $b_n = 1$ ve $c_n = (-1)^n$ için $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ eşitsizliği her zaman doğrudur; ama sınır dizilerinin limitleri $-1 \neq 1$ farklıdır ve ortadaki $((-1)^n)$ dizisi ıraksaktır (Örnek 20.6). Sıkıştırma teoreminde iki sınır dizisinin **aynı** limite gitmesi vazgeçilmezdir.

Sıkıştırma teoremi, terim sayısı n ile artan toplamların limitini bulmakta özellikle etkilidir.

Örnek 21.4 (Terim Sayısı Artan Bir Toplam). Genel terimi

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm.

Toplamda n terim vardır ve bunların en büyüğü $k = 1$, en küçüğü $k = n$ olan terimdir (k büyüdükçe payda büyür). Her terimi en küçük terimle ve en büyük terimle karşılaştırsak

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq c_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Sınır dizilerinin limitlerini hesaplayalım. Pay ve paydayı $n = \sqrt{n^2}$ 'ye bölerek

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

$1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ ve $1 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1$ olduğundan [Teorem 21.5](#) (kök, $m = 2$) ile karekökleri $\sqrt{1} = 1$ 'e gider; bölüm kuralıyla iki sınır dizisi de 1'e yakınsar. [Teorem 21.6](#) gereği $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

■

21.7 Supremum ve İnfimumun Dizilerle Karakterizasyonu

Supremum, “kümenin ulaşabildiği ama geçemediği” sayıdır ([Tanım 10.4](#)). [Teorem 10.1](#) bunu ε diliyle söyler: $L = \sup A$ ise L 'nin her ε -komşuluğunda A 'dan bir eleman vardır. Aynı düşünceyi diziyle ifade edelim: $\varepsilon = 1/n$ alıp her n için bir eleman seçersek, L 'ye yakınsayan bir A -dizisi elde ederiz.

Teorem 21.7 (Supremumun Dizilerle Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan, üstten sınırlı bir küme ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $\sup A = L$ olması için gerek ve yeter koşul, şu ikisinin birlikte sağlanmasıdır:

1. L , A 'nın bir üst sınırıdır (her $x \in A$ için $x \leq L$);
2. A içinde L 'ye yakınsayan bir dizi vardır: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ olacak biçimde (a_n) , her $a_n \in A$.

Bu durumda dizi elbette her n için $a_n \leq L$ koşulunu da sağlar.

İspat.

($\Rightarrow$) $\sup A = L$ olsun. Supremum bir üst sınır olduğundan 1 sağlanır. 2 için [Teorem 10.1](#)'u kullanalım: her $\varepsilon > 0$ için $L - \varepsilon < a$ olacak bir $a \in A$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = 1/n$ alıp

$$L - \frac{1}{n} < a_n \leq L$$

sağlayan bir $a_n \in A$ seçelim (sağdaki eşitsizlik L 'nin üst sınır olmasından). $L - \frac{1}{n} \rightarrow L$ ([Örnek 20.1](#) ve [Sonuç 21.1](#)) ve sabit (L) dizisi L 'ye gittiğinden [Teorem 21.6](#) ile $a_n \rightarrow L$.

($\Leftarrow$) 1 ve 2 sağlansın. L bir üst sınırdır; en küçük üst sınır olduğunu göstermek için L 'den küçük hiçbir sayının üst sınır olamayacağını görelim. $L' < L$ olsun ve $\varepsilon = L - L' > 0$ alalım. $a_n \rightarrow L$ olduğundan öyle bir n vardır ki $|a_n - L| < \varepsilon$, dolayısıyla

$$a_n > L - \varepsilon = L'.$$

$a_n \in A$ olduğundan L' , A 'nın üst sınırı değildir. Demek ki üst sınırların en küçüğü L 'dir: $\sup A = L$.

■

⚠ Yalnızca $a_n \leq L$ koşulu yetmez

Teoremin 1. koşulu “ L , **kümenin** üst sınırı” der; yalnızca dizinin terimlerinin L 'yi aşmaması ($a_n \leq L$) yetmez. Örneğin $A = [0, 2]$ ve $L = 1$ alalım. $a_n = 1 - \frac{1}{n} \in A$ dizisi 1'e yakınsar ve $a_n \leq 1$ 'dir; ama $\sup A = 2 \neq 1$. Sorun, 1'in A 'nın üst sınırı olmamasıdır.

İnfimum için tamamen simetrik bir sonuç geçerlidir.

Teorem 21.8 (İnfimumun Dizilerle Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan, alttan sınırlı bir küme ve $M \in \mathbb{R}$ olsun. $\inf A = M$ olması için gerek ve yeter koşul, M 'nin A 'nın bir alt sınırı olması ve A içinde M 'ye yakınsayan bir (a_n) dizisinin bulunmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$) $\inf A = M$ olsun; M bir alt sınırdır. [Teorem 10.2](#) gereği her n için $M \leq a_n < M + \frac{1}{n}$ sağlayan bir $a_n \in A$ seçilebilir. $M + \frac{1}{n} \rightarrow M$ olduğundan [Teorem 21.6](#) ile $a_n \rightarrow M$.

($\Leftarrow$) M alt sınır ve $a_n \rightarrow M$, $a_n \in A$ olsun. $M' > M$ herhangi bir sayı olsun; $\varepsilon = M' - M > 0$ için öyle bir n vardır ki $|a_n - M| < \varepsilon$, dolayısıyla $a_n < M + \varepsilon = M'$. $a_n \in A$ olduğundan M' alt sınır değildir. O hâlde M , alt sınırların en büyüğüdür: $\inf A = M$.

■

Örnek 21.5 (İnfimumu Diziyle Bulma). $A = \left\{ \frac{2m}{n^2} : m, n \in \mathbb{N}, n < m \right\}$ kümesi için $\inf A = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

A 'nın her elemanı pozitifdir; dolayısıyla 0 bir alt sınırdır ve A boş değildir (örneğin $m = 2, n = 1$ için $4 \in A$). **Teorem 21.8** gereği A içinde 0'a yakınsayan bir dizi bulmak yeter.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $m = n + 1$ seçelim; $n < m$ sağlandığından

$$a_n = \frac{2(n+1)}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \in A.$$

$\frac{2}{n} \rightarrow 0$ ve $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$ olduğundan toplam kuralıyla $a_n \rightarrow 0$. O hâlde $\inf A = 0$.

Not: $0 \notin A$ olduğundan bu küme bir minimuma sahip değildir; infimum kümeye ait olmayabilir.

■

21.8 Yoğunluk, Kapalılık ve Kapanışın Dizilerle Karakterizasyonu

Topoloji bölümlerinde komşuluklarla tanımladığımız kavramların her biri, “bir dizinin limiti olmak” diliyle yeniden ifade edilebilir. Anahtar gözlem hep aynıdır: bir x noktasının **her** komşuluğu A ile kesişiyorsa, $\varepsilon = 1/n$ komşuluklarından birer eleman seçerek x 'e yakınsayan bir A -dizisi kurabiliriz.

i Kapanış ve değme noktası

$\bar{A}$ kapanışı (**Tanım 17.5**), A 'nın bütün değme noktalarının (**Tanım 17.4**) kümesidir: $x \in \bar{A}$ olması, x 'in her komşuluğunun (**Tanım 15.1**) A ile kesişmesi demektir. **Teorem 17.2** gereği $\bar{A} = A \cup A'$ ’dür; burada A' yığılma noktalarının kümesidir (**Tanım 17.1**). Gerçekten $x \in A$ ise her komşuluğu x 'i içerdiğinden A ile kesişir; $x \notin A$ ise komşuluklarının A ile kesişmesi, delinmiş komşuluklarının kesişmesiyle aynı şeydir ve bu $x \in A'$ demektir.

Teorem 21.9 (Yoğunluğun Dizilerle Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A 'nın $\mathbb{R}$ 'de yoğun olması ($\bar{A} = \mathbb{R}$; **Tanım 17.6**) için gerek ve yeter koşul, her reel sayının A içinden bir dizinin limiti olmasıdır:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n), (\forall n, a_n \in A) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

İspat.

($\Rightarrow$) $\bar{A} = \mathbb{R}$ olsun ve $x \in \mathbb{R}$ alalım. $x \in \bar{A}$ olduğundan yukarıdaki not gereği x 'in her komşuluğu A ile kesişir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \cap A \neq \emptyset$$

olduğundan bu kesişimden bir a_n seçelim. O zaman her n için $|a_n - x| < \frac{1}{n}$. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan **Teorem 21.4** ile $a_n - x \rightarrow 0$, yani $a_n \rightarrow x$.

($\Leftarrow$) Her reel sayı A 'dan bir dizinin limiti olsun. $x \in \mathbb{R}$ alalım; A içinde $a_n \rightarrow x$ olacak bir (a_n) vardır. x 'in herhangi bir $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğunu alalım. Limit tanımı gereği öyle bir n vardır ki $|a_n - x| < \varepsilon$, yani $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$. Demek ki x 'in her komşuluğu A ile kesişir; $x \in \bar{A}$. x keyfi olduğundan $\bar{A} = \mathbb{R}$.

■

Sonuç 21.3 (Her Reel Sayı Rasyonel Bir Dizinin Limitidir). Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ olacak biçimde rasyonel terimli bir (q_n) dizisi vardır. Aynı şey irrasyonel terimli diziler için de geçerlidir.

İspat.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x - \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n}$ olduğundan **Teorem 13.5** gereği bu iki sayı arasında bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. O zaman $|q_n - x| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$; **Teorem 21.4** ile $q_n \rightarrow x$. İrrasyonel dizi için **Teorem 13.6** aynı biçimde kullanılır.

■

Örneğin $\sqrt{2}$ sayısına yakınsayan rasyonel dizi olarak ondalık açılımın kesilmiş hâllerini alabiliriz: 1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; ...

Şimdi kapalı kümelerle geçelim. Sezgi: kapalı bir küme “sınırını içerir”; dolayısıyla içindeki bir dizi bir noktaya yaklaşıyorsa o nokta da kümede olmalıdır. Bu sezgi tam olarak doğrudur ve kapalılığı **karakterize** eder.

Teorem 21.10 (Kapalılığın Dizilerle Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A 'nın kapalı olması (Tanım 16.1) için gerek ve yeter koşul, A içindeki her yakınsak dizinin limitinin de A 'da olmasıdır:

$$A \text{ kapalı} \Leftrightarrow \left(\forall (a_n), \left(\forall n, a_n \in A \right) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow a \in A \right).$$

İspat.

($\Rightarrow$) A kapalı olsun; (a_n) , A içinde bir dizi ve $a_n \rightarrow a$ olsun. $a \notin A$ olduğunu varsayalım. O zaman $a \in \mathbb{R} \setminus A$ 'dır. A kapalı olduğundan tümleyeni $\mathbb{R} \setminus A$ açıktır (Tanım 16.1); açık küme tanımı (Tanım 15.4) gereği a 'nın tümleyende kalan bir komşuluğu vardır:

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \text{ olacak biçimde } \varepsilon > 0.$$

Öte yandan $a_n \rightarrow a$ olduğundan bu ε için öyle bir n vardır ki $|a_n - a| < \varepsilon$, yani $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ama $a_n \in A$ 'dır; A 'nın bir elemanı $\mathbb{R} \setminus A$ 'da olamaz. Çelişki. Demek ki $a \in A$.

($\Leftarrow$) A içindeki her yakınsak dizinin limiti A 'da olsun. A 'nın kapalı olmadığını varsayalım. O zaman $\mathbb{R} \setminus A$ açık değildir; yani öyle bir $b \in \mathbb{R} \setminus A$ vardır ki b 'nin hiçbir komşuluğu $\mathbb{R} \setminus A$ 'nın içinde kalmaz. Bu, b 'nin her komşuluğunun A ile kesiştiği anlamına gelir. Özel olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) \cap A \neq \emptyset;$$

buradan bir a_n seçelim. Her n için $a_n \in A$ ve $|a_n - b| < \frac{1}{n}$ olduğundan Teorem 21.4 ile $a_n \rightarrow b$. Varsayım gereği bu dizinin limiti A 'da olmalıdır: $b \in A$. Ama $b \in \mathbb{R} \setminus A$ seçmiştik. Çelişki. Demek ki A kapalıdır. ■

Bu teorem, bir kümenin kapalı olduğunu göstermenin en pratik yolunu verir: kümedeki keyfi bir yakınsak dizi alınır ve limitinin kümede kaldığı gösterilir. Kapalı olmadığını göstermek içinse limiti kümeden kaçan tek bir dizi yeter.

Örnek 21.6 (Dizisel Ölçütü Kapalılık).

- $[0, 1]$ kapalı aralığının kapalı bir küme olduğunu dizisel ölçütü gösteriniz.
- $(0, 1]$ kümesinin kapalı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) (a_n) , $[0, 1]$ içinde yakınsak bir dizi ve $a_n \rightarrow a$ olsun. Her n için $0 \leq a_n \leq 1$ olduğundan Sonuç 21.2 ile $0 \leq a \leq 1$, yani $a \in [0, 1]$. Teorem 21.10 gereği $[0, 1]$ kapalıdır. (Aynı akıl yürütme her $[\alpha, \beta]$ kapalı aralığı için geçerlidir.)

b) $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin her terimi $(0, 1]$ içindedir ve $a_n \rightarrow 0$ (Örnek 20.1). Ama $0 \notin (0, 1]$. Kümedeki bir yakınsak dizinin limiti kümenin dışına düştüğünden Teorem 21.10 gereği $(0, 1]$ kapalı değildir. ■

Son olarak kapanış: bir kümeye “dizilerle ulaşılabilen” noktaların kümesi tam olarak kapanıştır.

Teorem 21.11 (Kapanışın Dizilerle Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $a \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul, A içinde a 'ya yakınsayan bir dizinin bulunmasıdır:

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n), \left(\forall n, a_n \in A \right) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

İspat.

($\Rightarrow$) $a \in \overline{A}$ olsun. Yukarıdaki not gereği a 'nın her komşuluğu A ile kesişir. Her n için $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap A$ kümesinden bir a_n seçelim; $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ olduğundan Teorem 21.4 ile $a_n \rightarrow a$.

($\Leftarrow$) A içinde $a_n \rightarrow a$ olacak bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Limit tanımı gereği öyle bir n vardır ki $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; $a_n \in A$ olduğundan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Yani a 'nın her komşuluğu A ile kesişir; a bir değme noktasıdır ve $a \in \bar{A}$.

■

Sonuç 21.4 (Yığılma Noktalarının Dizilerle Karakterizasyonu). $a \in \mathbb{R}$ sayısının A 'nın bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul, $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan bir dizinin bulunmasıdır. Başka bir deyişle: terimleri A 'da, a 'dan farklı ve a 'ya yakınsayan bir (a_n) dizisi vardır.

İspat.

a 'nın A 'nın yığılma noktası olması (Tanım 17.1), a 'nın her delinmiş komşuluğunun (Tanım 15.2) A ile kesişmesi, yani her komşuluğunun $A \setminus \{a\}$ ile kesişmesi demektir. Bu da yukarıdaki not gereği $a \in \bar{A} \setminus \{a\}$ olmasına denktir. Teorem 21.11'yi $A \setminus \{a\}$ kümesine uygularsak iddia çıkar.

■

Bu sonuç, ileride fonksiyon limitinin dizisel ölçütünde (Teorem 28.1) temel rol oynayacak: bir noktada limit sorabilmek için o noktaya tanım kümesinden, noktanın kendisine uğramadan yaklaşan bir dizi gerekir.

21.9 Alıştırmalar

Alıştırma 21.1 (Limit İşlemleri ve Sıkıştırma).

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5}$ limitini hesaplayınız.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ limitini hesaplayınız.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} = 0$ olduğunu gösteriniz.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} = 0$ olduğunu sıkıştırma teoremiyle gösteriniz.
- $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi için $\sup A = 1$ olduğunu diziler yardımıyla gösteriniz ve A 'nın kapalı olmadığını açıklayınız.

Çözüm.

a) Pay ve paydayı n^2 'ye bölelim:

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}.$$

Pay $3 - 0 + 0 = 3$ 'e, payda $2 + 0 = 2 \neq 0$ 'a yakınsar. Teorem 21.1 (bölüm) ile limit $\frac{3}{2}$ 'dir.

b) $\sqrt{n^2 + n} - n$ ifadesi " $\infty - \infty$ " görünümündedir; doğrudan limit alamayız. Eşleniğiyle çarpıp bölelim:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}.$$

Pay ve paydayı n 'ye bölelim ($n = \sqrt{n^2}$ olduğundan kökün içine n^2 olarak girer):

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

$1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ olduğundan Teorem 21.5 ile $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$; payda $1 + 1 = 2 \neq 0$ 'a gider. Bölüm kuralıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) = \frac{1}{2}.$$

c) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ve $b_n = (-1)^n$ yazalım. (b_n) sınırlıdır ($|b_n| = 1$). Pay ve paydayı n^2 'ye bölerek

$$a_n = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

Teorem 21.2 gereği $a_n b_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \rightarrow 0$. (Alternatif: $\left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ve **Teorem 21.4.**)

d) Toplamda n terim vardır; her terim pozitifdir ve en büyüğü $k = 1$ olan terimdir. Dolayısıyla

$$0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} \leq n \cdot \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Sabit (0) dizisi ve $\frac{1}{n}$ dizisi ikisi de 0'a gittiğinden **Teorem 21.6** gereği toplam da 0'a gider.

e) Her n için $\frac{n}{n+1} < 1$ olduğundan 1, A 'nın bir üst sınırıdır; A boş değildir. $a_n = \frac{n}{n+1} \in A$ dizisi için pay ve paydayı n 'ye bölerek

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Teorem 21.7'nin iki koşulu da sağlandığından $\sup A = 1$.

A 'nın kapalı olmadığını görmek için aynı diziyi kullanalım: (a_n) , A içinde yakınsak bir dizidir ve limiti 1'dir. Ama $1 \notin A$; çünkü $\frac{n}{n+1} = 1$ eşitliği $n = n + 1$ gerektirir ve hiçbir doğal sayı için sağlanmaz. Kümedeki bir yakınsak dizinin limiti kümenin dışında kaldığından **Teorem 21.10** gereği A kapalı değildir.

Aslında $\overline{A} = A \cup \{1\}$ 'dir. **Teorem 21.11** ile $1 \in \overline{A}$. Öte yandan $x \neq 1$ olan hiçbir x , A 'nın yığılma noktası değildir: $x > 1$ ise $(1, 2x - 1)$ komşuluğu A 'dan hiç eleman içermez (bütün elemanlar 1'den küçüktür). $x < 1$ ise $\delta = \frac{1-x}{2}$ alalım; $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ elemanının $(x - \delta, x + \delta)$ içinde olması için $1 - \frac{1}{n+1} < x + \delta = \frac{1+x}{2}$, yani $n + 1 < \frac{2}{1-x}$ gerekir; bu yalnızca sonlu sayıda n için mümkündür. Yığılma noktasının her komşuluğu sonsuz çoklukta eleman içerdiğinden (**Teorem 17.1**) x yığılma noktası olamaz.

■

Bu bölümde limit hesabının araç kutusunu doldurduk: cebirsel kurallar, sıralama, kök alma ve sıkıştırma. Ama bütün bu araçlar limitin bir **reel sayı** olduğu durumlar içindir. n , n^2 , 2^n gibi sınırsız büyüyen diziler için "limit $+\infty$ 'dur" demek ne anlama gelir, bu sonsuz limitlerle nasıl hesap yapılır ve $\sqrt[n]{n}$, a^n , $\frac{n^p}{b^n}$ gibi sık karşılaşılan dizilerin limitleri nedir? Sonraki bölüm bu sorulara ayrılmıştır: **Sonsuza İraksayan Diziler ve Özel Limitler**.

22. Sonsuza İraksayan Diziler ve Özel Limitler

Şimdiye kadar “limit” dediğimizde hep bir reel sayıyı kastettik (Tanım 20.1). Oysa $1, 2, 3, \dots$ ya da $1, 4, 9, 16, \dots$ gibi diziler hiçbir reel sayıya yakınsamaz; ama davranışları da $(-1)^n$ gibi “kararsız” değildir: terimler tek bir yönde, sınırsızca büyür. Bu bölümde önce bu davranışa bir ad vereceğiz — “dizi $+\infty$ ’a ıraksar” — ve sonsuz limitlerle hangi işlemlerin güvenle yapılabildiğini, hangilerinin **belirsiz** kaldığını göreceğiz.

Bölümün ikinci yarısı, analizde tekrar tekrar karşımıza çıkacak birkaç özel limite ayrılmıştır: $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, $|a| < 1$ için $a^n \rightarrow 0$, oran testi ve $n^p, b^n, n!, n^n$ dizilerinin büyüme hızlarının karşılaştırılması. Bu limitlerin ispatlarında iki eski dostumuz sürekli iş başında olacak: Bernoulli eşitsizliği (Teorem 9.5) ve sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6).

22.1 Sonsuza İraksama

Sezgi şudur: $a_n = n^2$ dizisinin terimleri, hangi tavanı seçersek seçelim, bir yerden sonra o tavanı aşar ve bir daha altına inmez. Yakınsaklık tanımındaki “ ε dar bandı” yerine burada “ M yüksek tavanı” vardır.

Tanım 22.1 (Sonsuza İraksama). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

- Her $M > 0$ reel sayısı için öyle bir $n_M \in \mathbb{N}$ varsa ki $n \geq n_M$ olan her n için $a_n > M$ sağlanıyorsa, (a_n) dizisi **$+\infty$ ’a ıraksar** (diverges to $+\infty$) denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_M \Rightarrow a_n > M)$$

yazılır.

- Her $M > 0$ reel sayısı için öyle bir $n_M \in \mathbb{N}$ varsa ki $n \geq n_M$ olan her n için $a_n < -M$ sağlanıyorsa, (a_n) dizisi **$-\infty$ ’a ıraksar** denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_M \Rightarrow a_n < -M)$$

yazılır.

Bu iki durumda dizinin **sonsuz limiti** vardır denir; $a_n \rightarrow +\infty$ ve $a_n \rightarrow -\infty$ kısaltmaları da kullanılır.

Tanımı okuyalım: $+\infty$ ’a ıraksamak, “hangi M tavanı verilirse verilsin, belli bir n_M indisinden sonra **bütün** terimlerin bu tavanın üstünde kalması” demektir. Tavanı ara sıra aşmak yetmez; aşp üstte kalmak gerekir. $-M$ tavanının altına inmek de simetrik biçimde $-\infty$ ’a ıraksamayı verir. Tanımda $M > 0$ yerine “her $M \in \mathbb{R}$ ” de yazılabilirdi: $M \leq 0$ için $M' = 1$ tavanına ait $n_{M'}$ indisi işi görür.

⚠ $+\infty$ ve $-\infty$ sayı değildir

$+\infty$ ve $-\infty$ birer reel sayı değildir; $\mathbb{R}$ ’nin aksiyomları onlar için geçerli değildir. “ $\lim a_n = +\infty$ ” yazımı, sonsuza **eşit** bir sayı bulduğumuz anlamına gelmez; yalnızca dizinin sınırsız büyüme davranışını kodlayan bir kısaltmadır. Bu yüzden $+\infty$ ’a ıraksayan bir dizi, Tanım 20.2 anlamında **ıraksaktır**: reel bir limiti yoktur. Bunu hemen aşağıda ispatlayacağız.

Önerme 22.1 (Sonsuza İraksayan Dizi Sınırsızdır). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ise (a_n) üstten sınırlı değildir; dolayısıyla yakınsak da değildir. Öte yandan (a_n) alttan sınırlıdır. ($-\infty$ için ifade simetriktir: dizi alttan sınırsız, üstten sınırlıdır ve yakınsak değildir.)

İspat.

$K \in \mathbb{R}$ herhangi bir sayı olsun; K 'nin üst sınır olmadığını gösterelim. $M = \max\{K, 1\} > 0$ alalım. Tanım gereği öyle bir n_M vardır ki $a_{n_M} > M \geq K$. Demek ki hiçbir K üst sınır değildir; (a_n) üstten sınırsızdır (Tanım 19.3). Yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 20.2) (a_n) yakınsak olamaz. Alttan sınırlılık için tanımda $M = 1$ alalım: $n \geq n_1$ için $a_n > 1$. Geriye kalan sonlu sayıda terimi de hesaba katarak $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}, 1\}$ diyelim; her n için $a_n \geq m$ 'dir.

■

Önermenin karşıtı doğru değildir: sınırsız her dizi $+\infty$ 'a iraksamaz. Bunu görmek için tanımın olumsuzlamasını yazalım (Teorem 2.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, a_n \leq M.$$

Yani “öyle bir M tavanı vardır ki dizide ne kadar ileri gidersek gidelim, tavanın altında kalan bir terim daha buluruz.”

Örnek 22.1 (Sonsuza İraksayan Diziler). Aşağıdaki dizilerin sonsuz limitlerini tanımdan gösteriniz.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} -(2^n) = -\infty$ (dikkat: dizi $-(2^n)$ 'dir, $(-2)^n$ değil)

Çözüm.

a) $M > 0$ verilsin. $n_M = \lfloor M \rfloor + 1$ alalım (Tanım 12.1); $\lfloor M \rfloor \geq 0$ olduğundan $n_M \in \mathbb{N}$ 'dir ve Teorem 12.3 gereği $M < \lfloor M \rfloor + 1 = n_M$. O hâlde $n \geq n_M$ için $n \geq n_M > M$.

b) $M > 0$ verilsin. $\sqrt{M}$ sayısı vardır (Teorem 13.2); $n_M = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$ alalım. $n \geq n_M$ için $n > \sqrt{M} > 0$, ve pozitif sayılarda kare alma sıralamayı koruduğundan (Önerme 7.12) $n^2 > (\sqrt{M})^2 = M$.

c) Önce 2^n 'nin n 'den büyük olduğunu görelim: Bernoulli eşitsizliğiyle (Teorem 9.5)

$$2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n \cdot 1 > n.$$

$M > 0$ verilsin ve $n_M = \lfloor M \rfloor + 1$ alalım. $n \geq n_M$ için $2^n > n \geq n_M > M$, dolayısıyla $-(2^n) < -M$ (Önerme 7.3). Tanım gereği $-(2^n) \rightarrow -\infty$.

■

Örnek 22.2 (Sınırsız Ama Sonsuza Gitmeyen Dizi).

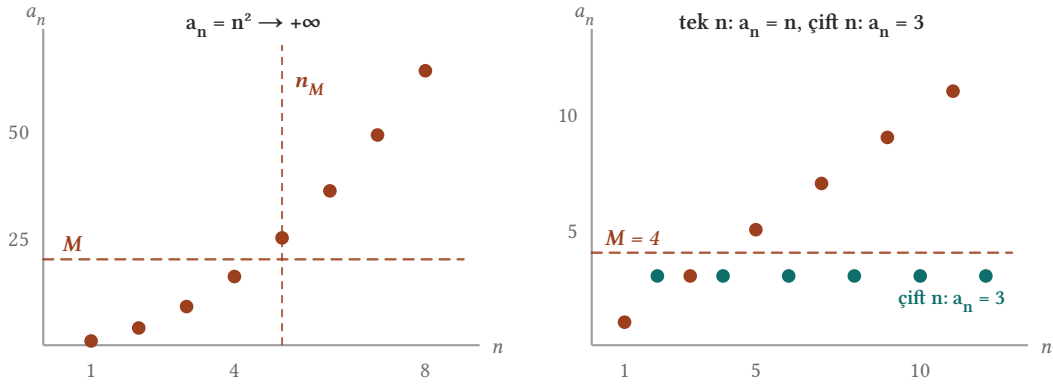
$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ tek ise} \\ 3, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dizisinin sınırsız olduğunu, ama $+\infty$ 'a iraksamadığını gösteriniz.

Çözüm.

Tek indisli terimler $a_1 = 1, a_3 = 3, a_5 = 5, \dots$ her tavanı aşar: K verildiğinde $n = 2\lfloor K \rfloor + 3$ tek sayısı için $a_n = n > K$. Demek ki dizi üstten sınırsızdır ve Teorem 20.2 gereği yakınsak değildir.

Buna karşın dizi $+\infty$ 'a iraksamaz. Olumsuzlamadaki M olarak $M = 4$ alalım. Hangi N verilirse verilsin, N 'den büyük bir çift sayı n seçebiliriz (örneğin $n = 2N$); bu n için $a_n = 3 \leq 4$. Yani dizi 4 tavanının üstünde **kalamaz**: çift indislerde hep 3'e geri döner.



Şekil 22.1: Solda n^2 dizisi $+\infty$ 'a ıraksar: her M için bir n_M vardır ve ondan sonraki bütün terimler M 'yi aşar. Sağdaki dizi sınırsızdır ama $+\infty$ 'a gitmez: tek indisli terimler büyürken çift indisli terimler hep 3'te kalır, dolayısıyla $M=4$ çizgisinin üstünde sonsuza dek kalmamaz.

Şekildeki iki panel farklı özetler: n^2 dizisi M tavanını n_M 'den sonra bir daha altına inmemek üzere aşar; yukarıdaki dizi ise tavanı sürekli aşıp geri iner. Sonsuza ıraksamak, “tek yönlü ve kalıcı” büyüme ister.

■

Buna göre bir dizi için tam üç olasılık vardır: yakınsar (reel limit), sonsuz limiti vardır ($+\infty$ ya da $-\infty$) ya da hiçbirini (örneğin $(-1)^n$, ya da yukarıdaki dizi). Son iki grup birlikte “ıraksak” dizileri oluşturur. $-\infty$ ile ilgili her sonuç, işaret değiştirilerek $+\infty$ 'a indirgenebilir:

Önerme 22.2 (Eksi Sonsuz ve İşaret Değiştirme). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$ olmasıdır.

İspat.

$M > 0$ için “ $a_n < -M$ ” ile “ $-a_n > M$ ” aynı eşitsizliktir: Önerme 7.3 gereği ($x < y \Leftrightarrow -y < -x$ denkliğinde $x = a_n$, $y = -M$ alınır) biri sağlanıyorsa öteki de sağlanır. Dolayısıyla tanımın iki biçimi, aynı n_M indisleriyle sağlanır.

■

22.2 Sonsuz Limitlerle İşlemler

$+\infty$ bir sayı olmadığından Teorem 21.1’ni sonsuz limitlere doğrudan uygulayamayız. Ama bazı durumlarda sonuç yine de kesindir; bazılarında ise “belirsiz” kalır. Kural şudur: sonsuzlukların **birbirini desteklediği** işlemler güvenlidir; **birbiriyle yarıştığı** işlemler belirsizdir.

Teorem 22.1 (Sonsuz Limitlerde Toplam). (a_n) ve (b_n) reel sayı dizileri olsun.

1. $\lim a_n = +\infty$ ve $\lim b_n = +\infty$ ise $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
2. $\lim a_n = -\infty$ ve $\lim b_n = -\infty$ ise $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.
3. $\lim a_n = +\infty$ ve (b_n) alttan sınırlı (özel olarak: yakınsak) ise $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

İspat.

1. $M > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow +\infty$ olduğundan öyle bir n_1 vardır ki $n \geq n_1$ için $a_n > M/2$; $b_n \rightarrow +\infty$ olduğundan öyle bir n_2 vardır ki $n \geq n_2$ için $b_n > M/2$. $n_M = \max\{n_1, n_2\}$ alalım; $n \geq n_M$ için

$$a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

2. Önerme 22.2 gereği $-a_n \rightarrow +\infty$ ve $-b_n \rightarrow +\infty$; 1’den $-(a_n + b_n) = (-a_n) + (-b_n) \rightarrow +\infty$, yani yine Önerme 22.2 ile $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

3. (b_n) alttan sınırlı olsun: her n için $b_n \geq m$ olacak bir $m \in \mathbb{R}$ vardır (yakınsak bir dizi sınırlıdır, [Teorem 20.2](#); dolayısıyla alttan sınırlıdır). $M > 0$ verilsin. $M + |m| > 0$ olduğundan öyle bir n_M vardır ki $n \geq n_M$ için $a_n > M + |m|$. Bu n 'ler için

$$a_n + b_n > M + |m| + m \geq M,$$

çünkü $|m| + m \geq 0$ 'dır.

■

Teorem, “ $\infty + \infty = \infty$ ” ve “ $\infty + (\text{alttan sınırlı}) = \infty$ ” kurallarının kesin karşılığıdır. Üçüncü maddede (b_n) 'nin sınırlı olması istenmez, alttan sınırlı olması yeter: (b_n) yukarıya doğru serbestçe büyüyebilir, çünkü bu yalnızca toplamı daha da büyütür. Ama “ $\infty - \infty$ ” için böyle bir kural yoktur.

⚠ $\infty - \infty$ belirsizdir

$\lim a_n = +\infty$ ve $\lim b_n = -\infty$ ise $(a_n + b_n)$ hakkında genel olarak hiçbir şey söylenemez; sonuç örneğe göre değişir:

- $a_n = n^2, b_n = -n$: $a_n + b_n = n^2 - n = n(n-1) \geq n-1 \rightarrow +\infty$.
- $a_n = n, b_n = -n^2$: $a_n + b_n = n - n^2 \rightarrow -\infty$.
- $a_n = n, b_n = -n$: $a_n + b_n = 0 \rightarrow 0$.
- $a_n = n + (-1)^n, b_n = -n$: $a_n + b_n = (-1)^n$ iraksaktır ve sonsuz limiti de yoktur ([Örnek 20.6](#)).

Bu tür ifadeler **belirsiz biçim** (indeterminate form) denir; limiti bulmak için ifadeyi cebirsel olarak yeniden düzenlemek gerekir (önceki bölümdeki $\sqrt{n^2 + n} - n$ örneğini hatırlayın).

Teorem 22.2 (Sonsuz Limitlerde Çarpım). $\lim a_n = +\infty$ olsun.

1. $\lim b_n = b > 0$ ya da $\lim b_n = +\infty$ ise $\lim(a_n b_n) = +\infty$.
2. $\lim b_n = b < 0$ ya da $\lim b_n = -\infty$ ise $\lim(a_n b_n) = -\infty$.

İspat.

1. İki durum vardır.

Durum $\lim b_n = b > 0$. $m = b/2 > 0$ diyelim. $b_n \rightarrow b$ olduğundan $\varepsilon = b/2$ için öyle bir n_1 vardır ki $n \geq n_1$ için $|b_n - b| < b/2$, dolayısıyla $b_n > b - b/2 = m$. Şimdi $M > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow +\infty$ olduğundan öyle bir n_2 vardır ki $n \geq n_2$ için $a_n > M/m$ (bu da $a_n > 0$ demektir). $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ için her iki çarpan pozitif olduğundan eşitsizlikler çarpılabilir:

$$a_n b_n > \frac{M}{m} \cdot m = M.$$

Durum $\lim b_n = +\infty$. $M > 0$ verilsin. $n \geq n_1$ için $a_n > M$ ve $n \geq n_2$ için $b_n > 1$ olacak biçimde n_1, n_2 seçelim. $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ için $a_n b_n > M \cdot 1 = M$.

2. $\lim b_n = b < 0$ ise $\lim(-b_n) = -b > 0$; $\lim b_n = -\infty$ ise [Önerme 22.2](#) ile $\lim(-b_n) = +\infty$. Her iki hâlde 1 gereği $a_n(-b_n) = -(a_n b_n) \rightarrow +\infty$, yani $a_n b_n \rightarrow -\infty$.

■

$\lim a_n = -\infty$ için de simetrik kurallar geçerlidir: $a_n = -(-a_n)$ yazılıp teorem $(-a_n)$ 'ye uygulanır. Örneğin $a_n \rightarrow -\infty$ ve $b_n \rightarrow b > 0$ ise $a_n b_n \rightarrow -\infty$; $a_n \rightarrow -\infty$ ve $b_n \rightarrow -\infty$ ise $a_n b_n \rightarrow +\infty$. (b_n) 'nin limiti varken teoremin dışında kalan tek durum, bu limitin sıfır olmasıdır.

⚠ $0 \cdot \infty$ belirsizdir

$\lim a_n = +\infty$ ve $\lim b_n = 0$ ise $(a_n b_n)$ için genel kural yoktur:

- $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}: a_n b_n = n \rightarrow +\infty$.
- $a_n = n, b_n = \frac{1}{n^2}: a_n b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.
- $a_n = n, b_n = \frac{(-1)^n}{n}: a_n b_n = (-1)^n$ ıraksaktır.
- $a_n = n, b_n = \frac{5}{n}: a_n b_n = 5 \rightarrow 5$.

Sonsuzluk “büyütmeye”, sıfır “küçültmeye” çalışır; hangisinin kazanacağı ifadeye bağlıdır.

Sonsuz limitle sıfır limiti arasında, terimler pozitifken çok temiz bir ilişki vardır: biri diğerinin tersidir.

Teorem 22.3 (Pozitif Terimli Dizide Ters Alma). (a_n) pozitif terimli bir dizi olsun (her n için $a_n > 0$). O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

İspat.

$(\Rightarrow)$ $a_n \rightarrow +\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin; $M = 1/\varepsilon > 0$ tavanı için öyle bir n_M vardır ki $n \geq n_M$ için $a_n > M = 1/\varepsilon$. Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirdiğinden (Önerme 7.10) bu n 'ler için

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \quad \text{yani} \quad \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Demek ki $1/a_n \rightarrow 0$.

$(\Leftarrow)$ $1/a_n \rightarrow 0$ olsun. $M > 0$ verilsin; $\varepsilon = 1/M > 0$ için öyle bir n_ε vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $|1/a_n| < \varepsilon$. $a_n > 0$ olduğundan bu, $0 < 1/a_n < 1/M$ demektir; ters alınca $a_n > M$. Demek ki $a_n \rightarrow +\infty$.

■

Teorem iki yönde de kullanılır: sonsuza giden bir dizinin tersi sıfıra gider; **pozitif** terimli bir sıfır dizisinin tersi $+\infty$ 'a gider. Negatif terimli sıfır dizisi için tersi $-\infty$ 'a gider (Önerme 22.2).

⚠ İşaret koşulu vazgeçilmezdir

$a_n \rightarrow 0$ ama terimlerin işareti değişiyorsa $1/a_n$ 'nin sonsuz limiti olmayabilir. Örneğin $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ 'dır; ama $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ dizisi bir büyük pozitif, bir büyük negatif değer alır: sınırsızdır, dolayısıyla ıraksaktır, ama ne $+\infty$ 'a ne de $-\infty$ 'a gider.

Örnek 22.3 (Rasyonel Kuvvetler). $p > 0$ bir rasyonel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Pozitif bir sayının rasyonel kuvveti Tanım 13.2 ile tanımlıdır ve pozitif sayılarda $x \mapsto x^p$ ($p > 0$) sıralamayı korur (Örnek 20.5'deki açıklama); ayrıca $x > 0$ için Teorem 13.4 (3) gereği $(x^{1/p})^p = x^{(1/p) \cdot p} = x$ 'tir. $M > 0$ verilsin ve $n_M = \lfloor M^{1/p} \rfloor + 1$ alalım. $n \geq n_M$ için $n > M^{1/p} > 0$; her iki tarafın p -inci kuvvetini alırsak $n^p > (M^{1/p})^p = M$. Demek ki $n^p \rightarrow +\infty$. Terimler pozitif olduğundan Teorem 22.3 gereği $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$.

(Dizilerde yakınsaklık bölümünde $1/n^p \rightarrow 0$ limitini tanımdan göstermiştik, Örnek 20.5; burada aynı sonuç ters alma teoreminden çıkıyor.)

■

Son olarak, sıralama sonsuz limitlere de aktarılır: sonsuza giden bir dizinin **üstündeki** her dizi de sonsuza gider.

Teorem 22.4 (Sonsuz Limitlerde Sıralama). Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olsun.

1. $\lim a_n = +\infty$ ise $\lim b_n = +\infty$.

2. $\lim b_n = -\infty$ ise $\lim a_n = -\infty$.

İspat.

1. $M > 0$ verilsin. $a_n \rightarrow +\infty$ olduğundan öyle bir n_M vardır ki $n \geq n_M$ için $a_n > M$. Aynı n 'ler için varsayım ile $b_n \geq a_n > M$. Demek ki $b_n \rightarrow +\infty$.

2. $-b_n \leq -a_n$ ve **Önerme 22.2** ile $-b_n \rightarrow +\infty$; 1 gereği $-a_n \rightarrow +\infty$, yani $a_n \rightarrow -\infty$.

■

Bu teorem, sonsuz limitler için “sıkıştırma”nın tek taraflı sürümüdür: alttan sonsuza itilen dizi sonsuza gider. Yakınsak diziler için olduğu gibi (önceki bölümdeki not), $a_n \leq b_n$ koşulunun yalnızca belli bir indisten sonra sağlanması yeter.

Örnek 22.4 (Sıralamayla Sonsuz Limit). Aşağıdaki limitleri gösteriniz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$

Çözüm.

a) Her n için $n \leq n^2 + n$ ve $\lim n = +\infty$ (**Örnek 22.1**). **Teorem 22.4** gereği $n^2 + n \rightarrow +\infty$.

b) Her n için $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \geq n$ (çarpımdaki diğer çarpanların her biri ≥ 1 'dir) ve $2^n > n$ (Bernoulli, yukarıdaki örnek). İkisi de $n \rightarrow +\infty$ ile sıralama teoreminden çıkar.

c) Her n için $n^{1/2} = \sqrt{n}$, **Örnek 22.3**'da $p = 1/2$ alınarak $+\infty$ 'a gider. Doğrudan da görülebilir: $M > 0$ için $n_M = \lfloor M^2 \rfloor + 1$ alınırsa $n \geq n_M$ için $n > M^2$, kök alma sıralamayı koruduğundan $\sqrt{n} > M$.

■

Örnek 22.5 (Sonsuz Limit Hesabı). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n+3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n})$

Çözüm.

a) Pay ve payda sonsuza gittiğinden (“ ∞/∞ ” biçimi) bölüm kuralı uygulanamaz. İfadeyi, sonsuza giden bir çarpanla yakınsak bir çarpanın çarpımı olarak yazalım:

$$\frac{2n^2+1}{n+3} = n \cdot \frac{2n^2+1}{n^2+3n} = n \cdot \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}}.$$

İkinci çarpan **Teorem 21.1** ile $\frac{2+0}{1+0} = 2 > 0$ 'a yakınsar; ilk çarpan $+\infty$ 'a gider. **Teorem 22.2** (1) gereği limit $+\infty$ 'dur.

b) $n - \sqrt{n}$ bir “ $\infty - \infty$ ” biçimidir. Çarpanlara ayırılım: $n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)$. $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ (**Örnek 22.4**) ve $\sqrt{n} - 1 \rightarrow +\infty$ (**Teorem 22.1** (3)), sabit -1 dizisi alttan sınırlıdır. **Teorem 22.2** (1) ile çarpım $+\infty$ 'a gider.

■

22.3 Özel Limitler

Bu kesimde, ileride seriler ve fonksiyonlar incelenirken sık sık başvuracağımız birkaç limiti tek tek ispatlayacağız. Hepsinde ortak strateji şudur: ilgilendiğimiz diziyi $1 + b_n$ ya da $(1 + b_n)^n$ biçiminde yazıp b_n 'yi Bernoulli eşitsizliği veya binom açılımıyla (**Teorem 9.6**) sıkıştırmak.

Hatırlatma: $a > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, n -inci kuvveti a olan tek pozitif sayıdır (**Teorem 13.2**, **Tanım 13.2**). Pozitif sayılarda kök alma ve kuvvet alma sıralamayı korur: $0 < s < t$ ise $s^{1/n} < t^{1/n}$ ve $s^n < t^n$ (**Teorem 11.3** (4)); kök için önceki bölümde **Teorem 21.5**'den önce verdiğimiz gerekçe).

22.3.1 n-inci Kök Dizileri

Teorem 22.5 (Sabit Sayının n-inci Kökü). $a > 0$ bir reel sayı ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

İspat.

Durum $a \geq 1$. Önce $a^{1/n} \geq 1$ olduğunu görelim: $a^{1/n} < 1$ olsaydı, kuvvet alma sıralamayı koruduğundan $a = (a^{1/n})^n < 1^n = 1$ olurdu; çelişki. O hâlde $b_n = a^{1/n} - 1 \geq 0$ yazabiliriz. $a^{1/n} = 1 + b_n$ eşitliğinin n-inci kuvvetini alıp Bernoulli eşitsizliğini (Teorem 9.5, $b_n \geq 0 \geq -1$) uygularsak

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

Buradan $nb_n \leq a - 1$, yani

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

$\frac{a-1}{n} = (a-1) \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (Örnek 20.1 ve skaler çarpım) ve sabit 0 dizisi 0'a gittiğinden Teorem 21.6 ile $b_n \rightarrow 0$. Dolayısıyla toplam kuralıyla $a^{1/n} = 1 + b_n \rightarrow 1 + 0 = 1$.

Durum $0 < a < 1$. $b = 1/a > 1$ diyelim (Önerme 7.10). $\left(\frac{1}{b^{1/n}}\right)^n = \frac{1}{b} = a$ olduğundan pozitif kökün tekliğiyle $a^{1/n} = \frac{1}{b^{1/n}}$. İlk durum gereği $b^{1/n} \rightarrow 1 \neq 0$; bölüm kuralıyla (Teorem 21.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

■

Örneğin $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ ve $\sqrt[n]{1/2} \rightarrow 1$. Sezgi: n büyüdükçe n -inci kök alma, 1'den farklı her pozitif sayıyı 1'e doğru "ezer". Aynı ezme, taban sabit olmasa da çalışır; yeter ki taban sınırlı kalsın.

Teorem 22.6 (Sınırlı Dizinin n-inci Kökü). (a_n) sınırlı ve negatif olmayan terimli bir dizi ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/n} = 1.$$

İspat.

(a_n) sınırlı olduğundan her n için $0 \leq a_n \leq M$ olacak bir $M > 0$ vardır. O zaman

$$1 \leq 1 + a_n \leq 1 + M.$$

Kök alma sıralamayı koruduğundan her n için

$$1 = 1^{1/n} \leq (1 + a_n)^{1/n} \leq (1 + M)^{1/n}.$$

Sol taraf sabit 1 dizisidir; sağ taraf Teorem 22.5 gereği $(1 + M > 0)$ 1'e yakınsar. Teorem 21.6 ile $(1 + a_n)^{1/n} \rightarrow 1$.

■

Şimdi taban da n ile büyüsün: $\sqrt[n]{n}$. Bu dizi $1, \sqrt{2} \approx 1,414, \sqrt[3]{3} \approx 1,442, \sqrt[4]{4} \approx 1,414, \dots$ biçimindedir; büyüyen n 'nin etkisini n -inci kök alma yine yener.

Teorem 22.7 (n Sayısının n-inci Kökü).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

İspat.

$n \geq 1$ için $n^{1/n} \geq 1$ 'dir (aksi hâlde $n = (n^{1/n})^n < 1$ olurdu); $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ yazalım. Bernoulli eşitsizliği burada yetmez: $n = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ yalnızca $b_n \leq 1 - 1/n$ verir; bu da sıfıra gitmez. Binom teoreminin (Teorem 9.6) ikinci dereceli terimini kullanacağız. $n \geq 2$ için

$$n = (1 + b_n)^n = 1 + \binom{n}{1}b_n + \binom{n}{2}b_n^2 + \dots + b_n^n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 + \dots + b_n^n.$$

Sağdaki bütün terimler negatif olmadığından ($b_n \geq 0$), yalnızca $\binom{n}{2}b_n^2$ terimini tutup ötekileri atarsak eşitsizlik yönü korunur:

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2.$$

$n \geq 2$ için $n(n-1)/2 > 0$ olduğundan bölerek $b_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ bulunur. $n \geq 2$ için $n-1 \geq \frac{n}{2}$, dolayısıyla $\frac{2}{n-1} \leq \frac{4}{n}$ 'dir; kök alma sıralamayı koruduğundan

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{4}{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 2).$$

$n = 1$ için de $b_1 = 1 - 1 = 0 \leq 2$ olduğundan eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (Örnek 20.1) olduğundan Teorem 21.5 (kök, $m = 2$) ile $\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{0} = 0$, skaler çarpım kuralıyla da $\frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$; sol taraf sabit 0'dır. Teorem 21.6 ile $b_n \rightarrow 0$ ve toplam kuralıyla $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n \rightarrow 1$.

■

Bu limitin tipik kullanımı, kök içindeki ifadeyi “baskın” terimiyle sıkıştırmaktır.

Örnek 22.6 (Kök İçini Sıkıştırma). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 5^n)^{1/n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n}$

Çözüm.

a) Baskın terim 5^n 'dir. Her n için

$$5^n < 2^n + 5^n < 5^n + 5^n = 2 \cdot 5^n.$$

n -inci kök alma sıralamayı korur; $(5^n)^{1/n} = 5$ ve $(2 \cdot 5^n)^{1/n} = 2^{1/n} \cdot 5$ olduğundan

$$5 < (2^n + 5^n)^{1/n} < 5 \cdot 2^{1/n}.$$

Teorem 22.5 ile $2^{1/n} \rightarrow 1$, dolayısıyla sağ taraf $5 \cdot 1 = 5$ 'e gider; sol taraf sabit 5'tir. Teorem 21.6 gereği limit 5'tir. (Genel olarak $a, b > 0$ için $(a^n + b^n)^{1/n} \rightarrow \max\{a, b\}$; aynı akıl yürütme.)

b) $n \geq 1$ için $n \leq n^2 + n \leq 2n^2$. Kök alınca

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^2 + n} \leq \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2.$$

Teorem 22.7 ile $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, Teorem 22.5 ile $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$; çarpım kuralıyla sağ taraf $1 \cdot 1^2 = 1$ 'e gider. Sıkıştırma teoremiyle limit 1'dir.

■

22.3.2 Geometrik Dizi

a^n biçimindeki dizilere **geometrik dizi** denir. Davranışları a 'nın 1'e ve -1 'e göre konumuna bağlıdır; temel durum $|a| < 1$ 'dir.

Teorem 22.8 (Geometrik Dizinin Limiti). $a \in \mathbb{R}$ ve $|a| < 1$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

İspat.

$a = 0$ ise dizi sabit 0'dır ve limiti 0'dır. $a \neq 0$ olsun. $0 < |a| < 1$ olduğundan $\frac{1}{|a|} > 1$ (Önerme 7.10); dolayısıyla $\frac{1}{|a|} = 1 + h$ olacak bir $h > 0$ vardır. Bernoulli eşitsizliğiyle (Teorem 9.5)

$$\frac{1}{|a|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh.$$

Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirdiğinden (Önerme 7.10; $0 < nh < 1/|a|^n$ eşitsizliğinin tersleri alınır)

$$0 < |a|^n < \frac{1}{nh} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}.$$

Sağ taraf $\frac{1}{h} \cdot 0 = 0$ 'a gider (Örnek 20.1 ve skaler çarpım kuralı); Teorem 21.6 ile $|a|^n = |a^n| \rightarrow 0$. Bir dizinin mutlak değerinin 0'a gitmesi, dizinin 0'a gitmesiyle aynı şeydir: $|a^n - 0| = |a^n| = ||a^n| - 0|$ olduğundan iki dizi için limit tanımındaki eşitsizlik aynıdır (Önerme 20.3). Demek ki $a^n \rightarrow 0$. ■

Sonuç 22.1 (Geometrik Dizinin Dört Durumu). $a \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $|a| < 1$ ise $\lim a^n = 0$.
2. $a = 1$ ise $\lim a^n = 1$.
3. $a > 1$ ise $\lim a^n = +\infty$.
4. $a \leq -1$ ise (a^n) ıraksaktır ve sonsuz limiti de yoktur.

İspat.

1. Teorem 22.8.

2. $1^n = 1$ sabit dizisidir.

3. $a > 1$ ise $0 < 1/a < 1$; 1 gereği $(1/a)^n = 1/a^n \rightarrow 0$. (a^n) pozitif terimli olduğundan Teorem 22.3 ile $a^n \rightarrow +\infty$.

4. $a = -1$ için $((-1)^n)$ dizisinin ıraksaklığını biliyoruz (Örnek 20.6); terimleri ± 1 olduğundan sınırlıdır ve Önerme 22.1 gereği sonsuz limiti olamaz. $a < -1$ olsun. $|a| > 1$ olduğundan 3 ile $|a|^n = |a^n| \rightarrow +\infty$; yani (a^n) sınırsızdır ve Teorem 20.2 gereği yakınsak değildir. Sonsuz limiti de yoktur: çift indislerde $a^{2k} = (a^2)^k > 0$, tek indislerde $a^{2k+1} = a \cdot a^{2k} < 0$ 'dır. $M = 1$ tavanı için, hangi N verilirse verilsin, tek sayı olan bir $n \geq N$ seçilirse $a^n < 0 \leq 1$ olur; olumsuzlama gereği $a^n \rightarrow +\infty$ olamaz. Benzer biçimde ($M = 1$ ve çift $n \geq N$ için $a^n > 0 \geq -1$) $a^n \rightarrow -\infty$ da olamaz. ■

22.3.3 Oran Testi

Geometrik dizide ardışık terimlerin oranı sabittir: $a^{n+1}/a^n = a$. Oran sabit olmasa bile **limiti** 1'den küçükse dizi geometrik bir diziyle "üstten kuşatılır" ve sıfıra gider; limit 1'den büyükse dizi geometrik bir diziyle "alttan itilir" ve sonsuza kaçar.

Teorem 22.9 (Diziler için Oran Testi). (a_n) sıfırdan farklı terimli bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ olsun.

1. $L < 1$ ise $\lim a_n = 0$.
2. $L > 1$ ise (ya da oranın mutlak değeri $+\infty$ 'a ıraksıyorsa) $\lim |a_n| = +\infty$; özel olarak (a_n) ıraksaktır.
3. $L = 1$ ise test sonuç vermez.

İspat.

1. $L < r < 1$ olacak bir r seçelim (örneğin $r = (L + 1)/2$; Önerme 7.11). $\varepsilon = r - L > 0$ için limit tanımı gereği öyle bir N vardır ki $n \geq N$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < L + \varepsilon = r, \quad \text{yani} \quad |a_{n+1}| < r |a_n|.$$

Bu eşitsizliği ardı ardına uygulayalım:

$$|a_{N+1}| < r |a_N|, \quad |a_{N+2}| < r |a_{N+1}| < r^2 |a_N|, \quad \dots$$

Tümevarımla (Teorem 9.1) her $k \in \mathbb{N}$ için $|a_{N+k}| < r^k |a_N|$ bulunur; $n = N + k$ yazarsak $n > N$ için

$$|a_n| < r^{n-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{r^N} \cdot r^n = C r^n, \quad C = \frac{|a_N|}{r^N} > 0.$$

$0 < r < 1$ olduğundan [Teorem 22.8](#) ile $r^n \rightarrow 0$, dolayısıyla $C r^n \rightarrow 0$. $n > N$ için $|a_n| \leq |C r^n|$ olduğundan [Teorem 21.4](#) (koşulun belli bir indisten sonra sağlanması yeter) gereği $a_n \rightarrow 0$.

2. $1 < r < L$ olacak bir r seçelim ($L = +\infty$ ise $r = 2$ alalım). Oranın limiti L ise $\varepsilon = L - r > 0$ için, $+\infty$ 'a ıraksıyorsa $M = r$ tavanı için, öyle bir N vardır ki $n \geq N$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r, \quad \text{yani} \quad |a_{n+1}| > r |a_n|.$$

Aynı tümevarımla $n > N$ için

$$|a_n| > r^{n-N} |a_N| = C r^n, \quad C = \frac{|a_N|}{r^N} > 0.$$

$r > 1$ olduğundan [Sonuç 22.1](#) (3) ile $r^n \rightarrow +\infty$; sabit $C > 0$ dizisiyle çarpım [Teorem 22.2](#) gereği $C r^n \rightarrow +\infty$. $n > N$ için $C r^n \leq |a_n|$ olduğundan [Teorem 22.4](#) ile (koşulun belli bir indisten sonra sağlanması yeter) $|a_n| \rightarrow +\infty$. O hâlde ($|a_n|$), dolayısıyla (a_n) sınırsızdır ve [Teorem 20.2](#) gereği ıraksaktır.

3. Üç örnek yeter. $a_n = n$ için oran $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ ve dizi $+\infty$ 'a gider; $a_n = \frac{1}{n}$ için oran $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ ve dizi 0'a gider; $a_n = 1$ için oran 1 ve dizi 1'e gider. Yani $L = 1$ iken her şey olabilir. ■

Oran testi, terimleri çarpım ve faktöriyel içeren dizilerde çok kullanışlıdır; çünkü a_{n+1}/a_n oranında ortak çarpanlar sadeleşir. Bir sonraki kesimdeki büyüme hızı sonuçlarında bunu göreceğiz.

22.3.4 Büyüme Hızlarının Karşılaştırılması

n büyürken n^p (kuvvet), b^n (üstel, $b > 1$), $n!$ (faktöriyel) ve n^n dizilerinin hepsi $+\infty$ 'a gider. Ama hızları çok farklıdır: her biri bir öncekini "ezer". Bunu, oranın sıfıra gitmesiyle ölçeriz.

Teorem 22.10 (Büyüme Hızları).

1. $p > 0$ rasyonel ve $b > 1$ reel sayı ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{b^n} = 0$. (Üstel, kuvvetten hızlı büyür.)
2. Her $b \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$. (Faktöriyel, üstelden hızlı büyür.)
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. (n^n , faktöriyelden hızlı büyür.)

İspat.

1. $a_n = \frac{n^p}{b^n} > 0$ diyelim ve oran testini uygulayalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n^p} = \frac{1}{b} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p.$$

$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \rightarrow 1$ olduğunu görelim. $p = r/s$ ($r, s \in \mathbb{N}$) yazalım. $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ olduğundan [Teorem 21.5](#) (kök, $m = s$) ile $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/s} \rightarrow 1^{1/s} = 1$, sonra aynı teorem (kuvvet, $m = r$) ile $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{r/s} \rightarrow 1^r = 1$. Dolayısıyla oran $\frac{1}{b} \cdot 1 = \frac{1}{b}$ 'ye yakınsar. $b > 1$ olduğundan $L = 1/b < 1$; [Teorem 22.9](#) (1) ile $a_n \rightarrow 0$.

2. $b = 0$ ise dizi sabit 0'dır. $b \neq 0$ olsun. Arşimet özelliği ([Sonuç 12.1](#)) gereği $k > |b|$ olacak bir $k \in \mathbb{N}$ seçip sabitleyelim. $n > k$ için çarpımı ikiye bölelim:

$$\frac{|b|^n}{n!} = \frac{|b|^k}{k!} \cdot \frac{|b|}{k+1} \cdot \frac{|b|}{k+2} \cdots \frac{|b|}{n}.$$

Sağdaki $n - k$ çarpanın her biri $\frac{|b|}{j}$ ($j \geq k+1$) biçimindedir ve $\frac{|b|}{j} < \frac{|b|}{k} < 1$ sağlar. Dolayısıyla

$$0 < \frac{|b|^n}{n!} < \frac{|b|^k}{k!} \left(\frac{|b|}{k} \right)^{n-k} = \underbrace{\frac{|b|^k}{k!} \left(\frac{|b|}{k} \right)^{-k}}_{=: C} \cdot \left(\frac{|b|}{k} \right)^n = C q^n, \quad q = \frac{|b|}{k} \in (0, 1).$$

C sabittir ve [Teorem 22.8](#) ile $q^n \rightarrow 0$; sağ taraf 0'a gider. $n > k$ için geçerli olan bu sıkıştırmadan [Teorem 21.6](#) ile $\frac{|b|^n}{n!} \rightarrow 0$. Son olarak $n! > 0$ olduğundan $\left| \frac{b^n}{n!} \right| = \frac{|b|^n}{n!}$ 'dir; [Önerme 20.3](#) gereği $\frac{b^n}{n!} \rightarrow 0$.

3. $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ ve $n^n = n \cdot n \cdots n$ (n çarpan) olduğundan

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n},$$

çünkü her $k \leq n$ için $\frac{k}{n} \leq 1$ 'dir. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan [Teorem 21.6](#) ile limit 0'dır.

■

İspat (2 için oran testiyle).

$b \neq 0$ için $a_n = \frac{b^n}{n!}$ alalım:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|b|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|b|^n} = \frac{|b|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Oranın limiti $L = 0 < 1$ olduğundan [Teorem 22.9 \(1\)](#) ile $a_n \rightarrow 0$.

■

İ Büyüme hiyerarşisi

Teoremi bir zincir hâlinde özetleyebiliriz: $b > 1$ ve $p > 0$ için

$$n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n,$$

burada " $x_n \ll y_n$ " yazımı $x_n/y_n \rightarrow 0$ anlamındadır. [Teorem 22.3](#) gereği her oran ters çevrilince $+\infty$ 'a gider: $\frac{b^n}{n^p} \rightarrow +\infty$, $\frac{n!}{b^n} \rightarrow +\infty$, $\frac{n^n}{n!} \rightarrow +\infty$. Zincirin en soluna, logaritma tanımlandıktan sonra $\ln n \ll n^p$ de eklenecektir. Teoremden p 'nin rasyonel alınması yalnızca reel kuvvetleri henüz tanımlamamış olmamızdandır; reel $p > 0$ için de sonuç aynıdır (örneğin p 'den büyük bir doğal sayı q için $n^p \leq n^q$ karşılaştırmasıyla).

22.3.5 Bir Artı Küçük Bir Sayının n-inci Kuvveti

$(1 + b_n)^n$ biçimindeki diziler analizde merkezî bir yer tutar: $b_n = 1/n$ için dizi e sayısına yakınsar ([Teorem 23.3](#); bir sonraki bölüm). Bu limitin 1'den farklı çıkmasının nedeni, $nb_n = 1$ çarpımının sıfıra gitmemesidir. $nb_n \rightarrow 0$ ise kuvvet, tabandaki sapmayı "yakalayamaz" ve dizi 1'e gider.

Teorem 22.11 (Bir Artı b_n Üssü n). Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \geq 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b_n)^n = 1.$$

İspat.

Alt sınır. $b_n \geq 0 \geq -1$ olduğundan Bernoulli eşitsizliği ([Teorem 9.5](#)) ile her n için

$$(1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n \geq 1.$$

Üst sınır. $nb_n \rightarrow 0$ olduğundan öyle bir N vardır ki $n \geq N$ için $nb_n < 1$; bu n 'ler için $0 \leq b_n < \frac{1}{n} \leq 1$, yani $-b_n \geq -1$ 'dir. Bernoulli eşitsizliğini $x = -b_n$ ile uygularsak

$$(1 - b_n)^n \geq 1 - nb_n > 0 \quad (n \geq N).$$

Öte yandan $(1 + b_n)(1 - b_n) = 1 - b_n^2 \leq 1$ olduğundan ve $n \geq N$ için $1 - b_n > 0$ olduğundan (sol taraf negatif değildir), iki tarafın n -inci kuvvetini alarak

$$(1 + b_n)^n (1 - b_n)^n \leq 1 \quad (n \geq N).$$

$(1 - b_n)^n > 0$ olduğundan bölebiliriz; ardından $(1 - b_n)^n \geq 1 - nb_n > 0$ eşitsizliğinin tersini alırız:

$$(1 + b_n)^n \leq \frac{1}{(1 - b_n)^n} \leq \frac{1}{1 - nb_n} \quad (n \geq N).$$

Sıkıştırma. $n \geq N$ için

$$1 \leq (1 + b_n)^n \leq \frac{1}{1 - nb_n}.$$

$nb_n \rightarrow 0$ olduğundan $1 - nb_n \rightarrow 1 \neq 0$ ve bölüm kuralıyla (Teorem 21.1) sağ taraf $\frac{1}{1} = 1$ 'e yakınsar. Sol taraf sabit 1'dir. Teorem 21.6 (koşul $n \geq N$ için sağlanır, bu yeter) gereği $(1 + b_n)^n \rightarrow 1$.

Örnek 22.7 (Kuvvetin Yakalayamadığı Sapma).

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ olduğunu gösteriniz.
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^n$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

a) $b_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$ ve $nb_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Teorem 22.11 gereği limit 1'dir.

b) $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ ve $nb_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ (Örnek 22.3, $p = 1/2$). Aynı teoremle limit 1'dir.

Karşılaştırma için: $b_n = \frac{1}{n}$ alınırsa $nb_n = 1 \not\rightarrow 0$ ve teorem uygulanamaz; gerçekten de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisi 1'e değil $e \approx 2,718$ sayısına yakınsar (Teorem 23.3).

22.4 Özet Tablo

Bu bölümde ispatlanan özel limitleri bir arada görelim; ilerideki bölümlerde bu tabloya sık sık geri döneceğiz.

Limit	Koşul	Nerede
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$a > 0$	Teorem 22.5
$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/n} = 1$	(a_n) sınırlı, $a_n \geq 0$	Teorem 22.6
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$	—	Teorem 22.7
$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$	$ a < 1$	Teorem 22.8
$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$	$a > 1$	Sonuç 22.1
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	$\lim a_{n+1}/a_n < 1$	Teorem 22.9
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{b^n} = 0$	$p > 0$ rasyonel, $b > 1$	Teorem 22.10
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$	$b \in \mathbb{R}$	Teorem 22.10
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$	—	Teorem 22.10
$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b_n)^n = 1$	$b_n \geq 0$, $\lim nb_n = 0$	Teorem 22.11
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$	$a_n > 0$	Teorem 22.3

Sonsuz limitlerle işlemlerde ise akılda tutulacak olan, güvenli kurallar ($\infty + \infty$, $\infty +$ (alttan sınırlı), $\infty \cdot$ (pozitif), $1/\infty = 0$, sıralama) ile belirsiz biçimlerin ($\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞) ayrımıdır.

22.5 Alıştırmalar

Alıştırma 22.1 (Sonsuz Limitler ve Özel Limitler).

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n^2}{n+1} = +\infty$ olduğunu gösteriniz.
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n} = 3$ olduğunu gösteriniz.

- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = 0$ olduğunu gösteriniz ve buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^2 2^n} = +\infty$ sonucunu çıkarınız.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n$ limitini hesaplayınız.
- e) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ dizisinin $+\infty$ 'a ıraksadığını; $b_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$ dizisinin ise ıraksak olduğunu ama ne $+\infty$ 'a ne de $-\infty$ 'a gittiğini gösteriniz.

Çözüm.

a) İfadeyi sonsuza giden bir çarpanla yakınsak bir çarpanın çarpımı olarak yazalım:

$$\frac{n^3 - 5n^2}{n+1} = n \cdot \frac{n^2 - 5n}{n+1} = n \cdot \frac{n-5}{1 + \frac{1}{n}} = n^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Sağdaki kesir [Teorem 21.1](#) ile $\frac{1-0}{1+0} = 1 > 0$ 'a yakınsar; $n^2 \rightarrow +\infty$ ([Örnek 22.1](#)). [Teorem 22.2](#) (1) gereği limit $+\infty$ 'dur.

b) Bernoulli eşitsizliğiyle $3^n = (1+2)^n \geq 1+2n > n$; dolayısıyla her n için

$$3^n < 3^n + n < 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n.$$

n -inci kök alınca $3 < \sqrt[n]{3^n + n} < 3 \cdot \sqrt[n]{2}$. [Teorem 22.5](#) ile $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$; sağ taraf 3'e gider, sol taraf sabit 3'tür. [Teorem 21.6](#) gereği limit 3'tür.

c) $a_n = \frac{n^2 2^n}{3^n} > 0$ için oran testini uygulayalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2 2^n} = \frac{2}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1.$$

[Teorem 22.9](#) (1) ile $a_n \rightarrow 0$. Terimler pozitif olduğundan [Teorem 22.3](#) gereği $\frac{1}{a_n} = \frac{3^n}{n^2 2^n} \rightarrow +\infty$. (Aynı sonuç $a_n = \frac{n^2}{(3/2)^n}$ yazılıp [Teorem 22.10](#) (1) ile de elde edilir: $b = 3/2 > 1$, $p = 2$.)

d) $b_n = \frac{2}{n^2} \geq 0$ ve $nb_n = \frac{2}{n} \rightarrow 0$. [Teorem 22.11](#) gereği limit 1'dir.

e) $a_n = \frac{n^2}{n+1} = n \cdot \frac{n}{n+1} = n \cdot \frac{1}{1+1/n}$; ikinci çarpan $1 > 0$ 'a yakınsar, ilk çarpan $+\infty$ 'a gider. [Teorem 22.2](#) ile $a_n \rightarrow +\infty$.

$b_n = (-1)^n a_n$ için $|b_n| = a_n \rightarrow +\infty$; dolayısıyla (b_n) sınırsızdır ve [Teorem 20.2](#) gereği ıraksaktır. $+\infty$ 'a gitmediğini görmek için olumsuzlamayı kullanalım: $M = 1$ alalım. Her N için $n = 2N + 1$ tek sayısını seçersek $b_n = -a_n < 0 \leq 1 = M$; yani dizi 1 tavanının üstünde kalamaz. Benzer biçimde $M = 1$ ve çift $n = 2N$ için $b_n = a_n > 0 \geq -1 = -M$; dizi -1 tabanının altında da kalamaz. O hâlde (b_n) 'nin sonsuz limiti yoktur.

■

Bu bölümle birlikte, bir dizinin olası bütün davranışlarını adlandırmış olduk: yakınsama, $\pm\infty$ 'a ıraksama ve bunların dışında kalan "kararsız" ıraksama. Ama hâlâ önemli bir soru açık: bir dizinin limitini bilmeden, hatta hesaplayamadan, **yakınsak olduğunu** nasıl anlarız? İlk cevap monoton dizilerden gelir; artan ve üstten sınırlı her dizi yakınsar, ve bu ilke bize e sayısını kazandırır: [Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı](#).

23. Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı

Şimdiye kadar bir dizinin yakınsak olduğunu göstermek için hep limitini önceden bilmemiz gerekti: ε verildi, $|a_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan n_ε aradık. Oysa çoğu zaman elimizde limit adayı yoktur; dizi bir özineleme bağıntısıyla verilmiştir ya da genel terimi limitini tahmin etmeye elvermez. Bu bölümün ana teoremi tam bu boşluğu doldurur: **monoton ve sınırlı** bir dizi, limitini hiç bilmesek de yakınsaktır. Teoremin arkasında reel sayıların tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) vardır; bir anlamda bu teorem, tamlığın diziler dilindeki ilk büyük meyvesidir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: monoton yakınsaklık teoremi ve ispatı; limitin sınırlarla ilişkisi ve monoton dizilerde yakınsaklık ölçütü; sınırsız monoton dizilerin $\pm\infty$ 'a ıraksaması; analizin en ünlü sabiti olan e sayısının $(1 + \frac{1}{n})^n$ dizisiyle tanımı ve $2 < e < 3$ sınırları; e^x 'in limit tanımı; son olarak özinyeli dizilerin limitlerini bulmanın üç adımlı yöntemi.

23.1 Monoton Dizileri Hatırlayalım

Artan, azalan ve monoton dizi kavramlarını [Diziler](#) bölümünde tanımlamıştık ([Tanım 19.4](#)): (a_n) dizisi her $n < m$ için $a_n \leq a_m$ sağlıyorsa **artan**, $a_n \geq a_m$ sağlıyorsa **azalan**; eşitsizlikler kesinse **kesin artan** ya da **kesin azalan** denir. Bu dört durumdan biri geçerliyse dizi **monotondur**. Monotonluğu denetlemenin pratik yolu ardışık terimleri karşılaştırmaktır ([Önerme 19.2](#)): her n için $a_n \leq a_{n+1}$ ise dizi artan, $a_n \geq a_{n+1}$ ise azalandır. Pozitif terimli dizilerde bu karşılaştırma çoğu zaman $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranını 1 ile kıyaslayarak yapılır.

Küçük bir örnek

$a_n = \frac{1}{n}$ dizisi kesin azalandır: $n < n+1$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ 'dir ([Önerme 7.10](#)). Bu dizinin alttan 0 ile sınırlı olduğunu da biliyoruz. Aşağıdaki teorem, yalnızca bu iki bilgiden dizinin yakınsak olduğunu çıkaracak; üstelik limitin $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ olduğunu söyleyecek.

23.2 Monoton Yakınsaklık Teoremi

Artan bir dizi düşünelim. Terimler hep yukarı gidiyor; eğer bir tavan varsa, terimlerin bu tavanın altında “sıkışıp” bir yere yığılması gerekir. Yığıldıkları yer, terimler kümesinin en küçük üst sınırı olmalıdır; daha aşağıda bir yer olamaz, çünkü terimler oraya kadar çıkıyor; daha yukarıda da olamaz, çünkü supremum zaten üst sınırdır. Bu sezgiyi tamlık aksiyomu kesinleştirir.

Teorem 23.1 (Monoton Yakınsaklık Teoremi). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

1. (a_n) artan ve üstten sınırlıysa yakınsaktır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. (a_n) azalan ve alttan sınırlıysa yakınsaktır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

İspat.

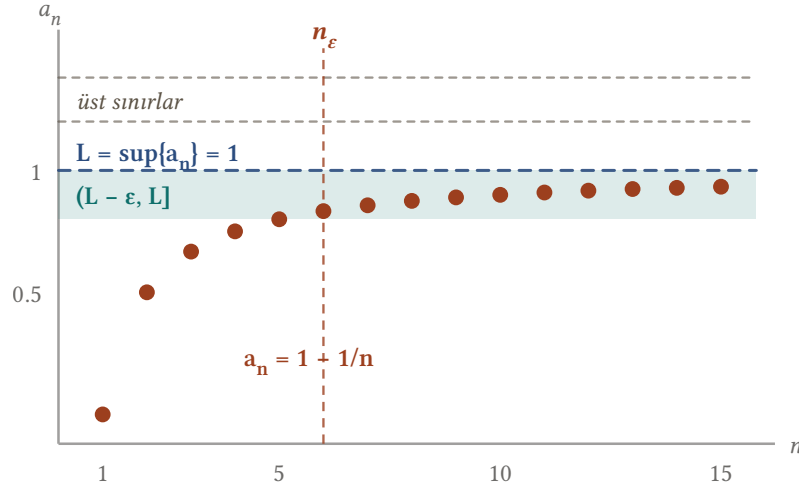
(1) Artan durum. (a_n) artan ve üstten sınırlı olsun. Dizinin görüntü kümesi $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ boş değildir ($a_1 \in A$) ve üstten sınırlıdır. Tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği A 'nın supremumu vardır; $L = \sup A$ diyelim. Göstereceğimiz şey $a_n \rightarrow L$ olduğudur.

$\varepsilon > 0$ verilsin. L en küçük üst sınır olduğundan $L - \varepsilon$ bir üst sınır değildir; Teorem 10.1 gereği A 'nın $L - \varepsilon$ 'dan büyük bir elemanı vardır. Bu eleman dizinin bir terimidir: $L - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$ olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunur.

Şimdi $n \geq n_\varepsilon$ olsun. Dizi artan olduğundan $a_{n_\varepsilon} \leq a_n$; öte yandan L bir üst sınır olduğundan $a_n \leq L < L + \varepsilon$. İkisini birleştirelim:

$$L - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon).$$

Yani $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ 'dur. ε keyfi olduğundan Tanım 20.1 gereği $\lim a_n = L = \sup A$.



Şekil 23.1: Artan ve üstten sınırlı dizi $a_n = 1 - 1/n$: terimler kümesinin supremumu $L = 1$ 'dir. Supremum tanımı gereği $(L - \varepsilon, L]$ bandına düşen bir a_{n_ε} vardır; dizi arttığından sonraki bütün terimler de bu bandta kalır. Bu, dizinin L 'ye yakınsadığını gösterir.

(2) Azalan durum. (a_n) azalan ve alttan sınırlı olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ boş değil ve alttan sınırlıdır; tamlık aksiyomunun infimum biçimi (Teorem 10.3) gereği $\ell = \inf A$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Teorem 10.2 gereği $a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$ olan bir n_ε vardır. $n \geq n_\varepsilon$ için dizi azalan olduğundan $a_n \leq a_{n_\varepsilon}$, ve ℓ alt sınır olduğundan $\ell \leq a_n$. Böylece

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq a_n \leq a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon),$$

yani $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Demek ki $\lim a_n = \ell = \inf A$.

■

Teoremin gücü şuradadır: yakınsaklığı göstermek için limiti bilmek gerekmez; monotonluk ve sınırlılık yeter. Üstelik limit hakkında da bilgi verir: limit, terimler kümesinin supremumu ya da infimumudur. Buradan hemen kullanışlı bir sonuç çıkar.

Sonuç 23.1 (Limit ile Terimler Arasındaki Sıralama).

1. (a_n) artan ve üstten sınırlıysa, $L = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq L$ 'dir.
2. (a_n) azalan ve alttan sınırlıysa, $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\ell \leq a_n$ 'dir.

Dizi kesin monotonsa eşitsizlikler de kesindir.

İspat.

(1) Teorem 23.1 gereği $L = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ 'dir ve supremum kümenin bir üst sınırıdır; dolayısıyla her n için $a_n \leq L$. (2) aynı biçimde, $\ell = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ 'nin alt sınır olmasından çıkar. Dizi kesin artarsa $a_n < a_{n+1} \leq L$ olduğundan $a_n < L$ 'dir; kesin azalan durum benzerdir.

■

Örneğin $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ dizisi artan ve limiti 1'dir; gerçekten de bütün terimler $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ sayıları 1'den küçüktür. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ dizisi ise azalan ve limiti 1'dir; terimleri $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$ hep 1'den büyüktür. Limit, artan dizide terimlerin “tavanı”, azalan dizide “tabanı”dır.

Örnek 23.1 (Bir Bölü Kök n Dizisi). $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dizisinin yakınsak olduğunu monoton yakınsaklık teoremiyle gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.

Alttan sınırlı. Her n için $\sqrt{n} > 0$, dolayısıyla $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ (Önerme 7.9). Demek ki 0 bir alt sınırdır.

Azalan. Önce $0 < x < y$ iken $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ olduğunu görelim: aksi hâlde $\sqrt{x} \geq \sqrt{y} > 0$ olur, iki tarafın karesi alınca $x \geq y$ çelişkisi çıkar. Buna göre $n < n+1$ olduğundan $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ ve Önerme 7.10 ile

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n.$$

Dizi kesin azalandır.

Yakınsak. Teorem 23.1 gereği dizi yakınsaktır ve limiti $\ell = \inf\{1/\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 'dir.

Limit. $\ell = 0$ olduğunu gösterelim. 0 bir alt sınırdır, dolayısıyla $\ell \geq 0$. $\ell > 0$ olsaydı, Sonuç 12.2 gereği $\frac{1}{n} < \ell^2$ olan bir n bulunurdu; kök alarak (yukarıdaki monotonluk özelliğiyle) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \ell$ elde edilirdi. Bu, ℓ 'nin alt sınır olmasıyla çelişir. Öyleyse $\ell = 0$, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

■

Teoremin iki parçasını tek cümlede toplayalım: sınırlı bir dizi ya artan ya azalansa (yani monoton) yakınsaktır. Dikkat: bunun tersi, yani “yakınsak $\Rightarrow$ monoton”, yanlıştır ($\frac{(-1)^n}{n}$ dizisi yakınsaktır ama monoton değildir). Doğru olan, yakınsak dizilerin sınırlı olmasıdır; bunu monotonlukla birleştirince aşağıdaki ölçüt çıkar.

Sonuç 23.2 (Sınırlı ve Monoton Diziler Yakınsaktır). Sınırlı ve monoton her dizi yakınsaktır.

İspat.

(a_n) sınırlı ve monoton olsun. Sınırlı olduğundan hem üstten hem alttan sınırlıdır (Tanım 19.3). Dizi artarsa Teorem 23.1'in (1) parçası, azalansa (2) parçası uygulanır; her iki durumda dizi yakınsaktır.

■

Örneğin $a_n = \frac{n}{n+1}$ dizisi artandır ($a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$) ve $0 < a_n < 1$ olduğundan sınırlıdır; dolayısıyla yakınsaktır. Limiti, $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ yazılışından 1 olarak okunur.

Sonuç 23.3 (Monoton Dizilerde Yakınsaklık Ölçütü). Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır.

İspat.

(a_n) monoton olsun. Yakınsaksa Teorem 20.2 gereği sınırlıdır; bu yön monotonluğu kullanmaz bile. Tersine, sınırlıysa Sonuç 23.2 gereği yakınsaktır.

■

Bu ölçüt monoton dizilerde işi çok kolaylaştırır: yakınsaklık sorusu, “dizi sınırlı mı?” sorusuna indirgenir. Ancak monotonluk varsayımı vazgeçilmezdir.

⚠ Monotonluk kaldırılırsa sınırlılık yetmez

$(0, 1, 0, 1, \dots)$ dizisi, yani $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, sınırlıdır ama yakınsak değildir: terimler 0 ile 1 arasında gidip gelir ve hiçbir sayıya yaklaşmaz. (Kesin gerekçe: (a_n) yakınsasaydı Teorem 21.1 gereği $2a_n - 1 = (-1)^n$ dizisi de yakınsardı; oysa bu dizi ıraksaktır, bkz. Örnek 20.6.) Teorem bu diziye uygulanamaz, çünkü dizi monoton değildir. Genel olarak “sınırlı $\Rightarrow$ yakınsak” yanlıştır; doğru olan “sınırlı ve monoton $\Rightarrow$ yakınsak” ifadesidir.

23.3 Sınırsız Monoton Diziler

Peki monoton bir dizi sınırlı değilse ne olur? Artan bir dizinin üst sınırı yoksa terimler her tavanı aşar; dolayısıyla dizi $+\infty$ ’a ıraksar (Tanım 22.1). Böylece monoton dizilerin davranışı tamamen belirlenmiş olur.

Teorem 23.2 (Sınırsız Monoton Diziler Sonsuza ıraksar).

1. Artan ve üstten sınırlı olmayan bir dizi $+\infty$ ’a ıraksar.
2. Azalan ve alttan sınırlı olmayan bir dizi $-\infty$ ’a ıraksar.

İspat.

(1) (a_n) artan ve üstten sınırlı olmasın. $M \in \mathbb{R}$ verilsin. Dizi üstten sınırlı olmadığından M bir üst sınır değildir; yani $a_{n_M} > M$ olan bir $n_M \in \mathbb{N}$ vardır. Dizi artan olduğundan her $n \geq n_M$ için

$$a_n \geq a_{n_M} > M.$$

M keyfi olduğundan, Tanım 22.1 gereği $\lim a_n = +\infty$.

(2) (a_n) azalan ve alttan sınırlı olmasın. $M \in \mathbb{R}$ verilsin. M bir alt sınır olmadığından $a_{n_M} < M$ olan bir n_M vardır ve azalanlık gereği her $n \geq n_M$ için $a_n \leq a_{n_M} < M$. Demek ki $\lim a_n = -\infty$.

■

Örneğin $a_n = n^2$ dizisi artandır ve üstten sınırlı değildir (her M için Sonuç 12.1 gereği $n > M$ olan bir n vardır, o zaman $n^2 \geq n > M$); teorem gereği $n^2 \rightarrow +\infty$. Benzer biçimde $a_n = -n$ azalan ve alttan sınırsızdır; $-n \rightarrow -\infty$.

Sonuç 23.4 (Monoton Dizilerin Tam Sınıflandırması).

1. Artan bir dizi ya yakınsaktır ya da $+\infty$ ’a ıraksar.
2. Azalan bir dizi ya yakınsaktır ya da $-\infty$ ’a ıraksar.

Dolayısıyla monoton her dizinin genişletilmiş anlamda limiti vardır: dizi sınırlıysa limit bir reel sayı, sınırlı değilse $+\infty$ ya da $-\infty$ ’dur.

İspat.

(a_n) artan olsun. Üstten sınırlıysa Teorem 23.1 gereği yakınsaktır; üstten sınırlı değilse Teorem 23.2 gereği $+\infty$ ’a ıraksar. Üçüncü bir seçenek yoktur. Azalan durum simetriktir. Son cümle için: artan bir dizi alttan zaten a_1 ile sınırlıdır, dolayısıyla “sınırlı” ile “üstten sınırlı” aynı şeydir; azalan dizi içinse “sınırlı” ile “alttan sınırlı” aynıdır (Önerme 19.3).

■

Bu sınıflandırma, monoton dizilerin diğer dizilerden ne kadar “uslu” olduğunu gösterir: $(-1)^n$ gibi salınan diziler ne yakınsar ne de sonsuza gider; monoton bir dizi ise bu iki davranıştan birini mutlaka sergiler.

23.4 e Sayısı

Monoton yakınsaklık teoreminin en ünlü uygulaması, analizin en önemli sabitlerinden birinin tanımıdır. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisini düşünelim. Taban 1’e yaklaşırken üs sonsuza gider; 1^∞ biçimindeki bu belirsizlikte dizinin ne yapacağı açık değildir. İlk terimler 2, 2, 25, 2, 37, 2, 44, ... diye yavaşça büyür. Dizi artan mıdır, bir tavanı var mıdır? İkisine de “evet” yanıtı verebilirsek dizi yakınsar ve limitine bir ad verebiliriz.

Teorem 23.3 (e Dizisi Artan ve Sınırlıdır). $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisi kesin artandır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 3$ 'tür. Dolayısıyla dizi yakınsaktır.

İspat.

Adım 1: Binom açılımı. Binom teoremi (Teorem 9.6) gereği

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

$k \geq 1$ için $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ olduğundan

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

$k = 0$ ve $k = 1$ terimleri 1'e eşittir. Böylece

$$a_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \quad (1)$$

Burada $1 \leq j \leq k-1 \leq n-1$ olduğundan her çarpan $1 - \frac{j}{n}$ sayısı 0 ile 1 arasındadır.

Adım 2: Kesin artan. a_{n+1} için aynı açılım

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$$

verir. İki açılımı terim terim karşılaştıralım. $2 \leq k \leq n$ olan her k ve $1 \leq j \leq k-1$ olan her j için, $j \geq 1$ ve $n < n+1$ olduğundan $\frac{j}{n+1} < \frac{j}{n}$ 'dir; ayrıca $j \leq k-1 \leq n-1 < n$ olduğundan $1 - \frac{j}{n} > 0$ 'dir. Dolayısıyla

$$0 < 1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}.$$

Pozitif sayıların çarpımı sıralamayı koruduğundan a_{n+1} 'in k -ıncı terimi a_n 'in k -ıncı teriminden büyüktür. Üstelik a_{n+1} 'in açılımında fazladan bir terim daha vardır: $k = n+1$ 'e karşılık gelen terim, pozitif sayıların çarpımı olduğundan pozitiftir. Öyleyse $a_n < a_{n+1}$; dizi kesin artandır.

Adım 3: Üstten sınırlı. (1)'deki her çarpan 1'den küçük olduğundan çarpım da 1'den küçüktür; buradan

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Şimdi $k \geq 1$ için $k! \geq 2^{k-1}$ olduğunu tümevarımla görelim: $k = 1$ için $1! = 1 = 2^0$. $k! \geq 2^{k-1}$ ise $(k+1)! = (k+1)k! \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. Öyleyse $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ ve geometrik toplam formülüyle

$$a_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3.$$

Sonuç. Dizi artan ve üstten 3 ile sınırlıdır; Teorem 23.1 gereği yakınsaktır.

■

Artık limite bir ad verebiliriz.

Tanım 23.1 (e Sayısı (Euler Sayısı)). $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin limitine **e sayısı** (Euler's number) denir:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Teorem 23.3 bu limitin var olduğunu garanti eder. e irrasyonel bir sayıdır ve yaklaşık değeri $e \approx 2,71828\ldots$ 'dir.

e 'nin irrasyonel olduğunun ispatı bu notların kapsamı dışındadır; ama e 'nin nerede olduğunu teoremin ispatından kolayca okuyabiliriz.

Sonuç 23.5 (e Sayısının Sınırları). $2 < e < 3$ 'tür.

İspat.

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ olsun. **Teorem 23.1** gereği $e = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 'dir; dolayısıyla her n için $a_n \leq e$ (**Sonuç 23.1**). Özel olarak $e \geq a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$.

Üst sınır için **Teorem 23.3**'nin ispatındaki kestirimi bir adım inceltelim. $k = 3$ için $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ 'dır; bu, kullandığımız $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ sınırından küçüktür. $k \geq 4$ için $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ sınırını koruyarak

$$a_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{35}{12}$$

elde ederiz (buradaki son toplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{4}$; $n < 4$ için toplam boştur ve eşitsizlik yine doğrudur). Demek ki $\frac{35}{12}$ bütün terimlerin bir üst sınırıdır; supremum en küçük üst sınır olduğundan $e \leq \frac{35}{12} < 3$.

■

Örnek 23.2 (e Dizisinin İlk Terimleri). $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin ilk birkaç terimini hesaplayınız ve **Teorem 23.3**'nin söylediklerini gözlemleyiniz.

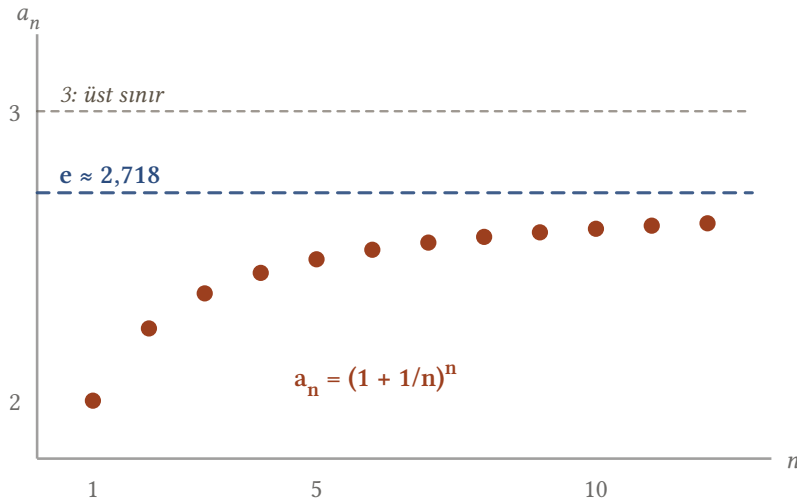
Çözüm.

Terimleri doğrudan hesaplayalım:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25, \quad a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,370, \quad a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2,441,$$

$$a_5 = \frac{7776}{3125} \approx 2,488, \quad a_{10} = 1,1^{10} \approx 2,594, \quad a_{100} \approx 2,705, \quad a_{1000} \approx 2,717.$$

Terimler gerçekten artıyor; ama artış giderek yavaşlıyor ve hiçbir terim 3'ü geçmiyor. Terimler yukarıdan $e \approx 2,718$ değeriyle "sıkışmış" durumdadır: e , terimler kümesinin supremumudur ve dizi bu supremuma yavaşça yaklaşır.



Şekil 23.2: $(1 + 1/n)^n$ dizisi artar ve 3'ü hiç geçmez; monoton yakınsaklık teoremi gereği bir limiti vardır. Bu limit $e \approx 2,718$ sayısidir: dizi ona yavaş yaklaşır, $n = 12$ 'de bile henüz 2,61 civarındadır.

Yakınsama oldukça yavaştır: bin terim sonra bile ancak iki ondalık basamak doğrudur. e 'yi hesapmanın çok daha hızlı yolları vardır; örneğin ispattaki $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ toplamı e 'ye çok hızlı yaklaşır. Bunu seriler konusunda göreceğiz.

■

23.4.1 Üstel Fonksiyonun Limit Tanımı

$(1 + \frac{1}{n})^n$ dizisindeki 1'in yerine herhangi bir x reel sayısı konursa ne olur? Sonuç yine yakınsak bir dizedir.

İ Genelleştirilmiş e dizisi

Her $x \in \mathbb{R}$ için $(1 + \frac{x}{n})^n$ dizisi yakınsaktır. $x > 0$ için ispat Teorem 23.3'ninkiyle aynı düzendedir: binom açılımı $(1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \frac{j}{n})$ verir, dizi artandır ve $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ toplamı üstten sınırlıdır ($k \geq 2x$ olan k 'lardan itibaren $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^k}{k!}$ olduğundan kuyruk bir geometrik toplamla sınırlanır). $x < 0$ durumu biraz daha fazla çaba ister ve ispatını burada vermiyoruz; bu limit, üstel fonksiyon incelenirken yeniden ele alınacaktır. Burada yalnızca sonucu kullanacağız.

Tanım 23.2 (Üstel Fonksiyonun Limit Tanımı). Her $x \in \mathbb{R}$ için **üstel fonksiyon** (exponential function) şöyle tanımlanır:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

$x = 1$ için bu tanım Tanım 23.1 ile örtüşür; $x = 0$ için sabit 1 dizisinin limiti $e^0 = 1$ 'dir. Rasyonel x için bu tanımın Tanım 13.2 ile verilen kuvvetle uyduğu gösterilebilir; bu yüzden e^x yazımı bir çelişki yaratmaz. Tanımı iki örnekte kullanalım.

Örnek 23.3 (Bir Eksi Bir Bölü n Dizisi). $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$n \geq 2$ için terimi e 'nin tanımındaki biçime dönüştürelim:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Paydayı, üssü $n-1$ olacak biçimde ayıralım:

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

$b_n = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}$ diyelim ($n \geq 2$). $b_n = a_{n-1}$ 'dir; yani (b_n) dizisi e dizisinin bir adım kaydırılmışıdır: $b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots$ Bir dizinin ilk terimi atılınca ya da öne bir terim eklenince limit değişmez (Teorem 24.3); dolayısıyla $b_n \rightarrow e$. İkinci çarpan için $\frac{1}{n-1} \rightarrow 0$ olduğundan (yine kaydırılmış $1/n$ dizisi) $1 + \frac{1}{n-1} \rightarrow 1$. Limit aritmetiği (Teorem 21.1) ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e \cdot 1 = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Bölme kuralını kullanabildik çünkü $e \neq 0$. Sonuç, Tanım 23.2 ile de uyumludur: $x = -1$ için $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

■

Örnek 23.4 (Üstel Biçime Dönüştürme). $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{2n})^{n+2}$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Üssü n ile 2'ye ayıralım ve tabanı $1 + \frac{x}{n}$ biçiminde yazalım:

$$\left(1 - \frac{5}{2n}\right)^{n+2} = \left(1 + \frac{-5/2}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{5}{2n}\right)^2.$$

İlk çarpan [Tanım 23.2](#) gereği $e^{-5/2}$ 'ye yakınsar. İkinci çarpan için $\frac{5}{2n} \rightarrow 0$, dolayısıyla [Teorem 21.1](#) ile $\left(1 - \frac{5}{2n}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$. Çarpım kuralıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{2n}\right)^{n+2} = e^{-5/2} \cdot 1 = e^{-5/2}.$$

■

23.5 Özyineli Dizilerin Limiti

Bir dizi genel terimiyle değil de bir **özyineleme bağıntısı** ile verilmişse ([Tanım 19.2](#)), örneğin $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ gibi, limitini tahmin etmek bile zor olabilir. Monoton yakınsaklık teoremi burada devreye girer: dizinin monoton ve sınırlı olduğunu (genellikle tümevarımla) gösterip yakınsaklığı garanti ederiz; sonra bağıntının iki yanında limite geçerek limiti bulan bir denklem elde ederiz. Limite geçerken şu basit ama önemli olguyu kullanırız.

i Kuyruk lemması: bir adım kaydırma limiti değiştirmez

(a_n) dizisi a 'ya yakınsıyorsa (a_{n+1}) dizisi de a 'ya yakınsar. Sebebi basittir: $(a_{n+1}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ dizisi, (a_n) 'in ilk terimi atılmış hâlidir; verilen ε için (a_n) 'de işe yarayan n_ε indisi (a_{n+1}) için de işe yarar. Bu olgu bir sonraki bölümde, “dizinin kuyruğu” kavramıyla birlikte tam olarak ispatlanacaktır ([Teorem 24.3](#)). Buna göre $a_{n+1} = f(a_n)$ biçimindeki bir bağıntıda, f 'nin limitle uyumlu olduğu durumlarda (toplama, çarpma, bölme, kök alma gibi işlemlerle kurulmuşsa) iki yanın limitini alarak $a = f(a)$ denkleminde ulaşırız.

⚠ Önce yakınsaklık, sonra denklem

$a = f(a)$ denklemini çözmek limitin **var olduğu bilindiğinde** işe yarar. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$ dizisini düşünelim: limite “geçersek” $a = 2a$, yani $a = 0$ çıkar. Oysa dizi $(1, 2, 4, 8, \dots)$ sonsuza ıraksar; 0 limit değildir. Denklem yalnızca “eğer limit varsa şu olmalı” der; varlığı ayrıca (monotonluk ve sınırlılıkla) göstermek gerekir.

💡 Üç adımlı yöntem

1. **Sınırlılık.** Dizinin (genellikle limit adayının kendisi olan) bir sınırın altında ya da üstünde kaldığını tümevarımla gösterin. Limit adayını, $a = f(a)$ denklemini önceden çözerek bulabilirsiniz.
2. **Monotonluk.** $a_{n+1} - a_n$ farkının işaretini ya da a_{n+1}/a_n oranını inceleyin; çoğu zaman yine tümevarım gerekir.
3. **Limit.** [Teorem 23.1](#) ile yakınsaklığı sonuca bağlayın, bağıntıda limite geçin ve denklemi çözün. Birden çok kök çıkarsa, sınırlılık ve sıralama bilgisiyle ([Teorem 21.3](#)) doğru kökü seçin.

Örnek 23.5 (Doğrusal Bir Özyineleme). $a_1 = 2$ ve $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ ile tanımlanan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.

İlk terimler: $a_1 = 2, a_2 = \frac{7}{3} \approx 2,33, a_3 = \frac{22}{9} \approx 2,44$. Dizi artıyor ve 2,5 civarına gidiyor gibi görünüyor.

Adım 1: Üstten sınırlı. İddia: her n için $a_n \leq 3$. $n = 1$: $a_1 = 2 \leq 3$. $a_k \leq 3$ olsun; o zaman

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 5}{3} \leq \frac{3 + 5}{3} = \frac{8}{3} \leq 3.$$

Tümevarım ilkesi ([Teorem 9.1](#)) gereği iddia her n için doğrudur.

Adım 2: Artan. İddia: her n için $a_n < a_{n+1}$. $n = 1$: $a_1 = 2 < \frac{7}{3} = a_2$. $a_k < a_{k+1}$ olsun; her iki yana 5 ekleyip 3'e bölmek sıralamayı korur:

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 5}{3} < \frac{a_{k+1} + 5}{3} = a_{k+2}.$$

Demek ki dizi kesin artandır.

Adım 3: Limit. Dizi artan ve üstten sınırlı olduğundan Teorem 23.1 gereği yakınsaktır; limiti a olsun. Kuyruk lemması gereği $a_{n+1} \rightarrow a$ ve limit aritmetiği ile $\frac{a_n+5}{3} \rightarrow \frac{a+5}{3}$. Limitin tekliğinden (Teorem 20.1)

$$a = \frac{a+5}{3} \Rightarrow 3a = a+5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Sonuç: $\lim a_n = \frac{5}{2}$. (Adım 1'de sınır olarak 3 yerine limit adayı $\frac{5}{2}$ de kullanılabilirdi: $a_k \leq \frac{5}{2} \Rightarrow a_{k+1} \leq \frac{5/2+5}{3} = \frac{5}{2}$.)

■

Örnek 23.6 (Kök İkiye Yakınsayan Bir Özyineleme). $a_1 = 2$ ve $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ ile tanımlanan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.

İlk terimler: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12} \approx 1,4167$, $a_4 = \frac{577}{408} \approx 1,41422$. Dizi hızla $\sqrt{2} \approx 1,41421$ 'e yaklaşıyor gibidir.

Adım 1: Pozitif terimler ve alt sınır. Her n için $a_n > 0$: $a_1 = 2 > 0$; $a_k > 0$ ise $a_{k+1} = \frac{a_k^2+2}{2a_k}$ kesrinde pay ve payda pozitifdir, dolayısıyla $a_{k+1} > 0$. Daha iyisi, her n için $a_n^2 \geq 2$ 'dir: $a_1^2 = 4 \geq 2$ ve genel olarak

$$a_{k+1}^2 - 2 = \left(\frac{a_k^2 + 2}{2a_k} \right)^2 - 2 = \frac{a_k^4 + 4a_k^2 + 4 - 8a_k^2}{4a_k^2} = \frac{(a_k^2 - 2)^2}{4a_k^2} \geq 0.$$

Bu, bağımsız olarak her k için doğrudur (pay bir tam karedir). Aynı sonuca aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden de ulaşılır: Teorem 7.1'nin $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ biçiminde $a = a_k$ ve $b = \frac{2}{a_k}$ alalım; o zaman $2 = a_k \cdot \frac{2}{a_k} \leq \left(\frac{a_k + 2/a_k}{2}\right)^2 = a_{k+1}^2$ olur. Pozitif olup karesi 2'den küçük olmayan bir sayı $\sqrt{2}$ 'den küçük olamaz; demek ki her n için $a_n \geq \sqrt{2}$. Dizi alttan sınırlıdır.

Adım 2: Azalan. Ardışık terimlerin farkı

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} \geq 0,$$

çünkü pay Adım 1 gereği negatif değil, payda pozitifdir. Dolayısıyla $a_{n+1} \leq a_n$; dizi azalandır.

Adım 3: Limit. Dizi azalan ve alttan sınırlı olduğundan Teorem 23.1 gereği yakınsaktır; limiti a olsun. Her n için $a_n \geq \sqrt{2}$ olduğundan Teorem 21.3 gereği $a \geq \sqrt{2} > 0$; özellikle $a \neq 0$ ve bağıntıda limite geçerken bölme kuralı kullanılabilir:

$$a = \frac{a^2 + 2}{2a} \Rightarrow 2a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = 2.$$

$a > 0$ olduğundan $a = \sqrt{2}$ 'dir.

Bu özyineleme, $\sqrt{2}$ 'yi hesaplamak için Babillilerden beri kullanılan yöntemdir ve her adımda doğru basamak sayısı yaklaşık ikiye katlanır.

■

Örnek 23.7 (İç İçe Karekökler). $a_1 = \sqrt{2}$ ve $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ile tanımlanan dizinin, yani

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.

Limit adayı. Limit a varsa $a = \sqrt{2+a}$, yani $a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$ olmalıdır; terimler pozitif olduğundan aday $a = 2$ 'dir. Sınır olarak 2'yi deneyelim.

Adım 1: $0 < a_n < 2$. $n = 1$: $0 < \sqrt{2} < 2$ (çünkü $2 < 4$). $0 < a_k < 2$ olsun. O zaman $2 < 2 + a_k < 4$ ve karekökün monotonluğuyla (bkz. [Örnek 23.1](#)) $\sqrt{2} < \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{4} = 2$; yani $0 < a_{k+1} < 2$. Tümevarımla her n için $0 < a_n < 2$.

Adım 2: Artan. $a_{n+1} > a_n$ olduğunu göstermek istiyoruz; iki yan da pozitif olduğundan bu, karelerin karşılaştırılmasına denktir:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 > a_n^2 &\Leftrightarrow 2 + a_n > a_n^2 \\ &\Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 < 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)(a_n + 1) < 0 \end{aligned}$$

Adım 1 gereği $a_n - 2 < 0$ ve $a_n + 1 > 0$, dolayısıyla çarpım negatiftir. Demek ki $a_{n+1} > a_n$; dizi kesin artandır.

Adım 3: Limit. Artan ve üstten 2 ile sınırlı olan dizi [Teorem 23.1](#) gereği yakınsaktır; limiti a olsun. $2 + a_n \rightarrow 2 + a$ ve karekök limitle uyumlu olduğundan ([Teorem 21.5](#)) $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \rightarrow \sqrt{2 + a}$. Kuyruk lemmasıyla $a = \sqrt{2 + a}$, yani $(a-2)(a+1) = 0$. $a_n > 0$ olduğundan $a \geq 0$ ([Teorem 21.3](#)) ve tek olası değer $a = 2$ 'dir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

■

Üç örnekte de aynı şablonu izledik: sınırlılık, monotonluk, limit denklemi. Şablon, genel terimini hiç bilmediğimiz dizilerde bile limiti tam olarak vermektedir; bu, monoton yakınsaklık teoreminin gündelik hesaplardaki gücüdür.

23.6 Alıştırmalar

Alıştırma 23.1 (Monoton Diziler ve e Sayısı Alıştırmaları).

- $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ dizisinin monoton ve sınırlı olduğunu gösteriniz; limitini bulunuz.
- $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$ ile tanımlanan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.
- $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n$ limitlerini bulunuz.
- (a_n) artan, (b_n) azalan, her n için $a_n \leq b_n$ ve $b_n - a_n \rightarrow 0$ olsun. İki dizinin de yakınsak olduğunu ve limitlerinin eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Ardışık terimlerin farkını hesaplayalım:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+4}{n+3} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{(3n+4)(n+2) - (3n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{3n^2 + 10n + 8 - (3n^2 + 10n + 3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{5}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Dizi kesin artandır. Sınırlılık için terimi $a_n = \frac{3(n+2)-5}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2}$ biçiminde yazalım: $\frac{5}{n+2} > 0$ olduğundan $a_n < 3$; ayrıca $a_n \geq a_1 = \frac{4}{3}$. Artan ve üstten sınırlı olduğundan [Teorem 23.1](#) gereği yakınsaktır. Limit için $0 < \frac{5}{n+2} < \frac{5}{n}$ ve $\frac{5}{n} \rightarrow 0$ olduğundan ([Örnek 20.1](#) ve [Teorem 21.1](#)) sıkıştırma teoremiyle ([Teorem 21.6](#)) $\frac{5}{n+2} \rightarrow 0$; yine [Teorem 21.1](#) ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 - 0 = 3.$$

3 aynı zamanda terimler kümesinin supremumudur; [Sonuç 23.1](#) ile uyumlu olarak hiçbir terim 3'e ulaşmaz.

b) Bu, [Örnek 23.6](#)'nın 3 için sürümüdür. **Pozitiflik ve alt sınır:** $a_1 = 3 > 0$; $a_k > 0$ ise $a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{3}{a_k}\right) > 0$. Ayrıca

$$a_{k+1}^2 - 3 = \frac{1}{4}\left(a_k + \frac{3}{a_k}\right)^2 - 3 = \frac{a_k^2 + 6 + 9/a_k^2 - 12}{4} = \frac{1}{4}\left(a_k - \frac{3}{a_k}\right)^2 = \frac{(a_k^2 - 3)^2}{4a_k^2} \geq 0,$$

ve $a_1^2 = 9 \geq 3$; dolayısıyla her n için $a_n^2 \geq 3$, yani $a_n \geq \sqrt{3}$. **Azalan:**

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{3}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 3}{2a_n} \geq 0.$$

Limit: Azalan ve alttan sınırlı dizi yakınsaktır; limiti $a \geq \sqrt{3} > 0$ ([Teorem 21.3](#)). Bağintıda limite geçince $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right)$, yani $2a^2 = a^2 + 3$, $a^2 = 3$; $a > 0$ olduğundan $a = \sqrt{3}$. İlk terimler 3, 2, 1, 75, 1, 7321, ... bunu doğrular ($\sqrt{3} \approx 1,73205$).

c) $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ olduğundan dizi kesin artandır. Üst sınır için $k \geq 2$ iken $k^2 > k(k-1)$, dolayısıyla

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Bu eşitsizlikleri $k = 2, \dots, n$ için toplarsak sağ taraf iç içe sadeleşir:

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) < 2.$$

Artan ve üstten 2 ile sınırlı olan (s_n) dizisi [Teorem 23.1](#) gereği yakınsaktır. (Limitin değeri $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$ 'tir; bunu Euler bulmuştur ve ispatı çok daha ileri araçlar ister. Burada yalnızca yakınsaklığı gösterdik.)

d) İlk limit için tabanı $1 + \frac{x}{n}$ biçiminde yazalım: $1 + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1/2}{n}$. [Tanım 23.2](#) gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

İkinci limit için $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$, dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2.$$

Aynı sonucun bir parçasına yalnızca [Tanım 23.1](#) ile de ulaşılabilir: $n = 2m$ çift iken $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^2$ olduğundan çift indisli terimler [Teorem 21.1](#) gereği e^2 'ye yakınsar. Bu, dizinin yalnızca bir alt dizisinin limitidir; alt dizilerin limiti ile dizinin kendi limiti arasındaki ilişkiyi bir sonraki bölümde inceleyeceğiz ([Teorem 24.1](#)).

e) (b_n) azalan olduğundan her n için $b_n \leq b_1$, dolayısıyla $a_n \leq b_n \leq b_1$: (a_n) artan ve üstten sınırlıdır, [Teorem 23.1](#) gereği bir a sayısına yakınsar. Benzer biçimde (a_n) artan olduğundan $a_1 \leq a_n \leq b_n$: (b_n) azalan ve alttan sınırlıdır, bir b sayısına yakınsar. Limit aritmetiği ile

$$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

yani $a = b$. Üstelik [Sonuç 23.1](#) gereği her n için $a_n \leq a = b \leq b_n$; ortak limit bütün $[a_n, b_n]$ aralıklarında yer alır. Bu, iç içe aralıklar teoreminin ([Teorem 10.5](#)) diziler diliyle yeniden ispatıdır; bir sonraki bölümde bu bakış açısını ayrıntılı ele alacağız.

■

Monoton yakınsaklık teoremi, tamlık aksiyomunun dizilere yansımadır: monoton bir dizi ya bir reel sayıya yakınsar ya da sonsuza gider, arada kalmaz. Peki monoton olmayan diziler için ne söylenebilir? Sınırlı bir dizi yakınsamak zorunda değildir; ama içinden monoton (ve dolayısıyla yakınsak) bir parça ayıklanabilir. Bu fikir bizi alt dizilere ve analizin temel taşlarından Bolzano–Weierstrass teoremine götürür: [Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi](#).

24. Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi

Önceki bölümde monoton dizilerin ne kadar “uslu” olduğunu gördük: sınırlıysa yakınsar, değilse sonsuza gider (Teorem 23.1, Teorem 23.2). Oysa çoğu dizi monoton değildir. $(-1)^n$ dizisi sınırlıdır ama yakınsamaz; terimleri -1 ile 1 arasında gidip gelir. Yine de bu dizinin içinde düzenli parçalar saklıdır: çift indisli terimler hep 1 , tek indisli terimler hep -1 'dir. Bir diziden bazı terimleri (sırayı bozmadan, sonsuz tane) seçerek elde edilen yeni diziye **alt dizi** denir ve bu bölümün ana fikri şudur: **her dizinin içinde monoton bir alt dizi vardır**; dizi sınırlıysa bu alt dizi yakınsar. Bu, analizin en çok kullanılan araçlarından biri olan Bolzano–Weierstrass teoremidir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: alt dizi tanımı ve $n_k \geq k$ eşitsizliği; yakınsak bir dizinin her alt dizisinin aynı limite gittiği ve bunun iraksaklığı göstermede nasıl kullanıldığı; tek ve çift indisli alt dizilerle yakınsaklık ölçütü; dizinin kuyruğu ve $\lim a_n = \lim a_{n+1}$ eşitliği; monoton alt dizi teoremi ve Bolzano–Weierstrass teoremi; sınırsız diziler için karşılığı; iç içe aralıklar teoreminin dizilerle ispatı; son olarak dizisel kompaktlık ve kompaktlığın üç denk biçimi.

24.1 Alt Diziler

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ dizisinden sonsuz tane terimi, soldan sağa sırayı koruyarak seçelim: örneğin $a_2, a_5, a_9, a_{14}, \dots$. Seçilen terimler yeni bir dizi oluşturur. Önemli olan iki şeydir: seçilen terim sayısı sonsuzdur ve indisler kesin artar; yani geriye dönüp daha önceki bir terimi alamayız, aynı terimi iki kez de kullanamayız.

Tanım 24.1 (Alt Dizi). (a_n) bir reel sayı dizisi ve $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olsun:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

$b_k = a_{n_k}$ ile tanımlanan (b_k) dizisine (a_n) dizisinin bir **alt dizisi** (subsequence) denir ve genellikle (a_{n_k}) ile gösterilir. Terimleri açık yazarsak

$$(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots).$$

Tanımda iki dizi vardır: ana dizi (a_n) ve hangi terimlerin seçildiğini söyleyen indis dizisi (n_k) . Alt dizinin k -ıncı terimi, ana dizinin n_k -ıncı terimidir. Alt dizi de bir dizedir (Tanım 19.1), çünkü $k \mapsto a_{n_k}$ kuralı $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye bir fonksiyondur.

⚠ Sıra korunur, sonsuz terim seçilir

$(a_2, a_1, a_4, a_3, \dots)$ bir alt dizi **değildir**: $n_1 = 2 > 1 = n_2$ olduğundan indisler kesin artan değildir. $(a_1, a_1, a_1, \dots)$ de alt dizi değildir; aynı indis tekrar edilemez. $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ sonlu listesi de alt dizi değildir; alt dizi sonsuz sayıda terim içerir. Buna karşılık (a_n) dizisinin kendisi bir alt dizedir: $n_k = k$ alınır.

Örnek 24.1 (Alt Dizi Örnekleri). Aşağıdaki dizilerin belirtilen alt dizilerini indis dizisiyle birlikte yazınız.

- a) (a_n) herhangi bir dizi; tek indisli terimlerden oluşan alt dizi.
- b) $(0, 1, 0, 1, \dots)$ dizisinin sabit alt dizileri.
- c) $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ dizisinin $(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$ alt dizisi.

Çözüm.

- a) $n_k = 2k - 1$ alalım: $n_1 = 1 < n_2 = 3 < n_3 = 5 < \dots$ kesin artandır. Alt dizi $(a_{2k-1}) = (a_1, a_3, a_5, \dots)$ olur. $n_k = 2k + 1$ ile başlanırsa $(a_3, a_5, a_7, \dots)$ elde edilir; bu da tek indisli terimlerin bir alt dizisidir. Çift indisli terimler için $n_k = 2k$ alınır: $(a_{2k}) = (a_2, a_4, a_6, \dots)$.
- b) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ dizisinde çift indisli terimler 1, tek indisli terimler 0'dır. $n_k = 2k$ ile $(a_{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$, $n_k = 2k - 1$ ile $(a_{2k-1}) = (0, 0, 0, \dots)$ sabit alt dizileridir. Bu iki alt dizi farklı sayılara yakınsar; birazdan bunun ana dizinin ıraksak olduğunu kanıtladığımızı göreceğiz.
- c) $b_k = \frac{1}{k+4} = a_{k+4}$ olduğundan $n_k = k + 4$ alınır: $n_1 = 5 < n_2 = 6 < \dots$. Bu alt dizi, ana dizinin ilk dört terimi atılarak elde edilmiştir; böyle alt dizilere birazdan “kuyruk” diyeceğiz.

■

Alt dizilerle çalışırken sürekli ihtiyaç duyacağımız basit bir gerçek var: k -ıncı seçilen terimin indisi en az k 'dir. Çünkü ilk seçilen indis en az 1, ondan kesin büyük olan ikincisi en az 2'dir ve bu böyle sürer.

Önerme 24.1 (Alt Dizi İndisleri En Az k 'dir). (n_k) kesin artan bir doğal sayı dizisi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \geq k$ 'dir.

İspat.

k üzerinden tümevarım yapalım (Teorem 9.1).

Taban. n_1 bir doğal sayıdır ve her doğal sayı 1'den küçük değildir (Önerme 9.3); dolayısıyla $n_1 \geq 1$.

Adım. $n_k \geq k$ olsun. (n_k) kesin artan olduğundan $n_{k+1} > n_k$; iki doğal sayı arasında kesin eşitsizlik varsa aralarındaki fark en az 1'dir (Önerme 9.3), yani $n_{k+1} \geq n_k + 1$. Tümevarım varsayımıyla $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$.

Böylece her k için $n_k \geq k$.

■

Bu önermenin bir sonucu şudur: $k \rightarrow \infty$ iken $n_k \rightarrow +\infty$; çünkü M ne olursa olsun $k > M$ olan her k için $n_k \geq k > M$ olur (Sonuç 12.1). Dolayısıyla bir alt dizinin limitine bakarken “ $k \rightarrow \infty$ ” ile “ $n_k \rightarrow \infty$ ” aynı şeyi söyler: alt dizi de ana dizi gibi sonsuza doğru ilerler, yalnızca bazı terimleri atlar.

24.2 Alt Dizilerin Yakınsaklığı

Bir dizi a 'ya yakınsıyorsa terimleri bir yerden sonra a 'nın istediğimiz kadar küçük komşuluğuna girer. Alt dizinin terimleri bu terimlerin arasından seçildiğine göre alt dizi de aynı komşuluğa girmek zorundadır. Tek dikkat edilecek nokta, alt dizinin indislerinin yeterince büyüdüğünden emin olmaktır; bunu Önerme 24.1 sağlar.

Teorem 24.1 (Yakınsak Dizinin Her Alt Dizisi Aynı Limite Yakınsar). (a_n) dizisi $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyorsa her (a_{n_k}) alt dizisi de a 'ya yakınsar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Ayrıca $\lim a_n = +\infty$ ise her alt dizinin limiti $+\infty$, $\lim a_n = -\infty$ ise her alt dizinin limiti $-\infty$ 'dur.

İspat.

$(a_n) \rightarrow a$ olsun ve (a_{n_k}) herhangi bir alt dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımı (Tanım 20.1) gereği öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$n \geq n_\varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Şimdi $k \geq n_\varepsilon$ olsun. Önerme 24.1 gereği $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$; dolayısıyla $n = n_k$ için yukarıdaki gerektirme uygulanır ve $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ elde edilir. Demek ki her $\varepsilon > 0$ için, $k \geq n_\varepsilon$ olduğunda $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ sağlanır; bu tam olarak $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ demektir. (Alt dizi için işe yarayan indis, ana dizininkiyle aynı n_ε 'dur.)

Sonsuz limit durumu aynı kalıpla gider. $\lim a_n = +\infty$ olsun. $M \in \mathbb{R}$ verilsin; Tanım 22.1 gereği $n \geq n_M$ için $a_n > M$ olacak biçimde bir n_M vardır. $k \geq n_M$ için $n_k \geq k \geq n_M$, dolayısıyla $a_{n_k} > M$. Yani $\lim a_{n_k} = +\infty$. $-\infty$ durumu $a_n < M$ ile aynıdır.

■

Teoremin karşıtı da doğrudur, üstelik ispatı neredeyse hiç emek istemez: dizinin kendisi bir alt dizi olduğundan, “her alt dizi a ’ya yakınsar” ifadesi dizinin kendisinin de a ’ya yakınsadığını içerir.

Sonuç 24.1 (Yakınsaklığın Alt Dizilerle Karakterizasyonu). Bir (a_n) dizisinin $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsaması için gerek ve yeter koşul, her alt dizisinin a ’ya yakınsamasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) **Teorem 24.1.** ($\Leftarrow$ yönü) Her alt dizi a ’ya yakınsasın. $n_k = k$ ile tanımlanan alt dizi (a_n) ’in kendisidir; dolayısıyla $(a_n) \rightarrow a$.

■

Teoremin asıl gücü olumsuz yöndedir: bir dizinin ıraksak olduğunu göstermek için tanımla uğraşmak yerine, uygun iki alt dizi bulmak yeter.

Sonuç 24.2 (Alt Dizilerle ıraksaklık Ölçütü). (a_n) bir dizi olsun.

1. (a_n) ’in farklı limitlere yakınsayan iki alt dizisi varsa (a_n) ıraksaktır.
2. (a_n) ’in ıraksak bir alt dizisi varsa (a_n) ıraksaktır.

İspat.

(1) $(a_{n_k}) \rightarrow p$ ve $(a_{m_k}) \rightarrow q$ olsun, $p \neq q$. (a_n) bir a sayısına yakınsasaydı **Teorem 24.1** gereği her iki alt dizi de a ’ya yakınsardı; limitin tekliğiinden (**Teorem 20.1**) $p = a = q$ olurdu. Bu $p \neq q$ ile çelişir. Demek ki (a_n) yakınsak değildir (**Tanım 20.2**).

(2) (a_n) yakınsak olsaydı **Teorem 24.1** gereği her alt dizisi yakınsak olurdu; ıraksak bir alt dizinin varlığı bununla çelişir.

■

Örnek 24.2 (Alt Dizilerle ıraksaklık). Aşağıdaki dizilerin ıraksak olduğunu alt diziler yardımıyla gösteriniz.

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Çözüm.

a) Çift indisli alt dizi $(a_{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$ sabit dizisidir ve 1’e yakınsar; tek indisli alt dizi $(a_{2k-1}) = (-1, -1, -1, \dots)$ ise -1 ’e yakınsar. $1 \neq -1$ olduğundan **Sonuç 24.2** gereği (a_n) ıraksaktır. Bu, **Örnek 20.6**’ta ε tanımıyla iki kez gösterdiğimiz ıraksaklığın çok daha kısa bir üçüncü ispatıdır.

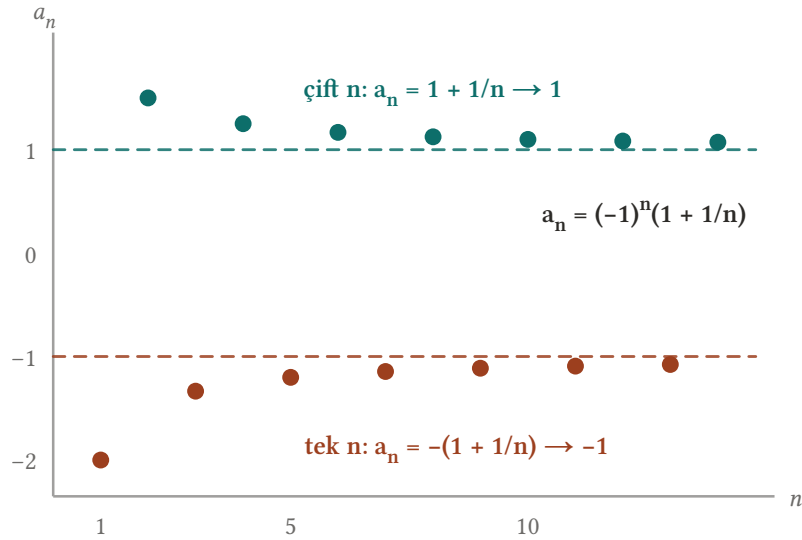
b) Çift indisler için $(-1)^{2k} = 1$, dolayısıyla

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1 + 0 = 1$$

(**Örnek 20.1** ve **Teorem 21.1**; $\frac{1}{2k} \leq \frac{1}{k}$ olduğundan $\frac{1}{2k} \rightarrow 0$). Tek indisler için $(-1)^{2k-1} = -1$, dolayısıyla

$$a_{2k-1} = -\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \rightarrow -1.$$

İki alt dizi farklı limitlere gittiğinden dizi ıraksaktır. Grafikte çift indisli terimler yukarıdan 1’e, tek indisli terimler aşağıdan -1 ’e yaklaşır; dizi iki ayrı sayıya “yığılır” ama hiçbirine yakınsamaz.



Şekil 24.1: $(-1)^n(1 + 1/n)$ dizisi yakınsamaz, ama iki alt dizisi yakınsar: çift indisli terimler (a_{2k}) yukarıdan 1'e, tek indisli terimler (a_{2k-1}) aşağıdan -1'e gider. Farklı limitli iki alt dizi, dizinin kendisinin yakınsak olamayacağını da gösterir.

■

Alt dizi teoremi olumlu yönde de iş görür: bilinen bir limitten yeni limitler türetir. Örneğin $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ olduğunu biliyoruz (Tanım 23.1); $n_k = 2k$ alt dizisi için $(1 + \frac{1}{2k})^{2k} \rightarrow e$ olur, hesap gerekmez.

24.2.1 Tek ve Çift İndisli Alt Diziler

Yukarıdaki örneklerde diziyi hep çift ve tek indisli iki parçaya ayırdık. Bu iki parça birlikte dizinin bütün terimlerini kapsadığından, ikisi de aynı sayıya yakınsıyorsa dizinin kendisi de yakınsamalıdır. Bu, ıraksaklık ölçütünün tam bir karakterizasyona dönüşmesidir.

Teorem 24.2 (Tek ve Çift İndisli Alt Dizilerle Yakınsaklık). (a_n) dizisinin $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsaması için gerek ve yeter koşul, çift indisli alt dizisi (a_{2n}) ile tek indisli alt dizisi (a_{2n-1}) 'in her ikisinin de a 'ya yakınsamasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $(a_n) \rightarrow a$ ise Teorem 24.1 gereği bütün alt dizileri, özel olarak (a_{2n}) ve (a_{2n-1}) , a 'ya yakınsar. ($\Leftarrow$ yönü) $\lim a_{2n} = a$ ve $\lim a_{2n-1} = a$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. İki limit tanımından iki indis elde ederiz:

- öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_{2n} - a| < \varepsilon$;
- öyle bir $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n'_\varepsilon$ için $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$.

$N = \max\{2n_\varepsilon, 2n'_\varepsilon - 1\}$ alalım (Tanım 7.4) ve $n \geq N$ olsun. n ya çifttir ya tektir.

- $n = 2k$ çift ise $2k \geq N \geq 2n_\varepsilon$, dolayısıyla $k \geq n_\varepsilon$; birinci koşuldan $|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \varepsilon$.
- $n = 2k - 1$ tek ise $2k - 1 \geq N \geq 2n'_\varepsilon - 1$, dolayısıyla $k \geq n'_\varepsilon$; ikinci koşuldan $|a_n - a| = |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$.

Her iki durumda da $|a_n - a| < \varepsilon$. Demek ki $n \geq N$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ ve Tanım 20.1 gereği $\lim a_n = a$.

■

Tek indisli alt diziyi $(a_{2n+1}) = (a_3, a_5, \dots)$ olarak almak da aynı sonucu verir; a_1 teriminin eksik olması limiti etkilemez. Teoremin olumsuz yönü, ıraksaklık göstermenin en pratik yoludur.

Sonuç 24.3 (Tek ve Çift İndislerle İraksaklık Ölçütü). (a_{2n}) ve (a_{2n-1}) alt dizileri farklı limitlere yakınsıyorsa ya da bunlardan biri ıraksaksa (a_n) dizisi ıraksaktır.

İspat.

Farklı limitler durumu [Sonuç 24.2 \(1\)](#), ıraksak alt dizi durumu [Sonuç 24.2 \(2\)](#) ile çıkar.

■

Örnek 24.3 (Tek ve Çift İndisli Alt Dizilerle İnceleme). Aşağıdaki dizilerin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2}$
- b) $a_n = n^2(-1)^n$
- c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Çözüm.

a) n çift ise $(-1)^n = 1$ ve $a_n = \frac{3+1}{2} = 2$; n tek ise $(-1)^n = -1$ ve $a_n = \frac{3-1}{2} = 1$. Yani $(a_{2n}) = (2, 2, 2, \dots) \rightarrow 2$ ve $(a_{2n-1}) = (1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1$. Limitler farklı ($2 \neq 1$) olduğundan [Sonuç 24.3](#) gereği dizi ıraksaktır.

b) Çift indisler için $a_{2k} = (2k)^2 = 4k^2$. Bu alt dizi üstten sınırlı değildir: her M için $k > M$ seçilirse ([Sonuç 12.1](#)) $4k^2 \geq k > M$ olur. Sınırsız dizi yakınsak olamaz ([Teorem 20.2](#)), dolayısıyla (a_{2k}) ıraksaktır ve [Sonuç 24.3](#) gereği (a_n) de ıraksaktır. (Aslında $(a_{2k}) \rightarrow +\infty$ ve $(a_{2k-1}) = (-(2k-1)^2) \rightarrow -\infty$ 'dur; dizi sınırsızdır ama ne $+\infty$ 'a ne $-\infty$ 'a gider.)

c) $a_{2k} = \frac{1}{2k} \rightarrow 0$ ve $a_{2k-1} = -\frac{1}{2k-1} \rightarrow 0$; her iki alt dizi de 0'a yakınsar. [Teorem 24.2](#) gereği $(a_n) \rightarrow 0$. Bu kez alt diziler yakınsaklığı kanıtladı.

■

24.3 Dizinin Kuyruğu

Bir dizinin yakınsaklığı, başındaki sonlu sayıda terime bağlı değildir; önemli olan “sonsuzda giderken” ne olduğudur. İlk k terimi atınca elde edilen alt diziyeye kuyruk diyeceğiz.

Tanım 24.2 (Dizinin Kuyruğu). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir dizi ve $k \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $n_j = j + k$ indisleriyle elde edilen

$$(a_{n+k})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots)$$

alt dizisine (a_n) dizisinin **k -kuyruğu** (k -tail) ya da kısaca **kuyruğu** (tail) denir. k -kuyruk, dizinin $(k + 1)$ -inci teriminden itibaren bütün terimlerini içerir.

Örneğin $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin 4-kuyruğu $(a_{n+4}) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$, 1-kuyruğu $(a_{n+1}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ 'tür. Kuyruk gerçekten bir alt dizidir, çünkü $n_j = j + k$ kesin artan bir doğal sayı dizisidir. Kuyruk kavramının işlevi şu teoremdir: dizi ile kuyruğu, yakınsaklık açısından birbirinden ayırt edilemez.

Teorem 24.3 (Kuyruk ile Yakınsaklık İlişkisi). (a_n) bir dizi olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

1. (a_n) yakınsaktır.
2. Her $k \in \mathbb{N}$ için k -kuyruğu (a_{n+k}) yakınsaktır.
3. Bir $k \in \mathbb{N}$ için k -kuyruğu (a_{n+k}) yakınsaktır.

Bu limitlerden biri varsa hepsi vardır ve eşittir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k}.$$

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2). $(a_n) \rightarrow a$ olsun. Her k için (a_{n+k}) bir alt dizidir; [Teorem 24.1](#) gereği a 'ya yakınsar.

(2) $\Rightarrow$ (3). Her k için doğru olan bir ifade, özel olarak $k = 1$ için doğrudur.

(3) $\Rightarrow$ (1). Bir k için $b_n = a_{n+k}$ dizisi bir a sayısına yakınsasın. $\varepsilon > 0$ verilsin; limit tanımından öyle bir n_ε vardır ki $n \geq n_\varepsilon$ için $|b_n - a| < \varepsilon$, yani $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$. Şimdi $n'_\varepsilon = n_\varepsilon + k$ alalım ve $m \geq n'_\varepsilon$ olsun. O zaman $m - k \geq n_\varepsilon$ ve $m - k \in \mathbb{N}$ 'dir; dolayısıyla

$$|a_m - a| = |a_{(m-k)+k} - a| = |b_{m-k} - a| < \varepsilon.$$

Demek ki $m \geq n'_\varepsilon$ için $|a_m - a| < \varepsilon$; bu $(a_n) \rightarrow a$ demektir. Ana dizi için gereken indis, kuyruğun-
kenden yalnızca k kadar büyüktür.

Limitlerin eşitliği. (1) $\Rightarrow$ (2) adımında kuyruğun limiti ana dizinin limiti a çıktı; (3) $\Rightarrow$ (1) adımında ana dizinin limiti kuyruğun limiti a çıktı. Her iki yönde de limit aynıdır.

■

Teorem, bir dizinin limiti için “dizinin hangi terimden başladığının” önemsiz olduğunu söyler: ilk bir milyon terimi silmek ya da değiştirmek limiti etkilemez. Aynı akıl yürütme sonsuz limitler için de geçerlidir: $(a_n) \rightarrow +\infty$ ancak ve ancak bir (her) kuyruğu $+\infty$ 'a ıraksarsa. En çok kullanılan özel durum $k = 1$ 'dir.

Sonuç 24.4 (Bir Adım Kaydırma Limiti Değiştirmez). (a_n) yakınsak bir dizi ise (a_{n+1}) de yakınsaktır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

İspat.

Teorem 24.3'te $k = 1$ alınır.

■

Bu görünüşte basit eşitlik, özyineli dizilerin limitini bulmanın anahtarıydı: önceki bölümde $a_{n+1} = \frac{a_n+5}{3}$ bağıntısının iki yanında limite geçerken tam olarak bunu kullanmıştık (Örnek 23.5). Orada “kuyruk lemması” diye andığımız olgu, artık tam olarak ispatlanmış durumdadır.

Örnek 24.4 (Başı Bozuk Bir Dizi). $a_1 = 100$, $a_2 = -7$, $a_3 = 3$ ve $n \geq 4$ için $a_n = \frac{1}{n}$ ile tanımlanan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.

Dizinin 3-kuyruğu $(a_{n+3}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, yani $b_n = \frac{1}{n+3}$ dizisidir. $0 < \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n}$ ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan (Örnek 20.1) sıkıştırma teoremiyle (Teorem 21.6) $b_n \rightarrow 0$. Kuyruk yakınsak olduğundan Teorem 24.3 gereği (a_n) de yakınsaktır ve $\lim a_n = \lim b_n = 0$. İlk üç terimin ne kadar “yanlış yerde” olduğunun bir önemi yoktur.

■

24.4 Monoton Alt Diziler

Şimdi bölümün ana hedefine, Bolzano–Weierstrass teoremine hazırlanıyoruz. Temel fikir şudur: bir dizi yakınsak olmasa bile, sınırlıysa içinden yakınsak bir alt dizi çıkarılabilir. Bunun için önce her diziden monoton bir alt dizi çıkarılabileceğini göstereceğiz; sonra monoton yakınsaklık teoremi gerisini halledecek. Önce basit bir gözlem.

Önerme 24.2 (Monoton Dizinin Alt Dizileri Monotondur). Artan bir dizinin her alt dizisi artandır; azalan bir dizinin her alt dizisi azalandır. Aynı ifadeler “kesin artan” ve “kesin azalan” için de geçerlidir.

İspat.

(a_n) artan ve (a_{n_k}) bir alt dizisi olsun. $k < l$ olan $k, l \in \mathbb{N}$ alalım. İndis dizisi kesin artan olduğundan $n_k < n_l$; (a_n) artan olduğundan (Tanım 19.4) $a_{n_k} \leq a_{n_l}$. Demek ki alt dizi artandır. Azalan ve kesin durumlarda yalnızca eşitsizliğin yönü ya da türü değişir.

■

Asıl teorem çok daha şaşırtıcıdır: dizi ne kadar düzensiz olursa olsun, içinden monoton bir parça ayıklanabilir. İspat, “zirve” fikrine dayanır: bir terim kendinden sonra gelen bütün terimlerden kesin büyükse ona zirve diyelim. Sonsuz tane zirve varsa zirveler azalan bir alt dizi oluşturur; sonlu tane varsa, son zirveden sonraki her terimin ilerisinde, yani daha büyük indisli terimler arasında, kendinden küçük olmayan bir terim bulunur ve bunları zincirleyerek artan bir alt dizi kurarız.

Teorem 24.4 (Monoton Alt Dizi Teoremi). Her reel sayı dizisinin monoton bir alt dizisi vardır.

İspat.

(a_n) bir dizi olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ indisine, kendinden sonraki bütün terimler a_n 'den kesin küçükse **zirve** (peak) diyelim ve zirvelerin kümesini

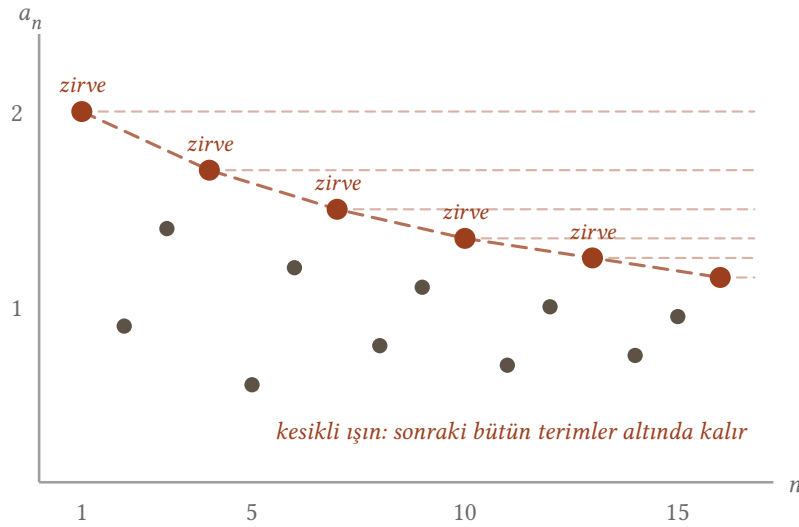
$$Z = \{n \in \mathbb{N} : \text{her } m > n \text{ için } a_m < a_n\}$$

ile gösterelim. Z ya sonsuz ya sonludur; iki durumu ayrı inceleyelim.

Durum 1: Z sonsuz. Sonsuz bir doğal sayı kümesinin elemanları küçükten büyüğe sıralanabilir: $n_1 = \min Z$ (Teorem 9.2), $n_2 = \min(Z \setminus \{n_1\})$, genel olarak $n_{k+1} = \min(Z \setminus \{n_1, \dots, n_k\})$. Z sonsuz olduğundan her adımda geriye boş olmayan bir küme kalır ve bu minimumlar vardır. Kuruluş gereği $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ kesin artandır: n_{k+1} , n_k 'nin minimumu olarak seçildiği $Z \setminus \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$ kümesinin de bir elemanıdır, dolayısıyla $n_{k+1} \geq n_k$; $n_{k+1} \neq n_k$ olduğundan $n_{k+1} > n_k$. Şimdi $n_k \in Z$ bir zirvedir ve $n_{k+1} > n_k$ olduğundan zirve tanımı gereği $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$. Böylece

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$$

kesin azalan bir alt dizi elde ederiz.



Şekil 24.2: Bir terim, kendisinden sonra gelen bütün terimlerden büyükse zirvedir; şekilde zirveler koyu, her birinden sağa çizilen kesikli ışının altında kalan terimler ise açık renklidir. Zirveler sonsuz çoklukta ise kendileri azalan bir alt dizi oluşturur; bu, her dizinin monoton bir alt dizisi olduğunun ispatındaki ilk durumdur.

Durum 2: Z sonlu (boş olabilir). Z boş değilse $N = \max Z$, boşsa $N = 0$ olsun. Her $n > N$ için $n \notin Z$ 'dir. $n \notin Z$ olmasının anlamı, zirve koşulunun olumsuzlanmasıdır (Teorem 2.1):

$$n \notin Z \Leftrightarrow \text{öyle bir } m > n \text{ vardır ki } a_m \geq a_n.$$

Yani N 'den sonraki her terimin ilerisinde, yani indisi ondan büyük olan terimler arasında, ondan küçük olmayan bir terim bulunur. Alt diziyi özyneli olarak kuralım. $n_1 = N + 1$ alalım; $n_1 > N$ olduğundan $n_1 \notin Z$, dolayısıyla $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ olacak biçimde bir $n_2 > n_1$ vardır. $n_2 > n_1 > N$ olduğundan $n_2 \notin Z$; öyleyse $a_{n_3} \geq a_{n_2}$ olacak biçimde bir $n_3 > n_2$ vardır. Genel olarak $n_k > N$ seçilmişse $n_k \notin Z$ 'dir ve

$a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ sağlayan bir $n_{k+1} > n_k$ bulunur; bu yeni indis de N 'den büyüktür, dolayısıyla süreç hiç durmaz. Böylece kesin artan bir (n_k) indis dizisi ve

$$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq \dots$$

artan bir alt dizi elde ederiz.

Her iki durumda da monoton bir alt dizi bulunmuştur.

■

Teorem, “kaos”un içinden düzen çıkarır: hangi diziyi alırsanız alın, terimlerinin sonsuz tanesi ya hep yükselir ya hep alçalır. Örneğin $(-1)^n$ için bütün çift indisler zirvedir mi? $a_{2k} = 1$ ve sonraki çift terimler de 1 olduğundan (kesin küçük değil) hayır; tek indisler de zirve değildir, çünkü -1 'den sonra 1 gelir. Bu dizide hiç zirve yoktur: $Z = \emptyset$, $N = 0$ ve $n_1 = 1$. İspatın ikinci durumu $a_1 = -1$ ile başlayıp $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots$ biçiminde, örneğin $n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = 6, \dots$ seçimiyle $(-1, 1, 1, 1, \dots)$ alt dizisini üretir.

24.5 Bolzano–Weierstrass Teoremi

Monoton alt dizi teoremiyle monoton yakınsaklık teoremini birleştiren analiz en önemli sonuçlarından biri neredeyse kendiliğinden çıkar.

Teorem 24.5 (Bolzano–Weierstrass Teoremi (Dizi Sürümü)). *Sınırlı her reel sayı dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

İspat.

(a_n) sınırlı olsun: her n için $|a_n| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır (Tanım 19.3, Önerme 19.1). Teorem 24.4 gereği (a_n) 'in monoton bir (a_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu alt dizinin terimleri ana dizinin terimleri arasından seçildiğinden her k için $|a_{n_k}| \leq M$; yani alt dizi de sınırlıdır. Sınırlı ve monoton bir dizi Teorem 23.1 gereği (bkz. Sonuç 23.3) yakınsaktır. Demek ki (a_{n_k}) yakınsak bir alt dizidir.

■

Teorem, sınırlılık ile yakınsaklık arasındaki köprüdür. “Sınırlı $\Rightarrow$ yakınsak” yanlıştır; ama “sınırlı $\Rightarrow$ yakınsak bir alt dizi var” her zaman doğrudur. İleride süreklilikle ilgili büyük teoremlerin (bir kapalı aralıkta sürekli fonksiyonun en büyük değerini alması gibi) ispatlarında bu teorem sürekli devreye girecektir.

⚠ Alt dizi tek değildir

Teorem yakınsak bir alt dizinin **varlığını** söyler, tekliğini değil. Farklı alt diziler farklı limitlere gidebilir; nitekim $(-1)^n$ dizisinde bir alt dizi 1'e, bir başkası -1 'e yakınsar. Teorem, limitin ne olduğu hakkında da bir şey söylemez.

Örnek 24.5 (Bolzano–Weierstrass Teoreminin Uygulamaları).

- $a_n = \sin n$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.
- $a_n = (-1)^n$ dizisinin yakınsak alt dizilerini bulunuz.
- $a_n = n$ dizisinin yakınsak alt dizisi var mıdır?

Çözüm.

a) Her n için $-1 \leq \sin n \leq 1$, yani $|a_n| \leq 1$; dizi sınırlıdır. Teorem 24.5 gereği yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizinin hangi terimlerden oluştuğunu ya da limitinin ne olduğunu bulmak hiç kolay değildir (aslında $[-1, 1]$ aralığındaki her sayı böyle bir alt dizinin limitidir; bunun ispatı bu notların kapsamı dışındadır); ama varlığını biliyoruz. Teoremin tipik kullanımı budur: nesneyi göstermeden var olduğunu kanıtlamak.

b) Dizi sınırlıdır ($|a_n| = 1$). Yakınsak alt dizilerini biliyoruz: $(a_{2k}) = (1, 1, \dots) \rightarrow 1$ ve $(a_{2k-1}) = (-1, -1, \dots) \rightarrow -1$. Genel olarak bir alt dizi ancak bir yerden sonra yalnızca çift ya da yalnızca tek indisler içeriyorsa yakınsar; aksi hâlde hem 1'e hem -1 'e giden alt-alt dizileri olur ve Sonuç 24.2 gereği ıraksar.

c) Hayır. $(a_{n_k}) = (n_k)$ herhangi bir alt dizi olsun; **Önerme 24.1** gereği $n_k \geq k$, dolayısıyla alt dizi üstten sınırlı değildir ve **Teorem 20.2** gereği yakınsak olamaz. Bu, teoremdaki sınırlılık hipotezinin vazgeçilmez olduğunu gösterir.

Bolzano–Weierstrass teoremini daha önce kümeler diliyle görmüştük (**Teorem 17.5**): sonsuz ve sınırlı her kümenin bir yığılma noktası vardır. İki ifade birbirine denktir; her biri diğerinden çıkar.

Önerme 24.3 (Küme ve Dizi Sürümlerinin Denklığı). Aşağıdaki iki ifade birbirine denktir:

1. (Küme sürümü) $\mathbb{R}$ 'nin sonsuz ve sınırlı her alt kümesinin bir yığılma noktası vardır.
2. (Dizi sürümü) Sınırlı her reel sayı dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2). (a_n) sınırlı bir dizi olsun ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ görüntü kümesini alalım. A sınırlıdır (**Tanım 10.2**). İki durum vardır.

A sonlu ise sonsuz tane indis sonlu tane değere dağıldığından, en az bir $c \in A$ değeri sonsuz çoklukta n için $a_n = c$ sağlar. Bu indisleri küçükten büyüğe $n_1 < n_2 < \dots$ diye sıralarsak $(a_{n_k}) = (c, c, c, \dots)$ sabit alt dizisi c 'ye yakınsar.

A sonsuz ise (1) gereği A 'nın bir c yığılma noktası vardır. **Teorem 17.1** gereği c 'nin her komşuluğu A 'nın sonsuz çoklukta elemanını içerir; farklı elemanlar farklı indislere karşılık geldiğinden her komşulukta sonsuz çoklukta n indis için a_n bulunur. Alt diziyi adım adım kuralım: $|a_{n_1} - c| < 1$ olan bir n_1 seçelim. n_k seçilmişse, $(c - \frac{1}{k+1}, c + \frac{1}{k+1})$ komşuluğuna düşen sonsuz çoklukta indis arasından n_k 'dan büyük bir n_{k+1} seçelim (sonsuz çoklukta indisin hepsi n_k 'dan küçük olamaz). Böylece kesin artan (n_k) ve her k için $|a_{n_k} - c| < \frac{1}{k}$ elde ederiz. $0 \leq |a_{n_k} - c| < \frac{1}{k} \rightarrow 0$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle (**Teorem 21.6**) $a_{n_k} \rightarrow c$.

(2) $\Rightarrow$ (1). A sonsuz ve sınırlı olsun. Sonsuz bir kümeden birbirinden farklı terimli bir dizi seçilebilir: $a_1 \in A$ al, $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ al ve böyle sürdür. Bu özyineli seçim hiçbir adımda tıkanmaz: $a_1, \dots, a_n$ birbirinden farklı olarak seçilmişken $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ boş olsaydı $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ olur, yani A sonlu olurdu (**Tanım 14.2**); oysa A sonsuzdur. (Bu özyineli seçim, **Önerme 14.3** ile tıpatıp aynı kuruluştur.) (a_n) dizisi A 'da kaldığından sınırlıdır; (2) gereği yakınsak bir (a_{n_k}) alt dizisi vardır, $a_{n_k} \rightarrow c$ olsun. c 'nin A 'nın yığılma noktası olduğunu gösterelim (**Tanım 17.1**): $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklık gereği bir yerden sonra bütün a_{n_k} terimleri $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ komşuluğundadır; bu terimler birbirinden farklı olduğundan en çok biri c 'ye eşittir; geri kalan sonsuz tanesi c 'den farklıdır ve A 'dadır. Demek ki c 'nin her delinmiş komşuluğu A ile kesişir; c bir yığılma noktasıdır.

Böylece **Teorem 17.5** için verdiğimiz ikiye bölme ispatı ile bu bölümdeki monoton alt dizi ispatı, aynı gerçeğin iki farklı yüzüdür. Her ikisinin de kökünde tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) yatar.

24.5.1 Sınırsız Diziler

Sınırlı dizilerde yakınsak alt dizi bulduk. Sınırsız dizilerde yakınsak alt dizi olmayabilir; ama sonsuza giden monoton bir alt dizi her zaman vardır.

Teorem 24.6 (Sınırsız Dizinin Sonsuza Giden Alt Dizisi). Sınırsız her dizinin, limiti $+\infty$ ya da $-\infty$ olan monoton bir alt dizisi vardır. Daha kesin olarak: üstten sınırlı olmayan bir dizinin $+\infty$ 'a iraksayan kesin artan bir alt dizisi, alttan sınırlı olmayan bir dizinin $-\infty$ 'a iraksayan kesin azalan bir alt dizisi vardır.

İspat.

(a_n) sınırsız olsun; o zaman ya üstten ya alttan sınırlı değildir (**Tanım 19.3**). Üstten sınırlı olmadığını varsayalım; öteki durum simetriktir.

Üstten sınırlı olmamak şu demektir: her $M \in \mathbb{R}$ için $a_n > M$ olan bir n vardır. Alt diziyi özyineli olarak kuralım. $M = 1$ için $a_{n_1} > 1$ olan bir n_1 seçelim. n_k seçilmiş olsun ve

$$M_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_k}, k + 1\}$$

alalım (sonlu bir kümenin maksimumu vardır). $a_n > M_k$ olan bir n vardır; bu n için $n > n_k$ olmalıdır, çünkü $n \leq n_k$ olsaydı $a_n \leq M_k$ olurdu. Bu indisi n_{k+1} olarak alalım. Kuruluş gereği

$$n_{k+1} > n_k, \quad a_{n_{k+1}} > M_k \geq a_{n_k}, \quad a_{n_{k+1}} > M_k \geq k + 1.$$

Demek ki (n_k) kesin artan, (a_{n_k}) kesin artan ve her k için $a_{n_k} > k$ 'dir (ilk terim için $a_{n_1} > 1$). Son olarak $a_{n_k} \rightarrow +\infty$ olduğunu görelim (Tanım 22.1): $M \in \mathbb{R}$ verilsin. Sonuç 12.1 gereği $k_M > M$ olan bir $k_M \in \mathbb{N}$ vardır; $k \geq k_M$ için $a_{n_k} > k \geq k_M > M$. Öyleyse $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty$. Altan sınırlı olmayan durumda $M_k = \min\{a_1, \dots, a_{n_k}, -(k+1)\}$ ile $a_{n_{k+1}} < M_k$ seçilir; $a_{n_k} < -k$ ve $a_{n_k} \rightarrow -\infty$ elde edilir. ■

Teorem 24.5 ile bu teorem birleşince şu tam tablo ortaya çıkar: **her** dizinin, limiti bir reel sayı ya da $\pm\infty$ olan monoton bir alt dizisi vardır. Sınırlı dizi reel limitli bir alt dizi, sınırsız dizi sonsuz limitli bir alt dizi verir. Örneğin $a_n = n^2(-1)^n$ dizisinde $(a_{2k}) = (4k^2) \rightarrow +\infty$ ve $(a_{2k-1}) \rightarrow -\infty$ 'dur (Örnek 24.3).

24.6 İç İç Aralıklar: Dizilerle Yeni Bir İspat

Tamlığın bir başka yüzü olan iç içe aralıklar teoremini (Teorem 10.5) supremum diliyle ispatlamıştık. Orada uzunluk koşulunu “her $\varepsilon > 0$ için $b_n - a_n < \varepsilon$ olan bir n vardır” biçiminde yazmak zorunda kalmıştık, çünkü dizi limiti henüz yoktu. Şimdi teoremi dizi diliyle yeniden ifade edip monoton yakınsaklık teoremiyle ispatlayabiliriz.

Teorem 24.7 (İç İç Aralıklar Teoremi (Dizi Sürümü)). $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı ve sınırlı aralıkları iç içe olsun: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$. O zaman

1. (a_n) artan, (b_n) azalandır; ikisi de yakınsaktır ve $a = \lim a_n \leq \lim b_n = b$ olmak üzere

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b] \neq \emptyset;$$

2. ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ise kesişim tek noktadır: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.

İspat.

Monotonluk ve sınırlılık. $I_{n+1} \subseteq I_n$ olması, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ demektir: sol uçlar sağa, sağ uçlar sola kayar. Dolayısıyla (a_n) artan, (b_n) azalandır. Her n için $a_n \leq b_n \leq b_1$ olduğundan (a_n) üstten b_1 ile sınırlıdır; benzer biçimde $a_1 \leq a_n \leq b_n$ olduğundan (b_n) alttan a_1 ile sınırlıdır.

Limitler. Teorem 23.1 gereği her iki dizi yakınsaktır:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Her n için $a_n \leq b_n$ olduğundan limitlerde sıralama teoremiyle (Teorem 21.3) $a \leq b$.

Kesişim $[a, b]$ 'dir. a bir supremum olduğundan her n için $a_n \leq a$; b bir infimum olduğundan $b \leq b_n$ (Tanım 10.4). Dolayısıyla her n için $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, yani $[a, b] \subseteq I_n$; buradan $[a, b] \subseteq \bigcap I_n$. Tersine $x \in \bigcap I_n$ olsun; her n için $a_n \leq x \leq b_n$. O zaman $x, \{a_n\}$ kümesinin bir üst sınırıdır ve supremum en küçük üst sınır olduğundan $a \leq x$; benzer biçimde $x, \{b_n\}$ 'nin bir alt sınırıdır ve $x \leq b$. Yani $x \in [a, b]$. İki kapsama birlikte $\bigcap I_n = [a, b]$ verir; $a \leq b$ olduğundan bu küme boş değildir.

Tek nokta. $b_n - a_n \rightarrow 0$ olsun. Limit aritmetiği (Teorem 21.1) ile $b - a = \lim(b_n - a_n) = 0$, yani $a = b$ ve $\bigcap I_n = [a, a] = \{a\}$. ■

Bu ispat, Teorem 10.5'in ispatıyla aynı iskelete sahiptir: orada $a = \sup\{a_n\}$ doğrudan tamlık aksiyomundan alınmıştı, burada monoton yakınsaklık teoreminden geldi; ikisi aynı sayıdır. Uzunluk koşulları da denktir: $(b_n - a_n)$ azalan ve alttan 0 ile sınırlı bir dizidir, dolayısıyla “her ε için bir n 'de $b_n - a_n < \varepsilon$ ” demek, “ $b_n - a_n \rightarrow 0$ ” demektir.

⚠ Aralıklar kapalı olmalıdır

$I_n = (0, \frac{1}{n})$ açık aralıkları iç içedir ve uzunlukları 0'a gider; ama kesişimleri boştur. Gerçekten $x > 0$ ise **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n} < x$ olan bir n vardır ve $x \notin I_n$; $x \leq 0$ ise zaten hiçbir I_n 'de değildir. İspatın neresi bozuldu? Sol uçlar $a_n = 0$ ve $a = 0$ 'dır; ama 0 hiçbir I_n 'e ait değildir, çünkü aralıklar uçlarını içermez. Kapalılık, limitin aralıkta kalmasını garanti eden koşuldur.

Aynı fikir aralıklar yerine genel kapalı ve sınırlı kümeler için de geçerlidir; bu kez Bolzano–Weierstrass teoremi devreye girer.

Önerme 24.4 (İç İç Kapalı ve Sınırlı Kümeler). $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$ boş olmayan, kapalı ve sınırlı kümeler olsun. O zaman $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

İspat.

Her n için $C_n \neq \emptyset$ olduğundan bir $x_n \in C_n$ seçelim. Her n için $C_n \subseteq C_1$ ve C_1 sınırlı olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir. **Teorem 24.5** gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır; $x_{n_k} \rightarrow x$ olsun. x 'in her C_m 'de olduğunu gösterelim. $m \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $k \geq m$ için $n_k \geq k \geq m$ (**Önerme 24.1**), dolayısıyla $x_{n_k} \in C_m \subseteq C_m$. Yani (x_{n_k}) dizisinin m -kuyruğu tamamen C_m içindedir ve **Teorem 24.3** gereği x 'e yakınsar. C_m kapalı olduğundan **Teorem 21.10** gereği $x \in C_m$. m keyfi olduğundan $x \in \bigcap C_n$.

■

24.7 Dizisel Kompaktlık

Kompakt kümeleri açık örtülerle tanımlamıştık (**Tanım 18.2**) ve Heine–Borel teoremi (**Teorem 18.5**) bunların tam olarak kapalı ve sınırlı kümeler olduğunu söylüyordu. Bolzano–Weierstrass teoremi, kompaktlığın diziler diliyle üçüncü bir tanımını olanaklı kılar: bir kümede kalan her dizinin, limiti yine o kümede olan yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 24.3 (Dizisel Kompakt Küme). $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. K içindeki her (x_n) dizisinin, limiti K 'ya ait olan yakınsak bir alt dizisi varsa – yani her (x_n) , $x_n \in K$, dizisi için $x_{n_k} \rightarrow c$ ve $c \in K$ olacak biçimde bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunuyorsa – K 'ya **dizisel kompakt** (sequentially compact) denir.

Tanımda iki koşul iç içedir: yakınsak bir alt dizi olmalı (bu, sınırlılıkla ilgilidir) ve limiti kümeden kaçmamalı (bu, kapalılıkla ilgilidir). Boş küme, içinde hiç dizi olmadığından dizisel kompattır.

Örnek 24.6 (Dizisel Kompakt Olan ve Olmayan Kümeler).

- $(0, 1]$ kümesinin dizisel kompakt olmadığını gösteriniz.
- $\mathbb{N}$ kümesinin dizisel kompakt olmadığını gösteriniz.
- $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kümesinin dizisel kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $x_n = \frac{1}{n}$ dizisinin her terimi $(0, 1]$ içindedir ve $x_n \rightarrow 0$ (**Örnek 20.1**). **Teorem 24.1** gereği her alt dizisi de 0'a yakınsar; ama $0 \notin (0, 1]$. Demek ki bu dizinin limiti kümede olan hiçbir alt dizisi yoktur; küme dizisel kompakt değildir. Sorun kapalılığın eksikliğidir.

b) $x_n = n$ dizisi $\mathbb{N}$ içindedir ve **Örnek 24.5** (c) gereği hiçbir alt dizisi yakınsamaz. Küme dizisel kompakt değildir; bu kez sorun sınırsızlıktır.

c) (x_n) , K içinde bir dizi olsun. $0 \leq x_n \leq 1$ olduğundan dizi sınırlıdır; **Teorem 24.5** gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır, $x_{n_k} \rightarrow c$ olsun. $c \in K$ olduğunu gösterelim. $c \neq 0$ ise $c > 0$ 'dır (terimler negatif değil, **Sonuç 21.2**). c 'nin yalnızca sonlu tane $\frac{1}{m}$ içeren küçük bir komşuluğunu alalım: $\varepsilon = \frac{c}{2}$ için $\frac{1}{m} > \frac{c}{2}$ ancak $m < \frac{2}{c}$ iken olur, sonlu tane m . Alt dizi bir yerden sonra bu komşulukta kaldığından terimleri sonlu bir küme içinde dolaşır; sonlu bir kümede kalan yakınsak bir dizi bir yerden sonra sabit olmak zorundadır (aksi hâlde en az iki farklı değer sonsuz kez tekrar eder ve iki farklı limitli alt dizi verir), dolayısıyla c bu sonlu kümenin, yani K 'nın bir elemanıdır. $c = 0$ ise $0 \in K$. Her durumda $c \in K$; küme dizisel kompattır.

■

Örneklerdeki gözlemler genel bir teoreme dönüşür: dizisel kompaktlık, kompaktlık ve “kapalı ve sınırlı” olmak, $\mathbb{R}$ ’de aynı şeydir.

Teorem 24.8 (Kompaktlığın Üç Denk Biçimi). $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

1. K kompakttır (her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır).
2. K dizisel kompakttır (K ’daki her dizinin, limiti K ’da olan yakınsak bir alt dizisi vardır).
3. K kapalı ve sınırlıdır.

İspat.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). Bu tam olarak Heine–Borel teoremidir (Teorem 18.5).

(3) $\Rightarrow$ (2). K kapalı ve sınırlı olsun; (x_n) , K içinde bir dizi olsun. K sınırlı olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir; Teorem 24.5 gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır, $x_{n_k} \rightarrow c$ olsun. Alt dizinin bütün terimleri K ’dadır ve K kapalıdır; kapalılığın dizisel karakterizasyonu (Teorem 21.10) gereği $c \in K$. Demek ki K dizisel kompakttır.

(2) $\Rightarrow$ (3). K dizisel kompakt olsun. $K = \emptyset$ ise kapalı ve sınırlıdır; $K \neq \emptyset$ olsun.

K sınırlıdır. Aksini varsayalım: K sınırlı olmasın. O zaman hiçbir $n \in \mathbb{N}$ için $K \subseteq [-n, n]$ olamaz; yani her n için $|x_n| > n$ olan bir $x_n \in K$ seçebiliriz. (x_n) , K içinde bir dizidir; dizisel kompaktlık gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Ama $|x_{n_k}| > n_k \geq k$ (Önerme 24.1), dolayısıyla alt dizi sınırsızdır: her M için $k > M$ alınırsa $|x_{n_k}| > M$. Sınırsız bir dizi yakınsak olamaz (Teorem 20.2). Çelişki; K sınırlıdır.

K kapalıdır. Teorem 21.10’yi kullanalım: (x_n) , K içinde yakınsak bir dizi ve $x_n \rightarrow x$ olsun; $x \in K$ göstermeliyiz. Dizisel kompaktlık gereği (x_n) ’in limiti K ’da olan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır: $x_{n_k} \rightarrow c \in K$. Öte yandan $(x_n) \rightarrow x$ olduğundan Teorem 24.1 gereği $x_{n_k} \rightarrow x$. Limitin tekliğinden (Teorem 20.1) $x = c \in K$. Demek ki K ’daki her yakınsak dizinin limiti K ’dadır; K kapalıdır.

Böylece (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (2) elde edilir.

■

Bu teorem, kompaktlık için elimize üç ayrı araç verir. Bir kümenin kompakt olduğunu göstermek için “kapalı ve sınırlı” en kolaydır; kompaktlığı **kullanmak** içinse dizisel biçim çoğu zaman en elverişlisidir. Nitekim süreklilik bölümlerinde “kompakt kümede sürekli fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır” gibi teoremler, kümeden bir dizi seçip yakınsak bir alt dizi çıkararak ispatlanacaktır. Ayrıca Teorem 18.5’in ispatında kullandığımız ikiye bölme yöntemi ile bu bölümdeki iç içe aralıklar teoremi arasındaki bağ da artık daha görünürdür: her ikisi de daralan kapalı aralıkların ortak noktasını yakalar.

24.8 Alıştırmalar

Alıştırma 24.1 (Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Alıştırmaları).

- a) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ dizisinin iraksak olduğunu gösteriniz. Bu dizinin yakınsak alt dizilerinin limitleri hangi sayılar olabilir?
- b) (a_{2n}) , (a_{2n-1}) ve (a_{3n}) alt dizilerinin üçü de yakınsaksa (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.
- c) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$, yani $(0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$ dizisinin yakınsak alt dizilerinin bütün limitlerini bulunuz ve dizinin iraksak olduğunu gösteriniz.
- d) (a_n) sınırlı bir dizi olsun ve bütün yakınsak alt dizileri aynı a sayısına yakınsasın. $(a_n) \rightarrow a$ olduğunu gösteriniz. Sınırlılık hipotezi kaldırılırsa sonucun bozulduğunu bir örnekle gösteriniz.
- e) $[0, 1] \cup \{2\}$ ve $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin dizisel kompakt olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Çift indisler için $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1} \rightarrow 1$; tek indisler için $a_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k} = -1 + \frac{1}{2k} \rightarrow -1$ (Teorem 21.1 ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$). Limitler farklı olduğundan Sonuç 24.3 gereği dizi iraksaktır.

Yakınsak bir (a_{n_k}) alt dizisi alalım. İndisleri arasında hem sonsuz tane çift hem sonsuz tane tek sayı olsaydı, çift indisli terimleri (a_{2n}) ’in bir alt dizisi olarak 1’e, tek indisli terimleri -1 ’e yakınsayan iki alt-alt dizi oluştururdu; Sonuç 24.2 gereği (a_{n_k}) iraksak olurdu. Demek ki indisler bir yerden sonra ya hep çift ya hep tektir; o zaman alt dizinin bir kuyruğu (a_{2n}) ’in ya da (a_{2n-1}) ’in alt dizisidir ve Teorem 24.1 ile Teorem 24.3 gereği limiti 1 ya da -1 ’dir. Olası limitler yalnızca 1 ve -1 ’dir; ikisi de gerçekleşir.

- b)** $a_{2n} \rightarrow p$, $a_{2n-1} \rightarrow q$ ve $a_{3n} \rightarrow r$ olsun. (a_{6n}) dizisine bakalım: $6n = 2(3n)$ olduğundan (a_{6n}) , (a_{2n}) 'in $k_n = 3n$ indisli alt dizisidir ve Teorem 24.1 gereği p 'ye yakınsar; $6n = 3(2n)$ olduğundan aynı dizi (a_{3n}) 'in de alt dizisidir ve r 'ye yakınsar. Limitin tekliğinden (Teorem 20.1) $p = r$. Şimdi (a_{6n-3}) dizisine bakalım: $6n - 3 = 3(2n - 1)$ olduğundan (a_{3n}) 'in bir alt dizisidir, limiti r ; $6n - 3 = 2(3n - 1) - 1$ olduğundan (a_{2n-1}) 'in $k_n = 3n - 1$ indisli alt dizisidir, limiti q . Yine teklikten $q = r$. Böylece $p = q$; tek ve çift indisli alt diziler aynı limite yakınsadığından Teorem 24.2 gereği (a_n) yakınsaktır (limiti p).
- c)** Dizi 4 periyotludur: $a_{4k} = 1$, $a_{4k-1} = 0$, $a_{4k-2} = -1$, $a_{4k-3} = 0$. Bu dört alt dizi sabittir; limitleri 1, 0, -1, 0'dır. Yakınsak bir alt dizi, terimleri $\{-1, 0, 1\}$ sonlu kümesinde dolaştığından bir yerden sonra sabit olmalıdır (iki farklı değer sonsuz kez tekrar etseydi iki farklı limitli alt-alt dizi ortaya çıkardı); dolayısıyla limiti -1, 0 ya da 1'dir ve üçü de gerçekleşir. $(a_{4k}) \rightarrow 1$ ve $(a_{4k-2}) \rightarrow -1$ farklı limitlere gittiğinden Sonuç 24.2 gereği dizi ıraksaktır.
- d)** Olmayana ergi ile (a_n) 'in a 'ya yakınsamadığını varsayalım. Yakınsaklığın olumsuzlaması (Teorem 2.1): öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her N için $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ olan bir $n \geq N$ bulunur. Yani $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz çoklukta indis vardır; bunları küçükten büyüğe sıralayıp (a_{n_k}) alt dizisini kuralım. Her k için $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ 'dır. Bu alt dizi, sınırlı (a_n) 'in alt dizisi olarak sınırlıdır; Teorem 24.5 gereği yakınsak bir $(a_{n_{k_j}})$ alt dizisi vardır, $a_{n_{k_j}} \rightarrow b$ olsun. $(a_{n_{k_j}})$, (a_n) 'in de bir alt dizisidir (kesin artan indislerin kesin artan alt seçimi yine kesin artandır), dolayısıyla hipotez gereği $b = a$. Öte yandan $|a_{n_{k_j}} - a| \geq \varepsilon_0$ olduğundan mutlak değer limit (Teorem 20.3) ve sıralama (Teorem 21.3) ile $|b - a| \geq \varepsilon_0 > 0$, yani $b \neq a$. Çelişki. Demek ki $(a_n) \rightarrow a$.
- Sınırlılık gereklidir: $(1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots)$, yani $a_{2k-1} = 1$ ve $a_{2k} = k$ dizisini alalım. Yakınsak bir alt dizi, $(a_{2k}) = (k)$ 'dan yalnızca sonlu tane terim içerebilir (sonsuz tane içerseydi sınırsız olurdu), dolayısıyla bir yerden sonra sabit 1'dir ve 1'e yakınsar. Bütün yakınsak alt diziler 1'e gittiği hâlde dizi sınırsız olduğundan yakınsak değildir (Teorem 20.2).
- e)** $[0, 1] \cup \{2\}$ kümesi kapalıdır (iki kapalı kümenin birleşimi, Teorem 16.1) ve $[0, 2]$ içinde kaldığından sınırlıdır; Teorem 24.8 gereği dizisel kompakttır. Doğrudan da görülebilir: kümedeki bir dizi ya sonsuz kez 2 değerini alır (o zaman sabit 2 alt dizisi vardır) ya da bir kuyruğu $[0, 1]$ 'de kalır; ikinci durumda Bolzano-Weierstrass yakınsak bir alt dizi verir ve $0 \leq a_{n_k} \leq 1$ olduğundan limit $[0, 1]$ 'dedir (Sonuç 21.2).
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi dizisel kompakt değildir: $x_n = \frac{1}{n}$ dizisi kümede kalır, 0'a yakınsar, dolayısıyla her alt dizisi 0'a yakınsar (Teorem 24.1); ama 0 kümeye ait değildir. Küme sınırlıdır ama kapalı değildir; Örnek 24.6 (c)'deki gibi 0 eklenince dizisel kompakt olur.

Bolzano-Weierstrass teoremi, sınırlı bir dizinin yakınsamasa bile “bir yerlere yığılmak” zorunda olduğunu söyler. Bir sonraki bölümde bu yığılma yerlerini kesin olarak tanımlayacak, bir dizinin **yığılma noktalarını** ve bunların en büyüğü ile en küçüğü olan **üst limit** ve **alt limit** kavramlarını inceleyeceğiz: **Dizilerin Yığılma Noktaları, Üst Limit ve Alt Limit**.

25. Dizilerin Yığılma Noktaları, Üst Limit ve Alt Limit

Yakınsak bir dizinin bütün terimleri sonunda tek bir sayının çevresinde toplanır. Iraksak bir dizi ise böyle tek bir sayıya sahip değildir; ama bu, terimlerin hiçbir yerde toplanmadığı anlamına gelmez. Örneğin $((-1)^n)$ dizisinin limiti yoktur, fakat terimleri 1 ve -1 sayılarının çevresinde “yığılır”. **Alt Diziler ve Bolzano–Weierstrass Teoremi** bölümünde sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gördük; yani sınırlı bir dizi iraksak olsa bile en az bir “yığılma yeri” vardır.

Bu bölümde bu fikri kesinleştireceğiz. Önce bir dizinin **yığılma noktası** kavramını tanımlayıp bunun “yakınsak alt dizinin limiti” ile aynı şey olduğunu göstereceğiz. Sonra bütün yığılma noktalarının en büyüğü ve en küçüğü olan **üst limit** ($\lim \sup$) ve **alt limit** ($\lim \inf$) kavramlarını inceleyeceğiz. Bu iki sayı, limit olmadığında bile her dizi için anlamlıdır ve dizinin “sonsuzdaki” davranışını iki sayıyla özetler: dizi yakınsaktır ancak ve ancak üst limitiyle alt limiti aynı reel sayıysa.

25.1 Dizinin Yığılma Noktası

Bir kümenin yığılma noktasını (**Tanım 17.1**) kümenin elemanlarının bir noktaya “sonsuz yakından” sokulmasıyla tanımlamıştık. Dizilerde benzer fikri terimlerin **indisleri** üzerinden kuracağız: bir a noktası, dizinin terimleri a ’nın her komşuluğuna **sonsuz çoklukta indisle** giriyorsa dizinin bir yığılma noktasıdır.

Tanım 25.1 (Dizinin Yığılma Noktası). (a_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan **sonsuz çoklukta** $n \in \mathbb{N}$ indisleri varsa, a ’ya (a_n) dizisinin bir **yığılma noktası** (accumulation point, cluster point) denir. Sembolik olarak:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dizinin bütün yığılma noktalarının kümesini Y ile göstereceğiz.

Sembolik yazımın “sonsuz çoklukta indis” ile aynı şeyi söylediğine dikkat edelim: $\mathbb{N}$ ’nin bir alt kümesi sonsuzdur ancak ve ancak üstten sınırlı değilse, yani her m için m ’den büyük ya da eşit bir eleman içeriyorsa. (Üstten sınırlı bir doğal sayı kümesi $\{1, 2, \dots, m\}$ ’nin alt kümesidir; dolayısıyla sonludur.) Tanım şunu söyler: hangi m indisinden sonrasına bakarsak bakalım, a ’nın ε -komşuluğuna (**Tanım 15.1**) düşen bir terim daha buluruz.

Yığılma noktalarını doğrudan tanımla aramak zahmetlidir; neyse ki alt diziler işi kolaylaştırır.

Teorem 25.1 (Yığılma Noktalarının Alt Dizilerle Karakterizasyonu). (a_n) bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a ’nın (a_n) dizisinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul, (a_n) ’nin a ’ya yakınsayan bir (a_{n_k}) alt dizisinin bulunmasıdır:

$$a \in Y \Leftrightarrow \exists (a_{n_k}) \text{ alt dizisi, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

İspat.

($\Rightarrow$ **yönü**) a bir yığılma noktası olsun. **İndisleri adım adım seçeceğiz.**

Tanımda $\varepsilon = 1$ ve $m = 1$ alalım: $|a_{n_1} - a| < 1$ olan bir $n_1 \geq 1$ vardır. Şimdi n_k seçilmiş olsun. Tanımda $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ ve $m = n_k + 1$ alalım: $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ ve

$$|a_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$$

olan bir n_{k+1} indisidir. Böylece kesin artan bir (n_k) indis dizisi elde ettik; **Tanım 24.1** gereği (a_{n_k}) , (a_n) ’nin bir alt dizisidir ve kuruluş gereği her k için $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$, yani

$$a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$$

sağlanır. $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ olduğundan (Örnek 20.1) iki uçtaki diziler Teorem 21.1 gereği a 'ya yakınsar; sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) ile $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

($\Leftarrow$ yönü) (a_{n_k}) alt dizisi a 'ya yakınsasın. $\varepsilon > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ verilsin; $n \geq m$ ve $|a_n - a| < \varepsilon$ olan bir n bulmalıyız. Yakınsaklık tanımından (Tanım 20.1) $k \geq K$ iken $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ olan bir K vardır. $k = \max\{K, m\}$ alalım. Önerme 24.1 gereği $n_k \geq k \geq m$ 'dir ve $k \geq K$ olduğundan $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Demek ki $n = n_k$ aranan indistir. ε ve m keyfi olduğundan $a \in Y$.

Bu teorem sayesinde “yığılma noktası” ile “alt dizi limiti” sözcüklerini birbirinin yerine kullanabiliriz. Özellikle Bolzano–Weierstrass teoremi (Teorem 24.5) şöyle okunur: **sınırlı her dizinin en az bir yığılma noktası vardır.**

Önerme 25.1 (Yakınsak Dizinin Tek Yığılma Noktası Limitidir). (a_n) dizisi a sayısına yakınsıyorsa dizinin tek yığılma noktası a 'dır: $Y = \{a\}$.

İspat.

Dizinin kendisi ($n_k = k$ seçimiyle) kendi alt dizisidir ve a 'ya yakınsar; Teorem 25.1 ile $a \in Y$. Şimdi $b \in Y$ olsun. Teorem 25.1 gereği b 'ye yakınsayan bir (a_{n_k}) alt dizisi vardır. Öte yandan Teorem 24.1 gereği yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limite yakınsar; yani (a_{n_k}) aynı zamanda a 'ya yakınsar. Limitin tekliğinden (Teorem 20.1) $b = a$.

⚠ Limit ile yığılma noktası aynı şey değildir

Yakınsak bir dizinin tek yığılma noktası limitidir; ama bunun karşıtı doğru değildir. Bir dizinin yığılma noktası olduğu hâlde limiti olmayabilir; üstelik bir dizinin birden çok, hatta sonsuz çoklukta yığılma noktası olabilir. Aşağıdaki örnekler bunu gösteriyor.

Örnek 25.1 (Yığılma Noktası Örnekleri). Aşağıdaki dizilerin yığılma noktalarını bulalım.

- a) $a_n = (-1)^n$, yani $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.
- b) $a_n = n$, yani $(1, 2, 3, \dots)$.
- c) Bloklar hâlinde yazılan $(1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ dizisi; k -ıncı blok $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}$ terimlerinden oluşur.

Çözüm.

a) Çift indisli alt dizi $(a_{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$ sabit dizisi 1'e, tek indisli alt dizi $(a_{2k-1}) = (-1, -1, \dots)$ ise -1 'e yakınsar; Teorem 25.1 ile $1, -1 \in Y$. Başka yığılma noktası yoktur: $a \notin \{-1, 1\}$ olsun ve $\varepsilon = \min\{|a - 1|, |a + 1|\} > 0$ alalım. Dizinin her terimi ya 1 ya da -1 olduğundan her n için $|a_n - a| \geq \varepsilon$; yani $|a_n - a| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan **hiçbir** indis yoktur. O hâlde $Y = \{-1, 1\}$. Dizi iraksaktır (Örnek 20.6) ama iki yığılma noktası vardır.

b) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ alalım ve $\varepsilon = 1$ seçelim. $|n - a| < 1$ koşulu $a - 1 < n < a + 1$ demektir; bu aralıkta üstten $a + 1$ ile sınırlı olduğundan sonlu tane doğal sayı vardır. Dolayısıyla koşulu sağlayan sonsuz çoklukta indis yoktur ve a yığılma noktası değildir. $Y = \emptyset$ 'dir; bu, sınırsız dizilerde mümkündür (sınırlı dizilerde Bolzano–Weierstrass gereği mümkün değildir).

c) Sabit bir $j \in \mathbb{N}$ alalım. $\frac{1}{j}$ terimi $k \geq j$ olan her blokta bir kez görülür; bloklar sonsuz tane olduğundan $\frac{1}{j}$ değeri sonsuz çoklukta indiste alınır. Bu indislerden oluşan alt dizi sabittir ve $\frac{1}{j}$ 'ye yakınsar; demek ki her j için $\frac{1}{j} \in Y$.

0 da bir yığılma noktasıdır: $\varepsilon > 0$ verilsin; Sonuç 12.2 ile $\frac{1}{j} < \varepsilon$ olan bir j seçelim. $\frac{1}{j}$ değeri sonsuz çoklukta indiste alındığından $|a_n - 0| = \frac{1}{j} < \varepsilon$ eşitsizliği sonsuz çoklukta n için sağlanır. O hâlde $0 \in Y$.

Başka yığılma noktası yoktur. $a < 0$ ise $\varepsilon = |a|$ için hiçbir terim $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (2a, 0)$ aralığına düşmez, çünkü bütün terimler pozitifdir. $a > 1$ ise $\varepsilon = a - 1$ için $(1, 2a - 1)$ aralığında terim yoktur, çünkü bütün terimler 1'den küçük ya da eşittir. $0 < a < 1$ ve a hiçbir $\frac{1}{j}$ 'ye eşit değilse, $\frac{1}{j+1} < a < \frac{1}{j}$ olan bir $j \in \mathbb{N}$ vardır ($j = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$ alınabilir; Tanım 12.1). $\varepsilon = \min\left\{a - \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} - a\right\} > 0$ seçelim. $m \geq j + 1$ için $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{j+1} \leq a - \varepsilon$ ve $m \leq j$ için $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{j} \geq a + \varepsilon$ olduğundan hiçbir terim $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına düşmez. Sonuç:

$$Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{j} : j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dizinin sonsuz çoklukta yığılma noktası vardır. Y kümesinin kapalı olduğuna da dikkat edelim: $\left\{ \frac{1}{j} : j \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin tek yığılma noktası 0'dır (Yığılma Noktaları, Kapanış ve Yoğun Kümeler bölümünde göstermiştik) ve $0 \in Y$ 'dir; birazdan bunun genel bir olgu olduğunu göreceğiz.

İ Dizinin yığılma noktası ile kümenin yığılma noktası

İki kavram birbirine yakındır ama aynı değildir. Bir **kümenin** yığılma noktası, kümenin **elemanlarının** o noktanın çevresinde toplanmasıyla ilgilidir; bir **dizinin** yığılma noktası ise **indislerin** o noktayı sonsuz kez ziyaret etmesiyle ilgilidir. $((-1)^n)$ dizisinin yığılma noktaları -1 ve 1 'dir; oysa dizinin görüntü kümesi $A = \{-1, 1\}$ sonlu olduğundan Sonuç 17.1 gereği hiç yığılma noktası yoktur. Fark, aynı değer in sonsuz çoklukta indiste alınabilmesinden kaynaklanır. Aşağıdaki önerme ilişkiyi tam olarak açıklıyor.

Önerme 25.2 (Dizinin ve Görüntü Kümesinin Yığılma Noktaları). (a_n) bir dizi, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ görüntü kümesi ve A' bu kümenin yığılma noktaları kümesi olsun.

1. $A' \subseteq Y$: kümenin her yığılma noktası dizinin de yığılma noktasıdır.
2. $x \in Y$ ise ya $x \in A'$ ya da $x = a_n$ eşitliği sonsuz çoklukta n için sağlanır.

İspat.

(1) $x \in A'$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 17.1 gereği $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğu A' 'nin sonsuz çoklukta elemanını içerir. Farklı elemanlar farklı indislerle karşılık geldiğinden $|a_n - x| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta n vardır; yani $x \in Y$.

(2) $x \in Y$ olsun ve x 'in yalnızca sonlu çoklukta indiste alındığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $|a_n - x| < \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta indis vardır; bunlardan yalnızca sonlu tanesinde $a_n = x$ olabilir. Demek ki $a_n \neq x$ ve $|a_n - x| < \varepsilon$ olan bir n vardır: a_n, x 'in delinmiş ε -komşuluğunda A' 'nin bir elemanıdır. ε keyfi olduğundan Tanım 17.1 gereği $x \in A'$.

■

25.2 Yığılma Noktaları Kümesi

Örnek (c)'de gördüğümüz gibi yığılma noktaları kümesi kendi yığılma noktalarını da içerir. Bu genel bir olgudur.

Teorem 25.2 (Yığılma Noktaları Kümesi Kapalıdır). Her (a_n) dizisi için yığılma noktaları kümesi Y kapalı bir kümedir (Tanım 16.1).

İspat.

Kapalılığın dizisel karakterizasyonunu (Teorem 21.10) kullanalım: Y içindeki her yakınsak dizinin limitinin yine Y 'de olduğunu göstermek yeter. ($Y = \emptyset$ ise bu koşul boş yere sağlanır; zaten boş küme kapalıdır.) (y_k) , Y 'de bir dizi ve $y_k \rightarrow y$ olsun. $y \in Y$ olduğunu görelim: $\varepsilon > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ verilsin. $y_k \rightarrow y$ olduğundan $|y_K - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir K vardır. $y_K \in Y$ olduğundan yığılma noktası tanımını $\frac{\varepsilon}{2}$ ve m ile uygulayalım: $n \geq m$ ve $|a_n - y_K| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir n vardır. Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$|a_n - y| \leq |a_n - y_K| + |y_K - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demek ki her ε ve her m için $n \geq m$, $|a_n - y| < \varepsilon$ olan bir n vardır: $y \in Y$.

■

Yığılma noktalarının ilk büyük faydasını hemen görelim: yakınsaklığı, limiti önceden bilmeden denetleyebiliriz. (Y 'nin kapalı olması ise birazdan üst ve alt limit tanımlanırken devreye girecek.)

Teorem 25.3 (Sınırlı Dizilerde Yakınsaklık Ölçütü). *Sınırlı bir (a_n) dizisinin yalnızca bir yığılma noktası varsa dizi bu noktaya yakınsar.*

İspat.

(a_n) sınırlı ve $Y = \{a\}$ olsun. Olmayana ergi yöntemiyle dizinin a 'ya yakınsamadığını varsayalım. Yakınsaklık tanımının olumsuzlaması şudur:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

Yani $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz çoklukta n vardır. Bu indislerden kesin artan bir (n_k) dizisi seçelim: önce $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0$ olan bir n_1 , sonra $N = n_k + 1$ ile $n_{k+1} > n_k$ ve $|a_{n_{k+1}} - a| \geq \varepsilon_0$ olan bir n_{k+1} . Böylece her terimi a 'dan en az ε_0 uzakta olan bir (a_{n_k}) alt dizisi elde ederiz.

(a_n) sınırlı olduğundan (a_{n_k}) de sınırlıdır; Bolzano–Weierstrass teoremi (Teorem 24.5) gereği yakınsak bir $(a_{n_{k_j}})$ alt dizisi vardır. Limitine b diyelim. Alt dizinin alt dizisi yine alt dizidir (kesin artan iki indis dizisinin bileşkesi kesin artandır); dolayısıyla Teorem 25.1 ile $b \in Y$.

Öte yandan her j için $|a_{n_{k_j}} - a| \geq \varepsilon_0$ 'dır. $a_{n_{k_j}} \rightarrow b$ olduğundan Teorem 21.1 ve Teorem 20.3 ile $|a_{n_{k_j}} - a| \rightarrow |b - a|$; limitlerde sıralama (Teorem 21.3) ile $|b - a| \geq \varepsilon_0 > 0$, yani $b \neq a$. Böylece Y 'de a 'dan farklı bir b elemanı bulduk; bu, $Y = \{a\}$ ile çelişir. O hâlde $a_n \rightarrow a$.

■

Teorem, Önerme 25.1 ile birleşince şunu verir: **sınırlı** bir dizi yakınsaktır ancak ve ancak tek bir yığılma noktası varsa. Sınırlılık hipotezi kaldırılamaz.

⚠ Sınırlılık şarttır

n tek ise $a_n = 1$, n çift ise $a_n = \frac{n}{2} + 1$ olsun: $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots)$. Tek indisli terimler sabit 1 olduğundan $1 \in Y$. $a \neq 1$ için $\varepsilon = \frac{|a-1|}{2}$ alalım: tek indisli terimler a 'dan $|a-1| = 2\varepsilon$ uzaktır; çift indisli terimlerden $|a_n - a| < \varepsilon$ olanlar $\frac{n}{2} + 1 < a + \varepsilon$, yani $n < 2(a + \varepsilon - 1)$ sağlar ve sonlu tanedir. Demek ki $Y = \{1\}$. Ama dizi sınırsızdır; Teorem 20.2 gereği yakınsak olamaz. Tek yığılma noktası vardır, limiti yoktur.

Monoton dizilerde durum çok daha basittir.

Teorem 25.4 (Monoton Dizilerin Yığılma Noktaları). *Monoton bir dizinin (Tanım 19.4) en çok bir yığılma noktası vardır. Yığılma noktası varsa dizi bu noktaya yakınsar.*

İspat.

(a_n) monoton olsun. İki durum vardır.

Dizi sınırlı ise. Sonuç 23.3 gereği dizi yakınsaktır; Önerme 25.1 ile tek yığılma noktası limitidir.

Dizi sınırlı değil ise. Artan olsun (azalan durum aynıdır). Artan bir dizi alttan a_1 ile sınırlıdır; sınırsızsa üstten sınırlı değildir ve Teorem 23.2 gereği $+\infty$ 'a iraksar: her $M \in \mathbb{R}$ için $n \geq n_M$ iken $a_n > M$ olan bir n_M vardır. Böyle bir dizinin reel yığılma noktası olamaz: $a \in \mathbb{R}$ verilsin, $M = a + 1$ alalım. $n \geq n_M$ için $a_n > a + 1$, yani $|a_n - a| > 1$ 'dir; dolayısıyla $|a_n - a| < 1$ koşulunu yalnızca $n < n_M$ olan sonlu tane indis sağlayabilir. $Y = \emptyset$ 'dir ve iddia boş yere doğrudur.

■

25.3 Üst Limit ve Alt Limit

İraksak bir dizinin limiti yoktur; ama sınırlıysa yığılma noktaları vardır ve bunların “en büyüğü” ile “en küçüğü” dizinin sonsuzdaki davranışını özetler. Önce yığılma noktaları kümesinin sınırlı olduğunu görelim.

Lemma 25.1 (Sınırlı Dizinin Yığılma Noktaları Sınırlıdır). (a_n) sınırlı bir dizi olsun; *Önerme 19.1* gereği her n için $-M \leq a_n \leq M$ olan bir $M > 0$ vardır. O zaman $Y \neq \emptyset$ ve $Y \subseteq [-M, M]$ ’dir.

İspat.

Bolzano–Weierstrass teoremi (*Teorem 24.5*) yakınsak bir alt dizi verir; limiti *Teorem 25.1* ile Y ’dedir, dolayısıyla $Y \neq \emptyset$. $y \in Y$ olsun; y ’ye yakınsayan bir (a_{n_k}) alt dizisi vardır. Her k için $-M \leq a_{n_k} \leq M$ olduğundan limitlerde sıralama (*Teorem 21.3*) ile $-M \leq y \leq M$.

■

Demek ki sınırlı bir dizi için Y boş olmayan, sınırlı bir kümedir; Tamlık Aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği supremumu ve infimumu vardır.

Tanım 25.2 (Üst Limit ve Alt Limit). (a_n) sınırlı bir dizi ve Y yığılma noktaları kümesi olsun.

- Y ’nin supremumuna (a_n) dizisinin **üst limiti** (limit superior) denir:

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup Y = \sup \left\{ a \in \mathbb{R} : \exists (a_{n_k}), \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \right\}.$$

- Y ’nin infimumuna (a_n) dizisinin **alt limiti** (limit inferior) denir:

$$\ell = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf Y = \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \exists (a_{n_k}), \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \right\}.$$

$\inf Y \leq \sup Y$ daima doğru olduğundan her sınırlı dizi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

sağlanır. Üst ve alt limit birer supremum ve infimum olarak tanımlandı; kümeye ait olmaları gerekmez gibi görünür. Ama Y kapalı olduğundan gerçekte kümeye aittirler.

Teorem 25.5 (Üst ve Alt Limit Birer Yığılma Noktasıdır). (a_n) sınırlı bir dizi, $L = \limsup a_n$ ve $\ell = \liminf a_n$ olsun. O zaman $L \in Y$ ve $\ell \in Y$ ’dir; yani

$$L = \max Y, \quad \ell = \min Y.$$

Özellikle $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n'_k} = \ell$ olacak biçimde (a_{n_k}) ve $(a_{n'_k})$ alt dizileri vardır: üst limit en büyük, alt limit en küçük yığılma noktasıdır.

İspat.

Lemma 25.1 gereği Y boş değil ve sınırlıdır; *Teorem 25.2* gereği kapalıdır. Kapalı ve sınırlı bir kümenin supremumu ve infimumu kümeye aittir (*Sonuç 17.5*): $L = \sup Y = \max Y \in Y$ ve $\ell = \inf Y = \min Y \in Y$. Alt dizilerin varlığı *Teorem 25.1*’den çıkar.

■

Örnek 25.2 (Üst ve Alt Limit Hesapları). Aşağıdaki dizilerin üst ve alt limitlerini bulalım.

- $a_n = \frac{1}{n}$.
- $(a_n) = (-2, 0, 2, -2, 0, 2, \dots)$; yani n ’nin 3’e bölümünden kalan 1 ise $a_n = -2$, 2 ise $a_n = 0$, 0 ise $a_n = 2$.

Çözüm.

- Dizi 0’a yakınsar; *Önerme 25.1* ile $Y = \{0\}$ ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dizinin bütün terimleri pozitif olduğu hâlde üst limitin 0 olduğuna dikkat edelim: üst limit terimlerle değil, terimlerin sonsuzda yığıldığı yerlerle ilgilidir.

b) Dizi üç değer alır ve her birini sonsuz çoklukta indiste alır: $a_{3k-2} = -2$, $a_{3k-1} = 0$, $a_{3k} = 2$. Bu üç sabit alt dizi -2 , 0 ve 2 'ye yakınsar; dolayısıyla $\{-2, 0, 2\} \subseteq Y$. Başka yığılma noktası yoktur: $a \notin \{-2, 0, 2\}$ için $\varepsilon = \min\{|a + 2|, |a|, |a - 2|\} > 0$ alınırsa hiçbir terim $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına düşmez. Demek ki $Y = \{-2, 0, 2\}$ ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \max Y = 2, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \min Y = -2.$$

Dizi ıraksaktır; ama üst ve alt limiti vardır.

■

⚠ Supremum ile üst limit karıştırılmamalıdır

$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, dizinin **aldığı** (ya da yaklaştığı) en büyük değerdir; $\limsup a_n$ ise dizinin **sonsuzda yığıldığı** en büyük yerdir. Şu diziyi düşünelim:

$$2, -3, 2, 5, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \quad (n \geq 6 \text{ için } a_n = (-1)^n).$$

Görüntü kümesi $\{-3, -1, 1, 2, 5\}$ 'tir; $\sup\{a_n\} = 5$ ve $\inf\{a_n\} = -3$. Ama sonsuzda dizi yalnızca -1 ile 1 arasında salınır: $Y = \{-1, 1\}$, dolayısıyla $\limsup a_n = 1$ ve $\liminf a_n = -1$. Sonlu tane terimi değiştirmek üst ve alt limiti değiştirmez; supremumu ise değiştirebilir.

25.4 Sınırsız Dizilerde Üst ve Alt Limit

Şimdiye kadar üst ve alt limiti yalnızca sınırlı diziler için tanımladık. Sınırsız dizilerde yığılma noktaları kümesi boş olabilir ($a_n = n$) ya da dizinin bir parçası sonsuza kaçabilir. Bu durumları da kapsamak için “yığılma noktası” kavramını $+\infty$ ve $-\infty$ sembollerine genişletiriz. Bir dizinin $+\infty$ 'a ıraksamasının (Tanım 22.1) her M için bir yerden sonra bütün terimlerin M 'yi aşması olduğunu hatırlayalım.

Tanım 25.3 (Genişletilmiş Üst ve Alt Limit). (a_n) herhangi bir reel sayı dizisi ve Y reel yığılma noktaları kümesi olsun. **Genişletilmiş yığılma noktaları kümesi** Y^* , Y 'ye şu sembollerin eklenmesiyle elde edilir: (a_n) 'nin $+\infty$ 'a ıraksayan bir alt dizisi varsa $+\infty \in Y^*$; $-\infty$ 'a ıraksayan bir alt dizisi varsa $-\infty \in Y^*$. $-\infty < x < +\infty$ (her $x \in \mathbb{R}$ için) sıralamasıyla

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup Y^*, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf Y^*$$

tanımlanır. Burada $+\infty \in Y^*$ ise $\sup Y^* = +\infty$; $-\infty \in Y^*$ ise $\inf Y^* = -\infty$ anlaşılır.

Sınırlı dizilerde $+\infty, -\infty \notin Y^*$ olduğundan (sonsuz ıraksayan bir alt dizi sınırlı olamaz) $Y^* = Y$ 'dir ve bu tanım Tanım 25.2 ile örtüşür. Y^* yalnızca $-\infty$ 'dan oluşuyorsa ($a_n = -n$ dizisinde olduğu gibi) $\sup Y^* = \inf Y^* = -\infty$ anlaşılır; $+\infty$ için de benzer. Y^* hiçbir zaman boş değildir: her dizinin monoton bir alt dizisi vardır (Teorem 24.4); bu alt dizi sınırlıysa yakınsar (Sonuç 23.3), değilse $+\infty$ ya da $-\infty$ 'a ıraksar (Teorem 23.2). Dolayısıyla **her dizinin** genişletilmiş anlamda bir üst ve bir alt limiti vardır (reel sayı, $+\infty$ ya da $-\infty$).

Teorem 25.6 (Sınırsız Dizilerde Üst ve Alt Limit). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

1. (a_n) üstten sınırlı değilse $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
2. (a_n) alttan sınırlı değilse $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

İspat.

(1) (a_n) üstten sınırlı olmasın. $+\infty$ 'a ıraksayan bir alt dizi kuracağız; o zaman $+\infty \in Y^*$ ve tanım gereği $\sup Y^* = +\infty$ olur.

Önce şunu görelim: dizinin sonlu tane terimi atılırsa kalan kısım yine üstten sınırlı değildir. Gerçekten, $\{a_n : n > p\}$ kümesi K ile üstten sınırlı olsaydı $\max\{a_1, \dots, a_p, K\}$ (Tanım 7.4) bütün dizinin bir üst sınırı olurdu.

$M = 1$ bir üst sınır olmadığından $a_{n_1} > 1$ olan bir n_1 vardır. n_k seçilmiş olsun; $\{a_n : n > n_k\}$ üstten sınırlı olmadığından $n_{k+1} > n_k$ ve $a_{n_{k+1}} > k + 1$ olan bir n_{k+1} vardır. Böylece her k için $a_{n_k} > k$ olan bir (a_{n_k}) alt dizisi elde ettik. Bu alt dizi $+\infty$ 'a ıraksar: $M \in \mathbb{R}$ verilsin; Teorem 10.4 ile $k_M > M$ olan bir $k_M \in \mathbb{N}$ vardır ve $k \geq k_M$ için $a_{n_k} > k \geq k_M > M$.

(2) (a_n) alttan sınırlı değilse $(-a_n)$ üstten sınırlı değildir; (1)'deki kuruluş $-a_{n_k} > k$ olan bir alt dizi verir, yani $a_{n_k} < -k$ ve $a_{n_k} \rightarrow -\infty$. Dolayısıyla $-\infty \in Y^*$ ve $\inf Y^* = -\infty$.

■

İki örnek: $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots)$ dizisi üstten sınırlı değildir, dolayısıyla $\limsup a_n = +\infty$; alttan 1 ile sınırlıdır ve daha önce gördüğümüz gibi $Y = \{1\}$ 'dir, dolayısıyla $\liminf a_n = 1$. $a_n = (-1)^n n$ dizisi $(-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$ ne üstten ne alttan sınırlıdır: $\limsup a_n = +\infty$ ve $\liminf a_n = -\infty$. Sonsuz üst limitin birkaç eşdeğer yüzü vardır; hesaplarda hangisi kolaysa o kullanılır.

Teorem 25.7 (Sonsuz Üst Limit için Denk Koşullar). (a_n) bir dizi olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
2. (a_n) 'nin $+\infty$ 'a ıraksayan bir alt dizisi vardır.
3. (a_n) üstten sınırlı değildir.
4. Her $M > 0$ ve her $n_M \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_M$ ve $a_n \geq M$ olan bir n vardır; yani dizi her M sayısını sonsuz çoklukta indiste aşar.

Benzer biçimde $\liminf a_n = -\infty$ olması, $-\infty$ 'a ıraksayan bir alt dizinin bulunmasına ve dizinin alttan sınırsız olmasına denktir.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (3): Karşıt tersini gösterelim: dizi üstten K ile sınırlı olsun. Her reel yığılma noktası, terimleri K 'yi aşmayan bir alt dizinin limiti olduğundan Teorem 21.3 ile K 'yi aşmaz; $+\infty \in Y^*$ da olamaz. Dolayısıyla $\sup Y^* \leq K < +\infty$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Teorem 25.6'in ispatındaki kuruluş tam olarak bunu verir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $+\infty$ 'a ıraksayan alt dizi varsa $+\infty \in Y^*$ ve tanım gereği $\sup Y^* = +\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (4): (a_{n_k}) alt dizisi $+\infty$ 'a ıraksasın; $M > 0$ ve n_M verilsin. $k \geq K$ iken $a_{n_k} > M$ olan bir K vardır. $k = \max\{K, n_M\}$ alalım: Önerme 24.1 ile $n_k \geq k \geq n_M$ ve $a_{n_k} > M$. Aranan indis $n = n_k$ 'dir.

(4) $\Rightarrow$ (3): Dizi üstten bir K ile sınırlı olsaydı, (4)'ü $M = |K| + 1$ ve $n_M = 1$ ile uygulayınca $a_n \geq |K| + 1 > K$ olan bir n bulunurdu; çelişki.

Böylece (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) ve (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) zincirleri dört koşulun denkliğini verir. Alt limit ifadesi $(-a_n)$ dizisine uygulanarak elde edilir.

■

25.5 Sıkıştırma Özelliği ve Yakınsaklık Ölçütü

Sınırlı bir dizinin terimleri sonunda ℓ ile L arasındaki bölgeye sıkışır: $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük olursa olsun, $L + \varepsilon$ 'un üstüne ve $\ell - \varepsilon$ 'un altına yalnızca sonlu tane terim taşabilir. (L 'nin kendisinin üstünde sonsuz tane terim olabilir; $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinde bütün terimler $L = 0$ 'ın üstündedir.) Bu, üst ve alt limitin en çok kullanılan özelliğidir.

Teorem 25.8 (Sıkıştırma Özelliği). (a_n) sınırlı bir dizi, $L = \limsup a_n$ ve $\ell = \liminf a_n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_\varepsilon$ için

$$\ell - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Önce $a_n \geq L + \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan yalnızca sonlu tane n olduğunu gösterelim. Olmayana ergi: sonsuz çoklukta olsun. Teorem 25.3'in ispatındaki gibi bu indislerden kesin artan bir (n_k) dizisi seçip her terimi $a_{n_k} \geq L + \varepsilon$ olan bir alt dizi kuralım. Bu alt dizi sınırlıdır; Bolzano–Weierstrass

(Teorem 24.5) ile yakınsak bir alt dizisi vardır, limitine b diyelim. Alt dizinin alt dizisi (a_n) 'nin alt dizisi olduğundan Teorem 25.1 ile $b \in Y$; limitlerde sıralama (Teorem 21.3) ile $b \geq L + \varepsilon > L$. Ama $L = \sup Y$, Y 'nin bir üst sınırıdır; $b \in Y$ ve $b > L$ çelişkidir.

Demek ki $\{n : a_n \geq L + \varepsilon\}$ sonlu bir kümedir. Bu küme boşsa $n_1 = 1$, değilse n_1 'i kümenin en büyük elemanından bir fazla alalım; $n \geq n_1$ için $a_n < L + \varepsilon$ olur.

Aynı akıl yürütme ℓ için tekrarlanır: $a_n \leq \ell - \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta indis olsaydı, bu terimlerden yakınsak bir alt dizi seçilir, limiti $b' \in Y$ ve $b' \leq \ell - \varepsilon < \ell = \inf Y$ olurdu; çelişki. O hâlde $n \geq n_2$ için $a_n > \ell - \varepsilon$ olan bir n_2 vardır.

$n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n \geq n_\varepsilon$ için $\ell - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

■

Sıkıştırma özelliği üst limiti bir yönden sınırlar: $L + \varepsilon$ 'un üstünde sonlu tane terim vardır. Öte yandan L bir yığılma noktası olduğundan $L - \varepsilon$ 'un üstünde **sonsuz** tane terim vardır. Bu iki özellik birlikte üst limiti tam olarak belirler; hesaplarda ve ispatlarda çoğu zaman bu karakterizasyon kullanılır.

Önerme 25.3 (Üst ve Alt Limitin Karakterizasyonu). (a_n) sınırlı bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $L = \limsup a_n$ olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için şu ikisinin sağlanmasıdır:

1. $a_n \geq L + \varepsilon$ olan yalnızca sonlu tane n vardır; yani bir yerden sonra $a_n < L + \varepsilon$ 'dur.
2. $a_n > L - \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta n vardır.

Benzer biçimde $\ell = \liminf a_n$ olması için gerek ve yeter koşul: her $\varepsilon > 0$ için bir yerden sonra $a_n > \ell - \varepsilon$ olması ve $a_n < \ell + \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta n bulunmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $L = \limsup a_n$ olsun. (1) sıkıştırma özelliğinin (Teorem 25.8) ilk yarısıdır. (2) için: Teorem 25.5 ile $L \in Y$, yani $|a_n - L| < \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta n vardır; bunların hepsinde $a_n > L - \varepsilon$.

($\Leftarrow$ yönü) L iki koşulu sağlasın. Önce $L \in Y : \varepsilon > 0$ verilsin. (2) gereği $a_n > L - \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta indis vardır; (1) gereği bunlardan yalnızca sonlu tanesi $a_n \geq L + \varepsilon$ sağlar. Geri kalan sonsuz çoklukta indis için $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, yani $|a_n - L| < \varepsilon$. Demek ki $L \in Y$. Şimdi L 'nin Y 'nin en büyük elemanı olduğunu görelim: $y \in Y$ ve $y > L$ olsa, $\varepsilon = \frac{y-L}{2}$ için $|a_n - y| < \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta indis vardır ve bunların hepsinde $a_n > y - \varepsilon = L + \varepsilon$ olur; bu (1) ile çelişir. O hâlde $L = \max Y = \sup Y = \limsup a_n$. Alt limit için ispat aynadaki görüntüdür.

■

Üst ve alt limitin en önemli uygulaması, yakınsaklığın tek bir eşitlikle denetlenmesidir.

Sonuç 25.1 (Yakınsaklık Ölçütü: Üst Limit Eşittir Alt Limit). (a_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

olmasıdır. Başka bir deyişle bir dizi yakınsaktır ancak ve ancak üst ve alt limiti reel sayılar olarak var ve birbirine eşitse.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) $a_n \rightarrow a$ olsun. Teorem 20.2 gereği dizi sınırlıdır ve Önerme 25.1 gereği $Y = \{a\}$ 'dir. Dolayısıyla $\limsup a_n = \sup Y = a$ ve $\liminf a_n = \inf Y = a$.

($\Leftarrow$ yönü) $\limsup a_n = \liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ olsun. Üst limit reel olduğundan Teorem 25.7 gereği dizi üstten sınırlıdır; alt limit reel olduğundan aynı teoremin alt limit sürümüyle alttan sınırlıdır. Demek ki (a_n) sınırlıdır ve sıkıştırma özelliği (Teorem 25.8) uygulanabilir: $\varepsilon > 0$ verilsin; $n \geq n_\varepsilon$ için

$$a - \varepsilon = \ell - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

yani $|a_n - a| < \varepsilon$. Tanım 20.1 gereği $a_n \rightarrow a$.

■

Bu sonuç, yakınsaklığı ispatlamanın yeni bir yolunu verir: üst ve alt limiti ayrı ayrı hesaplayıp eşit olduklarını görmek. Bunun için de üst ve alt limiti doğrudan terimlerden hesaplayan bir formüle ihtiyacımız var.

25.6 Kuyruk Formülü

N sabitken $\{a_n : n > N\}$ kümesi dizinin N -inci terimden sonraki **kuyruğunun** (Tanım 24.2) görüntü kümesidir. Bu kuyruğun supremumu, N büyüdükçe azalır (küme daraldığından supremum büyüyemez; sabit dizide olduğu gibi aynı da kalabilir) ve sonunda üst limite iner. Bu gözlem, üst limiti bir supremumlar dizisinin limiti olarak yazmamızı sağlar.

Teorem 25.9 (Üst ve Alt Limitin Kuyruk Formülü). (a_n) sınırlı bir dizi olsun. Her $N \in \mathbb{N}$ için

$$s_N = \sup\{a_n : n > N\}, \quad t_N = \inf\{a_n : n > N\}$$

yazalım. O zaman (s_N) azalan, (t_N) artan ve her ikisi de yakınsaktır;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{a_n : n > N\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} t_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf\{a_n : n > N\}.$$

İspat.

Dizi sınırlı olsun: her n için $-M \leq a_n \leq M$. Her N için $\{a_n : n > N\}$ boş değil ve sınırlı olduğundan s_N ve t_N vardır (Bölüm 10.4) ve $-M \leq t_N \leq s_N \leq M$.

Adım 1: (s_N) azalan ve yakınsaktır. $\{a_n : n > N+1\} \subseteq \{a_n : n > N\}$ olduğundan Önerme 10.4 (1) ile $s_{N+1} \leq s_N$; dizi azalandır. Alttan $-M$ ile sınırlı olduğundan monoton yakınsaklık teoremi (Teorem 23.1) gereği yakınsaktır; limitine s diyelim. $L = \limsup a_n$ olsun; $s = L$ göstereceğiz.

Adım 2: $s \geq L$. $\varepsilon > 0$ verilsin ve N herhangi bir doğal sayı olsun. Önerme 25.3 (2) gereği $a_n > L - \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta n vardır; bunlardan biri N 'den büyüktür, ona k diyelim. $a_k \in \{a_n : n > N\}$ olduğundan $s_N \geq a_k > L - \varepsilon$. Bu her N için doğru olduğundan limitlerde sıralama (Teorem 21.3) ile $s \geq L - \varepsilon$. ε keyfi olduğundan $s \geq L$ (aksi hâlde $\varepsilon = L - s > 0$ için çelişki çıkar).

Adım 3: $s \leq L$. $\varepsilon > 0$ verilsin. Önerme 25.3 (1) gereği $n \geq n_\varepsilon$ için $a_n < L + \varepsilon$ olan bir n_ε vardır. $N \geq n_\varepsilon$ için $\{a_n : n > N\}$ kümesinin her elemanı $L + \varepsilon$ 'dan küçüktür; $L + \varepsilon$ bu kümenin bir üst sınırıdır ve $s_N \leq L + \varepsilon$. Limit alınca $s \leq L + \varepsilon$; ε keyfi olduğundan $s \leq L$.

Adım 2 ve 3'ten $s = L$.

Alt limit. $\{a_n : n > N+1\} \subseteq \{a_n : n > N\}$ olduğundan $t_{N+1} \geq t_N$; (t_N) artan ve üstten M ile sınırlıdır; dolayısıyla yakınsaktır; limitine t diyelim. $\ell = \liminf a_n$ için aynı iki adım: $a_n < \ell + \varepsilon$ olan sonsuz çoklukta n bulunduğundan her N için $t_N < \ell + \varepsilon$, yani $t \leq \ell$; bir yerden sonra $a_n > \ell - \varepsilon$ olduğundan büyük N için $t_N \geq \ell - \varepsilon$, yani $t \geq \ell$. Böylece $t = \ell$.

■

i Formülün başka yazılışları

(s_N) azalan olduğundan limiti aynı zamanda infimumudur (Teorem 23.1); benzer biçimde (t_N) 'nin limiti supremumdur. Dolayısıyla

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{n > N} a_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \inf_{n > N} a_n.$$

Birçok kitap üst ve alt limiti doğrudan bu formüllerle **tanımlar**; kuyruk formülü, iki tanımın aynı sayıyı verdiğini söyler. Kuyruğu $n > N$ yerine $n \geq N$ ile almak da hiçbir şeyi değiştirmez: yalnızca indisler bir kaydırılmış olur.

Örnek 25.3 (Eksi Bir Üssü n Bölü n Dizisi). $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dizisinin üst ve alt limitini kuyruk formülüyle hesaplayalım ve dizinin yakınsak olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Dizi işaret değiştirir: çift n için $a_n = \frac{1}{n} > 0$, tek n için $a_n = -\frac{1}{n} < 0$. Ayrıca $|a_n| = \frac{1}{n}$ azalandır. Dizi sınırlıdır: $|a_n| \leq 1$.

Üst limit. N sabit olsun. $\{a_n : n > N\}$ kuyruğunda negatif terimler pozitiflerden küçüktür; pozitif terimler $\frac{1}{n}$ (n çift, $n > N$) ise n büyüdükçe küçülür. Dolayısıyla kuyruğun en büyük elemanı ilk çift indisli terimdir: m_N , N 'den büyük en küçük çift sayı olmak üzere

$$s_N = \sup\{a_n : n > N\} = a_{m_N} = \frac{1}{m_N}.$$

$m_N \in \{N+1, N+2\}$ olduğundan $m_N > N$ ve $0 < s_N = \frac{1}{m_N} < \frac{1}{N}$. $\frac{1}{N} \rightarrow 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) ile $s_N \rightarrow 0$; kuyruk formülü (Teorem 25.9) ile $\limsup a_n = 0$.

Alt limit. Kuyruğun en küçük elemanı ilk tek indisli terimdir: p_N , N 'den büyük en küçük tek sayı olmak üzere $t_N = a_{p_N} = -\frac{1}{p_N}$ ve $-\frac{1}{N} < t_N < 0$. Aynı sıkıştırma ile $t_N \rightarrow 0$ ve $\liminf a_n = 0$.

Sonuç. $\limsup a_n = \liminf a_n = 0$ olduğundan Sonuç 25.1 gereği dizi yakınsaktır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

■

Örnek 25.4 (Eksi Bir Üssü n Artı Bir Bölü n Dizisi). $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ dizisinin yığılma noktalarını, üst ve alt limitini bulalım; dizinin ıraksak olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Alt diziler. Çift ve tek indisli terimleri ayıralım:

$$b_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}, \quad b_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}.$$

$\frac{1}{2k} \rightarrow 0$ ve $\frac{1}{2k+1} \rightarrow 0$ olduğundan Teorem 21.1 ile $b_{2k} \rightarrow 1$ ve $b_{2k+1} \rightarrow -1$. Demek ki $1, -1 \in Y$.

Başka yığılma noktası yok. $y \in Y$ olsun; y 'ye yakınsayan bir (b_{n_k}) alt dizisi vardır. (n_k) indislerinin sonsuz tanesi çift ya da sonsuz tanesi tektir. Sonsuz tanesi çiftse, yalnızca bu indisleri alarak (b_{n_k}) 'nın bir alt dizisini elde ederiz; bu alt dizi hem (b_{n_k}) 'nın alt dizisi olduğundan y 'ye (Teorem 24.1), hem de (b_{2k}) 'nin alt dizisi olduğundan 1 'e yakınsar; Teorem 20.1 ile $y = 1$. Sonsuz tanesi tekse aynı biçimde $y = -1$. O hâlde $Y = \{-1, 1\}$ ve tanım gereği $\limsup b_n = 1$, $\liminf b_n = -1$.

Kuyruk formülüyle doğrulama. N sabit olsun ve $A_N = \{b_n : n > N\}$ kuyruğuna bakalım.

Kuyruk supremumu. Çift indisli terimler $1 + \frac{1}{n}$ pozitifdir ve n büyüdükçe azalır; tek indisli terimler ($n \geq 3$) $-1 + \frac{1}{n} < 0$ 'dır. Dolayısıyla kuyruğun en büyük elemanı ilk çift indisli terimdir: m_N , N 'den büyük en küçük çift sayı olmak üzere

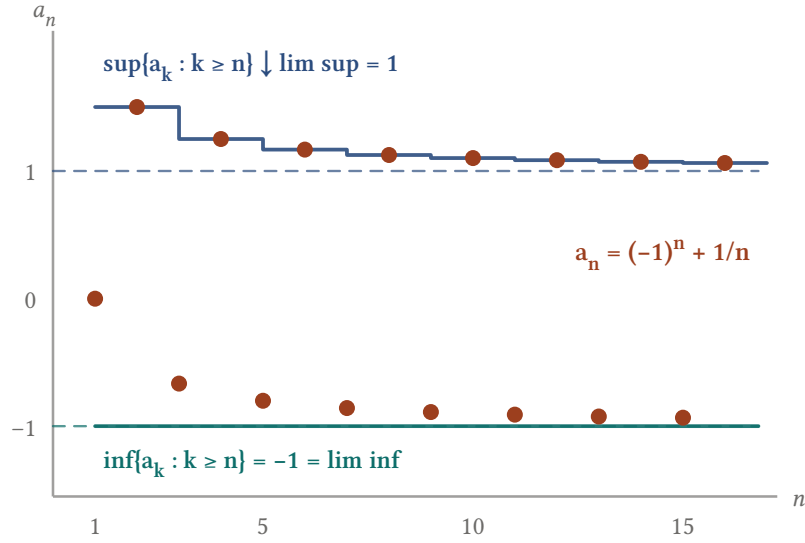
$$s_N = \sup A_N = b_{m_N} = 1 + \frac{1}{m_N}.$$

$0 < \frac{1}{m_N} < \frac{1}{N}$ olduğundan sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) ile $s_N \rightarrow 1$.

Kuyruk infimumu. Burada dikkat: tek indisli terimler $-1 + \frac{1}{n}$, n büyüdükçe azalarak -1 'e yaklaşır ($-1 + \frac{1}{3} > -1 + \frac{1}{5} > -1 + \frac{1}{7} > \dots$). Yani kuyruğun en küçük elemanı yoktur; infimumu kümeye ait değildir. Bütün terimler -1 'den büyük olduğundan -1 kuyruğun bir alt sınırıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin; n tek ve $n > \max\{N, \frac{1}{\varepsilon}\}$ olacak biçimde bir n seçilirse $b_n = -1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon$ olur. Teorem 10.2 ile her N için

$$t_N = \inf A_N = -1.$$

Sabit dizinin limiti kendisidir: $t_N \rightarrow -1$. Teorem 25.9 ile $\limsup b_n = 1$ ve $\liminf b_n = -1$; tanımdan bulduğumuzla aynı.



Şekil 25.1: $(-1)^n + 1/n$ dizisinin iki yığılma noktası vardır: 1 ve -1. Üstteki basamak eğrisi n 'den sonraki terimlerin supremumudur; azalarak $\limsup = 1$ 'e iner. Altındaki çizgi aynı terimlerin infimumudur: tek indisli terimler -1'e üstten yaklaştığından her n için infimum tam -1'dir, yani $\liminf = -1$.

Şekil durumu özetliyor: terimler 1 ve -1 çizgilerine üstten yaklaşır; kuyruk supremumları s_N basamak basamak 1'e iner, kuyruk infimumları t_N ise baştan beri -1'de sabittir.

İraksaklık. $\liminf b_n = -1 \neq 1 = \limsup b_n$ olduğundan [Sonuç 25.1](#) gereği dizi yakınsak değildir.

■

25.7 Üst ve Alt Limitte İşlemler

Limitin aritmetiği ([Teorem 21.1](#)) üst ve alt limite kısmen taşınır: sabitle çarpma sorunsuzdur, toplamda ise yalnızca eşitsizlik elde edilir.

Teorem 25.10 (Sabitle Çarpma). (a_n) sınırlı bir dizi ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $c \geq 0$ ise $\limsup_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. $c < 0$ ise $\limsup_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

İspat.

Kuyruk formülünü ([Teorem 25.9](#)) kullanalım; $A_N = \{a_n : n > N\}$ olsun, $\{ca_n : n > N\} = cA_N$ 'dir. (ca_n) de sınırlıdır.

(1) $c = 0$ ise iki taraf da 0'dır. $c > 0$ için [Önerme 10.4 \(2\)](#) gereği $\sup(cA_N) = c \sup A_N = c s_N$; [Teorem 21.1 \(4\)](#) ile $\lim(c s_N) = c \lim s_N = c \limsup a_n$. İnfimum için aynı özellik $\inf(cA_N) = c t_N$ verir.

(2) $c < 0$ ise $-c > 0$ ve $cA_N = (-c)(-A_N)$ 'dir. [Önerme 10.4 \(2\)](#) ve (3) ile

$$\sup(cA_N) = (-c) \sup(-A_N) = (-c) (-\inf A_N) = c t_N.$$

Limit alınca $\limsup(ca_n) = c \lim t_N = c \liminf a_n$. Benzer biçimde $\inf(cA_N) = (-c) \inf(-A_N) = (-c)(-\sup A_N) = c s_N$ ve $\liminf(ca_n) = c \limsup a_n$.

■

Özellikle $c = -1$ için $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$: işaret değişince “en büyük” ile “en küçük” yer değişir. Bu, alt limitle ilgili her ifadeyi üst limite indirgememizi sağlar.

Teorem 25.11 (Toplamanın Üst ve Alt Limiti). (a_n) ve (b_n) sınırlı diziler olsun.

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.

2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.
 3. Dizilerden biri yakınsaksa, diyelim $a_n \rightarrow a$, her iki eşitsizlik eşitliğe dönüşür:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

İspat.

(1) $K = \limsup a_n$, $L = \limsup b_n$ olsun; $(a_n + b_n)$ sınırlıdır, üst limitine S diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. **Önerme 25.3** (1) gereği $n \geq n_1$ için $a_n < K + \frac{\varepsilon}{2}$ ve $n \geq n_2$ için $b_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$ olan n_1, n_2 vardır. $n \geq n'' = \max\{n_1, n_2\}$ için taraf tarafa toplayınca

$$a_n + b_n < K + L + \varepsilon.$$

Teorem 25.5 ile S 'ye yakınsayan bir $(a_{n_k} + b_{n_k})$ alt dizisi vardır; $k \geq n''$ iken $n_k \geq k \geq n''$ (**Önerme 24.1**) ve $a_{n_k} + b_{n_k} < K + L + \varepsilon$. Alt dizinin $k \geq n''$ olan kuyruğu da S 'ye yakınsar (**Teorem 24.3**); limitlerde sıralama (**Teorem 21.3**) ile $S \leq K + L + \varepsilon$. ε keyfi olduğundan $S \leq K + L$.

(2) (1)'i $(-a_n)$ ve $(-b_n)$ dizilerine uygulayıp **Teorem 25.10** ($c = -1$) ile çevirelim:

$$-\liminf(a_n + b_n) = \limsup(-(a_n + b_n)) \leq \limsup(-a_n) + \limsup(-b_n) = -\liminf a_n - \liminf b_n.$$

İki tarafı -1 ile çarpmak eşitsizliğin yönünü çevirir ve (2)'yi verir.

(3) $a_n \rightarrow a$ olsun; **Sonuç 25.1** ile $\limsup a_n = \liminf a_n = a$ ve **Teorem 25.10** ile $\limsup(-a_n) = -a$. (1) gereği $\limsup(a_n + b_n) \leq a + \limsup b_n$. Ters yön için $b_n = (a_n + b_n) + (-a_n)$ yazıp (1)'i uygulayalım:

$$\limsup b_n \leq \limsup(a_n + b_n) + \limsup(-a_n) = \limsup(a_n + b_n) - a.$$

İki eşitsizlik birlikte $\limsup(a_n + b_n) = a + \limsup b_n$ verir. Alt limit eşitliği (2) ile aynı yolla ya da $(-a_n), (-b_n)$ 'ye geçilerek elde edilir. ■

⚠ Eşitsizlik kesin olabilir

$a_n = (-1)^n$ ve $b_n = (-1)^{n+1}$ olsun. $\limsup a_n = 1$ ve $\limsup b_n = 1$ 'dir; ama $a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$ sabit dizisidir ve $\limsup(a_n + b_n) = 0$. Gerçekten $0 \leq 1 + 1 = 2$ eşitsizliği sağlanır, eşitlik sağlanmaz. Sebep açıktır: (a_n) en yüksek değerine çift indislerde, (b_n) tek indislerde ulaşır; iki dizi "aynı anda" büyük olmaz. Yakınsak bir diziyle toplarken bu sorun ortadan kalkar, çünkü yakınsak dizi her indiste limitine yakındır.

Teorem 25.12 (Yakınsak Diziyle Çarpım). (a_n) dizisi $a \geq 0$ sayısına yakınsasın ve (b_n) sınırlı olsun. O zaman

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

İspat.

$a_n b_n = a b_n + (a_n - a) b_n$ yazalım. $(a_n - a)$ sıfır dizisidir (**Teorem 21.1**) ve (b_n) sınırlıdır; **Teorem 21.2** ile $(a_n - a) b_n \rightarrow 0$. $(a b_n)$ sınırlıdır, dolayısıyla **Teorem 25.11** (3) uygulanabilir:

$$\limsup(a_n b_n) = \limsup(a b_n + (a_n - a) b_n) = \limsup(a b_n) + 0 = a \limsup b_n;$$

son adımda $a \geq 0$ olduğundan **Teorem 25.10** (1) kullanıldı. Alt limit için aynı hesap yapılır. ■

$a < 0$ ise aynı ispat **Teorem 25.10** (2) ile yürür ve roller değişir: $\limsup(a_n b_n) = a \liminf b_n$. Teoreme bir örnek: $a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \geq 0$ ve $b_n = (-1)^n$ için $\limsup(a_n b_n) = 1 \cdot 1 = 1$; gerçekten $a_n b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ dizisinin çift indisli terimleri 1'e, tek indisli terimleri -1 'e yakınsar.

25.8 Alıştırmalar

Alıştırma 25.1 (Yığılma Noktası, Üst ve Alt Limit Alıştırmaları).

- a) n 'nin 4'e bölümünden kalan 1 ise $a_n = 1$, 3 ise $a_n = -1$, 0 ya da 2 ise $a_n = 0$ olsun (bu dizi $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ dizisidir). Yığılma noktalarını, üst ve alt limitini bulunuz.
- b) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ dizisinin yığılma noktalarını, üst ve alt limitini bulunuz; dizinin ıraksak olduğunu gösteriniz.
- c) (a_n) sınırlı bir dizi olsun. Bir (x_n) dizisinin yığılma noktaları kümesini bu şıkta $Y(x_n)$ ile göstereceğiz; ayrıca bir A kümesi için $-A = \{-y : y \in A\}$ 'dir. $Y(-a_n) = -Y(a_n)$ olduğunu gösteriniz ve buradan $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$ eşitliğini doğrudan tanımla (kuyruk formülünü kullanmadan) çıkarınız.
- d) n çift ise $a_n = \frac{1}{n}$, n tek ise $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ olsun. Kuyruk formülüyle $\limsup a_n$ ve $\liminf a_n$ değerlerini bulunuz.
- e) (a_n) ve (b_n) sınırlı diziler ve her n için $a_n \leq b_n$ olsun. $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ ve $\liminf a_n \leq \liminf b_n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Dizi $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots)$ biçimindedir ve $-1, 0, 1$ değerlerinin her birini sonsuz çoklukta indiste alır (sırasıyla $n = 4k - 1$, n çift, $n = 4k - 3$ indislerinde). Sabit alt diziler bu üç değere yakınsadığından $\{-1, 0, 1\} \subseteq Y$. Dizi yalnızca bu üç değeri aldığından, $a \notin \{-1, 0, 1\}$ için $\varepsilon = \min\{|a + 1|, |a|, |a - 1|\} > 0$ alınırsa hiçbir terim $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına düşmez; $Y = \{-1, 0, 1\}$. Dolayısıyla $\limsup a_n = 1$ ve $\liminf a_n = -1$. Dizi sınırlıdır ama birden çok yığılma noktası olduğundan ıraksaktır.

b) $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ olduğundan çift indisli alt dizi $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \rightarrow 1$ ve tek indisli alt dizi $a_{2k+1} = -\frac{2k+1}{2k+2} \rightarrow -1$ (Teorem 21.1 ve Teorem 24.1). Böylece $\{-1, 1\} \subseteq Y$. Örnek 25.4'deki akıl yürütme aynen geçerlidir: $y \in Y$ ise y 'ye yakınsayan alt dizinin sonsuz çoklukta çift ya da tek indisli vardır; ilgili alt-alt dizi hem y 'ye hem 1'e (ya da -1'e) yakınsadığından $y \in \{-1, 1\}$. O hâlde $Y = \{-1, 1\}$, $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$ ve Sonuç 25.1 gereği dizi ıraksaktır. (Aynı sonuç Teorem 24.2 ile de görülür.)

c) $y \in Y(a_n)$ olsun; $a_{n_k} \rightarrow y$ olan bir alt dizi vardır. Teorem 21.1 (4) ile $-a_{n_k} \rightarrow -y$, yani $-y \in Y(-a_n)$. Demek ki $-Y(a_n) \subseteq Y(-a_n)$. Aynı akıl yürütme $(-a_n)$ dizisine uygulanırsa $-Y(-a_n) \subseteq Y(a_n)$, yani $Y(-a_n) \subseteq -Y(a_n)$. Böylece $Y(-a_n) = -Y(a_n)$. Şimdi Önerme 10.4 (3) ile

$$\limsup(-a_n) = \sup Y(-a_n) = \sup(-Y(a_n)) = -\inf Y(a_n) = -\liminf a_n.$$

d) Dizi $(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$ biçimindedir. $N \geq 1$ sabit olsun ve $A_N = \{a_n : n > N\}$ kuyruğuna bakalım.

Üst limit. Kuyruktaki tek indisli terimler $1 - \frac{1}{n}$ (n tek, $n > N$) 1'den küçüktür ve n büyüdükçe 1'e yaklaşır; çift indisli terimler $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ 'dir. 1 kuyruğun bir üst sınırıdır. $\varepsilon > 0$ verilince n tek ve $n > \max\{N, \frac{1}{\varepsilon}\}$ olacak biçimde bir n seçilirse $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ olur; Teorem 10.1 ile $s_N = \sup A_N = 1$. Sabit dizi $s_N = 1$ 'in limiti 1'dir: $\limsup a_n = 1$.

Alt limit. Kuyruktaki çift indisli terimler $\frac{1}{n} > 0$ ve n büyüdükçe 0'a yaklaşır; tek indisli terimler ($n \geq 3$) $1 - \frac{1}{n} \geq \frac{2}{3} > 0$ 'dır. 0 bir alt sınırdır ve $\varepsilon > 0$ için n çift ve $n > \max\{N, \frac{1}{\varepsilon}\}$ olacak biçimde bir n seçilirse $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olur; Teorem 10.2 ile $t_N = \inf A_N = 0$. Dolayısıyla $\liminf a_n = 0$.

$\limsup a_n = 1 \neq 0 = \liminf a_n$ olduğundan dizi ıraksaktır; gerçekten çift indisli alt dizi 0'a, tek indisli alt dizi 1'e yakınsar.

e) Kuyruk formülünü kullanalım. N sabit olsun; $s_N(b) = \sup\{b_n : n > N\}$ yazalım. Her $n > N$ için $a_n \leq b_n \leq s_N(b)$ olduğundan $s_N(b)$, $\{a_n : n > N\}$ kümesinin bir üst sınırıdır; supremum en küçük üst sınır olduğundan $s_N(a) \leq s_N(b)$. Bu her N için doğrudur; Teorem 21.3 ile

$$\limsup a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(a) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(b) = \limsup b_n.$$

Alt limit için $t_N(a) \leq t_N(b)$ aynı biçimde görülür: $t_N(a)$, $\{b_n : n > N\}$ 'nin bir alt sınırıdır (her $n > N$ için $t_N(a) \leq a_n \leq b_n$), dolayısıyla $t_N(a) \leq t_N(b)$; limit alınca $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.

■

Üst ve alt limit, bir dizinin yakınsaklığını limitini bilmeden denetlemenin ilk aracıydı: dizi yakınsaktır ancak ve ancak $\limsup a_n = \liminf a_n$ ve bu ortak değer bir reel sayı ise. Sonraki bölümde aynı amaca hizmet eden, ama çok daha pratik ikinci bir araç göreceğiz: terimlerin limite değil, **birbirine** yaklaşmasını ölçen Cauchy koşulu — [Cauchy Dizileri ve Reel Sayıların Tamlığı](#).

26. Cauchy Dizileri ve Reel Sayıların Tamlığı

Bir dizinin yakınsak olduğunu göstermenin şimdiye kadar iki yolu vardı: ya limiti tahmin edip ε - n_ε tanımını doğrulamak, ya da dizinin monoton ve sınırlı olduğunu görmek. Birinci yol limiti önceden bilmeyi, ikincisi monotonluğu gerektirir. Oysa çoğu dizi ne limitini ele verir ne de monotondur. Bu bölümde her iki engeli aşan bir ölçüt göreceğiz: **Cauchy koşulu**. Fikir basittir. Yakınsak bir dizinin terimleri limite yaklaşırken zorunlu olarak **birbirlerine de** yaklaşır; peki tersine, terimleri birbirine yaklaşan her dizi yakınsak mıdır? Reel sayılarda evet – ve bu “evet”, reel sayıların tamlığının bir başka yüzüdür.

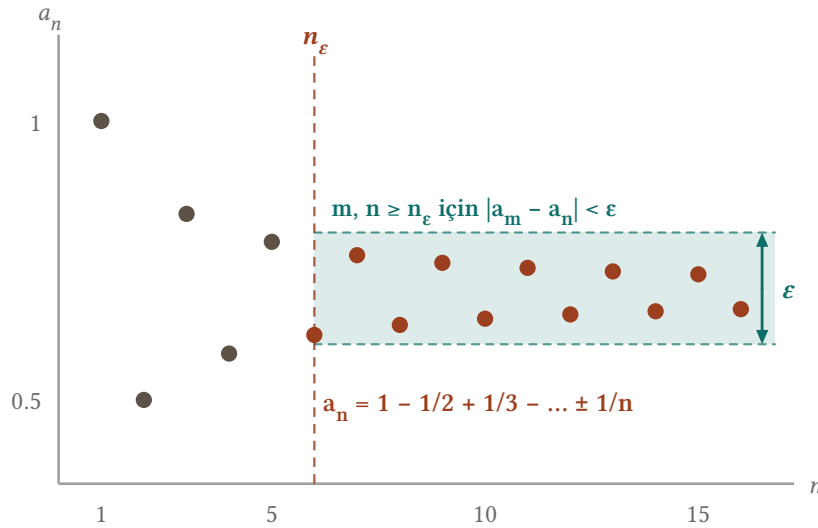
Kavram, adını Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy'den (1789–1857) alır. Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Cauchy dizisinin tanımı ve olumsuzlaması; yakınsak dizilerin Cauchy, Cauchy dizilerinin sınırlı olduğu; $\mathbb{R}$ 'de her Cauchy dizisinin yakınsadığını söyleyen **Cauchy ölçütü**; ardışık terim farkları geometrik hızla küçülen “daralan” diziler; **tam küme** kavramı ve $\mathbb{Q}$ 'nun tam olmayışı; son olarak reel sayıların tamlığını beş farklı biçimde ifade eden büyük denklik teoremi.

26.1 Cauchy Dizisi

Yakınsaklık tanımında terimleri sabit bir a sayısı ile karşılaştırıyorduk: $|a_n - a| < \varepsilon$. Cauchy koşulunda a ortadan kalkar; terimler **birbirleriyle** karşılaştırılır.

Tanım 26.1 (Cauchy Dizisi). (a_n) bir reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n, m \geq n_\varepsilon$ olan her $n, m \in \mathbb{N}$ çifti için $|a_n - a_m| < \varepsilon$ sağlanacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa (a_n) 'ye **Cauchy dizisi** (Cauchy sequence) denir. Sembolik olarak:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



Şekil 26.1: Cauchy dizisi: n_ε 'dan sonraki bütün terimler genişliği ε olan bir şeride sığar, yani birbirlerine ε 'dan yakındır. Şekilde hiçbir limit çizilmemiştir; tanım terimleri yalnızca birbiriyle karşılaştırır. Örnek $1 - 1/2 + 1/3 - \dots$ kısmi toplamlarıdır; reel sayılarda böyle bir dizi mutlaka yakınsar.

Tanımı şöyle okuyalım: ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin, dizinin bir yerden sonraki terimlerinin **hepsi** birbirine ε 'dan yakındır; yani n_ε 'dan sonraki bütün terimler genişliği ε 'dan küçük bir şeride sığar. Şeridin nerede olduğu, yani limitin ne olduğu, tanımda hiç geçmez. n ve m indisleri birbirinden bağımsızdır; ispatlarda çoğu zaman $m > n$ varsaymak işleri kolaylaştırır ($|a_n - a_m| = |a_m - a_n|$ olduğundan bu bir kayıp değildir). Tanımın sık kullanılan bir başka yazılışı, $m = n + p$ alınarak elde edilir.

Önerme 26.1 (Cauchy Koşulunun Denk Biçimi). (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul şudur:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) (a_n) Cauchy olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin ve n_ε tanımdaki gibi olsun. $n \geq n_\varepsilon$ ve $p \in \mathbb{N}$ için $m = n + p \geq n \geq n_\varepsilon$ olduğundan $|a_{n+p} - a_n| = |a_m - a_n| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$ yönü) Koşul sağlansın, $\varepsilon > 0$ verilsin ve n_ε koşuldaki gibi olsun. $n, m \geq n_\varepsilon$ alalım. $n = m$ ise $|a_n - a_m| = 0 < \varepsilon$. $n \neq m$ ise simetriden dolayı $n < m$ varsayabiliriz; **Önerme 9.3 (4)** gereği $p = m - n \in \mathbb{N}$ 'dir ve $|a_n - a_m| = |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

■

i Cauchy olmamak

Tanımın olumsuzlaması (**Teorem 2.1**) şudur: (a_n) Cauchy dizisi **değildir** ancak ve ancak

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon_0.$$

Yani bir “kötü” ε_0 vardır: ne kadar ileri gidersek gidelim, birbirinden en az ε_0 uzakta iki terim bulunur.

Örnek 26.1 (Bir Bölü n Dizisi Cauchy Dizisidir). $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu tanımdan gösterelim.

Çözüm.

$m > n$ olsun. $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ olduğundan

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin. **Sonuç 12.2** ile $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ olan bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ seçelim. $m > n \geq n_\varepsilon$ için

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

$n = m$ durumu apaçıktır ve $n > m$ durumu simetridir. Demek ki her $n, m \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - a_m| < \varepsilon$: $(1/n)$ bir Cauchy dizisidir.

■

Örnek 26.2 (Eksi Bir Üssü n Dizisi Cauchy Değildir). $a_n = (-1)^n$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığını gösterelim.

Çözüm.

Olumsuzlamayı $\varepsilon_0 = 1$ ile doğrulayalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $n = N$ ve $m = N + 1$ alalım. Bu iki indis N 'den büyük ya da eşittir ve ardışık terimler zıt işaretli olduğundan

$$|a_n - a_m| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N| \cdot |1 - (-1)| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Demek ki her N için birbirinden en az 1 uzakta iki terim vardır: dizi Cauchy değildir.

■

26.2 Yakınsak Diziler Cauchy'dir

Cauchy koşulunun yakınsaklıkla ilişkisini iki adımda kuracağız. İlk adım kolaydır: yakınsak dizinin terimleri limite yakınsa birbirlerine de yakındır.

Teorem 26.1 (Yakınsak Her Dizi Cauchy Dizisidir). *Yakınsak her reel sayı dizisi bir Cauchy dizisidir.*

İspat.

(a_n) dizisi $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsasın ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklık tanımını (Tanım 20.1) $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ile uygulayalım: $k \geq N$ iken $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. (ε yerine $\frac{\varepsilon}{2}$ seçmemizin nedeni, sonunda iki uzaklığı toplayacak olmamızdır.)

$n, m \geq N$ olsun. Hem $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ hem $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. Mutlak değer içine a 'yı ekleyip çıkaralım ve üçgen eşitsizliğini (Teorem 8.2) kullanalım:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demek ki $n_\varepsilon = N$ seçimi Cauchy tanımını sağlar.

■

Bu teoremin en pratik kullanımı karşıt tersidir: **Cauchy olmayan dizi ıraksaktır.** Örneğin Örnek 26.2, $((-1)^n)$ dizisinin ıraksaklığının yeni bir ispatıdır.

İkinci adım için, Cauchy dizilerinin yakınsak dizilerle paylaştığı bir özelliğe ihtiyacımız var.

Teorem 26.2 (Her Cauchy Dizisi Sınırlıdır). *Her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

İspat.

(a_n) Cauchy olsun. Tanımda $\varepsilon = 1$ alalım: $n, m \geq N$ iken $|a_n - a_m| < 1$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak $m = N$ sabitlenirse her $n \geq N$ için $|a_n - a_N| < 1$ olur. Ters üçgen eşitsizliğiyle (Sonuç 8.3)

$$|a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| < 1, \quad \text{yani} \quad |a_n| < |a_N| + 1 \quad (n \geq N).$$

Bu, dizinin kuyruğunu sınırlar. Baştaki sonlu tane terimi de hesaba katmak için

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

alalım (sonlu tane sayının en büyüğü, Tanım 7.4). $n < N$ ise $|a_n|$ kümenin bir elemanıdır ve $|a_n| \leq M$; $n \geq N$ ise $|a_n| < |a_N| + 1 \leq M$. Her n için $|a_n| \leq M$; mutlak değerli bu biçim sınırlılığa denk olduğundan (Tanım 19.3, Önerme 19.1) dizi sınırlıdır.

■

⚠ Sınırlı olmak Cauchy olmak için yetmez

$((-1)^n)$ dizisi sınırlıdır ama Cauchy değildir (Örnek 26.2). Yani “Cauchy $\Rightarrow$ sınırlı” doğru, karşıtı yanlıştır. Öte yandan teorem, Cauchy olmadığını göstermenin hızlı bir yolunu verir: **sınırsız dizi Cauchy olamaz.**

26.3 Cauchy Ölçütü

Şimdi asıl soruya geliyoruz: Cauchy dizileri yakınsak mıdır? Yol şu: Cauchy dizisi sınırlıdır; sınırlı dizinin Bolzano–Weierstrass gereği yakınsak bir alt dizisi vardır; Cauchy koşulu ise dizinin geri kalanını bu alt dizinin peşinden sürükler.

Lemma 26.1 (Yakınsak Alt Dizisi Olan Cauchy Dizisi Yakınsaktır). (a_n) bir Cauchy dizisi olsun. (a_{n_k}) 'nin $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsayan bir (a_{n_k}) alt dizisi varsa dizinin kendisi de a 'ya yakınsar.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Cauchy koşulunu $\frac{\varepsilon}{2}$ ile uygulayalım: $n, m \geq N_1$ iken $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir N_1 vardır. Alt dizinin yakınsaklığından $k \geq K$ iken $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir K vardır. $k = \max\{K, N_1\}$ sabitleyelim. **Önerme 24.1** gereği $n_k \geq k \geq N_1$ ’dir; ayrıca $k \geq K$. Şimdi $n \geq N_1$ herhangi bir indis olsun. Hem n hem n_k , N_1 ’den büyük ya da eşit olduğundan Cauchy koşulu $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ verir. Üçgen eşitsizliğiyle

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu her $n \geq N_1$ için doğrudur; **Tanım 20.1** gereği $a_n \rightarrow a$. ■

Lemmanın söylediği şu: Cauchy dizisi “tek parçadır”; bir parçası bir yere gidiyorsa hepsi oraya gider. Buradan bölümün ana teoremi çıkar.

Teorem 26.3 (Cauchy Ölçütü). *Reel sayılarda her Cauchy dizisi yakınsaktır.*

İspat.

(a_n) bir Cauchy dizisi olsun. **Teorem 26.2** gereği sınırlıdır. Bolzano–Weierstrass teoremi (**Teorem 24.5**) gereği yakınsak bir (a_{n_k}) alt dizisi vardır; limitine a diyelim. **Lemma 26.1** gereği (a_n) dizisinin kendisi de a ’ya yakınsar. ■

Teorem 26.1 ile **Teorem 26.3** birleşince yakınsaklığın tam bir karakterizasyonu elde edilir.

Sonuç 26.1 (Genel Yakınsaklık İlkesi). *Bir reel sayı dizisi yakınsaktır ancak ve ancak Cauchy dizisiyse:*

$$(a_n) \text{ yakınsak} \Leftrightarrow (a_n) \text{ Cauchy}.$$

İspat.

$(\Rightarrow)$ **Teorem 26.1.** $(\Leftarrow)$ **Teorem 26.3.** ■

💡 Ölçüt nasıl kullanılır

Bir dizinin yakınsak olduğunu göstermek için artık limiti bilmek gerekmez: $|a_n - a_m|$ farkını (çoğu zaman $m > n$ alıp) n ’ye bağlı ve 0’a giden bir büyüklükle üstten sınırlamak yeter. Iraksaklığı göstermek içinse tek bir ε_0 ve her N için birbirinden ε_0 uzakta iki terim bulmak yeter. Bu ölçüt, Analiz 2’de serilerin yakınsaklığını incelerken temel araç olacaktır: bir serinin yakınsak olması, kısmi toplamlar dizisinin Cauchy olması demektir.

Ölçütün tipik uygulaması, ardışık terimler arasındaki farkın geometrik hızla küçüldüğü dizilerdir.

Örnek 26.3 (Daralan Diziler Cauchy Dizisidir). (a_n) bir dizi, $C > 0$ ve $0 < r < 1$ sabitler olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cr^n$$

sağlanıyorsa (a_n) ’nin bir Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Adım 1: Geometrik toplam. Her $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$1 + r + r^2 + \dots + r^j = \frac{1 - r^{j+1}}{1 - r} < \frac{1}{1 - r}$$

olduğunu görelim. Eşitlik için $(1-r)(1+r+\dots+r^j) = 1-r^{j+1}$ özdeşliğini açalım: çarpım $(1+r+\dots+r^j) - (r+r^2+\dots+r^{j+1})$ olur ve ortadaki terimler sadeleşir. Eşitsizlik $0 < r^{j+1}$ ve $1-r > 0$ 'dan çıkar.

Adım 2: $|a_m - a_n|$ **tahmini.** $m > n$ olsun. Farkı ardışık farkların toplamı olarak yazalım (toplam açılıp sadeleştirilirse bu görülür):

$$a_m - a_n = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \dots + (a_m - a_{m-1}) = \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k).$$

Sonlu toplamalar için üçgen eşitsizliği (Teorem 9.7) ve hipotezle

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} Cr^k = Cr^n(1+r+\dots+r^{m-n-1}) < \frac{Cr^n}{1-r}.$$

Adım 3: Cauchy koşulu. $0 < r < 1$ olduğundan $r^n \rightarrow 0$ 'dır (Teorem 22.8). $\varepsilon > 0$ verilsin; $n \geq n_\varepsilon$ iken $r^n < \frac{(1-r)\varepsilon}{C}$ olan bir n_ε vardır. $m > n \geq n_\varepsilon$ için Adım 2 ile

$$|a_m - a_n| < \frac{Cr^n}{1-r} < \frac{C}{1-r} \cdot \frac{(1-r)\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

$m = n$ durumu apaçık, $m < n$ durumu simetriktir. Demek ki (a_n) Cauchy dizisidir; Teorem 26.3 ile yakınsaktır.

■

Örnek 26.4 (Ardışık İki Terimin Ortalamasıyla Kurulan Dizi). $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ olsun; her terim kendinden önceki iki terimin ortalamasıdır: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \dots$. Dizinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulalım.

Çözüm.

Dizi monoton değildir (terimler bir büyür bir küçülür), bu yüzden monoton yakınsaklık teoremi işe yaramaz; Cauchy ölçütünü kullanacağız.

Ardışık farklar. Özyineleme bağıntısından

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} - a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n).$$

Yani her ardışık fark bir öncekinin $-\frac{1}{2}$ katıdır. $a_2 - a_1 = 1$ olduğundan tümevarımla (Teorem 9.1)

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad |a_{n+1} - a_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Yakınsaklık. Örnek 26.3'nin hipotezi $C = 2$, $r = \frac{1}{2}$ ile sağlanır; dizi Cauchy'dir ve yakınsaktır.

Limit. a_n 'yi ardışık farkların toplamı olarak yazalım; Örnek 26.3'nin Adım 1'indeki geometrik toplam formülü $r = -\frac{1}{2}$ için de geçerlidir (özdeşlik her $r \neq 1$ için doğrudur):

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

$\left|-\frac{1}{2}\right|^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ olduğundan (Teorem 22.8) Teorem 21.1 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

■

⚠ Ardeşık farkların sıfıra gitmesi yetmez

Cauchy koşulu, $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$ koşulundan **daha güçlüdür**; ikincisi yakınsaklık için yeterli değildir. $a_n = \sqrt{n}$ dizisine bakalım. Payı ve paydayı eşlenikle çarparsak

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Ama $(\sqrt{n})$ sınırsızdır: $M > 0$ verilince $n > M^2$ için $\sqrt{n} > M$ olur. **Teorem 26.2** gereği sınırsız dizi Cauchy olamaz; dolayısıyla $(\sqrt{n})$ yakınsak değildir (artan ve sınırsız olduğundan $+\infty$ 'a ıraksar, **Teorem 23.2**). Cauchy koşulunda önemli olan, **ardışık** terimlerin değil, n_ϵ 'dan sonraki **bütün** terim çiftlerinin birbirine yakın olmasıdır. Alıştırmalarda harmonik dizide de aynı olguyu göreceğiz.

26.4 Tam Kümeler

Cauchy ölçütü reel sayıların bir özelliğidir; her sayı kümesi için geçerli değildir. Bir dizinin terimleri birbirine yaklaşabilir, ama yaklaştıkları nokta içinde çalıştığımız kümede olmayabilir. Bu düşünce “delik” kavramını kesinleştirir.

Tanım 26.2 (Tam Küme). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A içindeki her Cauchy dizisi A 'nın bir elemanına yakınsıyorsa – yani terimleri A 'da olan her Cauchy dizisi yakınsak ve limiti A 'da ise – A 'ya **tam küme** (complete set) denir.

Sezgi: tam kümede “delik” yoktur; bir dizi bir yere gitmeye çalışıyorsa gittiği yer kümenin içindedir. **Teorem 26.3** tam olarak $\mathbb{R}$ 'nin tam olduğunu söyler: $\mathbb{R}$ 'deki her Cauchy dizisi $\mathbb{R}$ 'nin bir elemanına yakınsar.

Karşı örnek: $(0, 1]$ aralığı tam değildir. $(\frac{1}{n})$ dizisinin bütün terimleri bu aralıktadır ve dizi Cauchy'dir (**Örnek 26.1**); ama limiti 0, aralığa ait değildir. Aralığın sol ucunda bir “delik” vardır. Bu örnek genel bir olguya işaret ediyor: tamlık, kümenin kendi limit noktalarını içermesiyle, yani kapalılıkla ilgilidir.

Önerme 26.2 (Kapalı Kümeler Tamdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.

1. A kapalı ise tamdır.
2. Tersine, A tam ise kapalıdır.

Dolayısıyla $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesi tamdır ancak ve ancak kapalıysa.

İspat.

(1) A kapalı olsun ve (a_n) , terimleri A 'da olan bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy ölçütü (**Teorem 26.3**) gereği (a_n) bir $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar. Kapalılığın dizisel karakterizasyonu (**Teorem 21.10**) gereği kapalı bir küme içindeki yakınsak dizinin limiti kümeye aittir: $a \in A$. Demek ki A 'daki her Cauchy dizisi A 'nın bir elemanına yakınsar; A tamdır.

(2) A tam olsun. **Teorem 21.10**'yi kullanarak A 'nın kapalı olduğunu göstermek için A içindeki yakınsak her dizinin limitinin A 'da olduğunu görmeliyiz. (a_n) , A 'da bir dizi ve $a_n \rightarrow a$ olsun. **Teorem 26.1** gereği (a_n) Cauchy'dir; A tam olduğundan dizi A 'nın bir elemanına yakınsar. Limit tek olduğundan (**Teorem 20.1**) bu eleman a 'dır: $a \in A$.

■

Böylece $[a, b]$, $\{a\}$, $[0, \infty)$ gibi kapalı kümeler tamdır; (a, b) , $(0, 1]$, $[a, b)$ gibi kapalı olmayan kümeler tam değildir. En önemli tam olmayan küme rasyonel sayılardır.

Örnek 26.5 (Rasyonel Sayılar Tam Değildir). $\mathbb{Q}$ kümesinin tam olmadığını gösterelim.

Çözüm.

Terimleri rasyonel olan ama limiti irrasyonel olan bir Cauchy dizisi bulmalıyız. $\sqrt{2}$ 'ye yakınsayan bir rasyonel dizi kuralım. Rasyonel sayıların yoğunluğu (**Teorem 13.5**) gereği her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt{2} < q_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$$

olan bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. $\sqrt{2} + \frac{1}{n} \rightarrow \sqrt{2}$ olduğundan (Teorem 21.1) sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) ile $q_n \rightarrow \sqrt{2}$. Yakınsak olduğundan (q_n) bir Cauchy dizisidir (Teorem 26.1) ve bütün terimleri $\mathbb{Q}$ 'dadır. Ama limiti $\sqrt{2}$, Teorem 13.3 gereği rasyonel değildir. $\mathbb{Q}$ 'daki bu Cauchy dizisi $\mathbb{Q}$ 'nun hiçbir elemanına yakınsayamaz (limit tektir); demek ki $\mathbb{Q}$ tam değildir. Aynı sonuç Önerme 26.2 ile de görülür: $\mathbb{Q}$ kapalı değildir, çünkü $\sqrt{2}$ bir değme noktasıdır ama $\mathbb{Q}$ 'ya ait değildir.

Başka örnekler de vardır. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dizisinin bütün terimleri rasyoneldir ve dizi e sayısına yakınsar (Tanım 23.1, Teorem 23.3); e 'nin irrasyonel olduğu bilindiğinden (ispatı Analiz 2'de) bu da $\mathbb{Q}$ 'dan “kaçan” bir Cauchy dizisidir. Monoton Yakınsaklık Teoremi ve e Sayısı bölümündeki $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$ dizisi de terimleri rasyonel olup $\sqrt{2}$ 'ye yakınsayan bir başka örnektir.

■

Rasyonel sayılar sıralı bir cisimdir (Teorem 11.4); cebirsel aksiyomların ve sıralama aksiyomlarının hepsini sağlar. Onu $\mathbb{R}$ 'den ayıran şey tam olmamasıdır: $\mathbb{Q}$ 'da Cauchy dizileri yakınsamak zorunda değildir. Şaşırtıcı bir karşı örnek olarak “delikli” görünen tam sayılar kümesi tamdır.

Örnek 26.6 (Tam Sayılar Kümesi Tamdır). $\mathbb{Z}$ kümesinin tam olduğunu gösterelim.

Çözüm.

İspat, tam sayıların “ayrık” doğasına dayanır: iki farklı tam sayı arasındaki uzaklık en az 1'dir. Gerçekten $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $p \neq q$ ise Önerme 11.1 gereği $p - q$ sıfırdan farklı bir tam sayıdır; Tanım 11.1 gereği ya $p - q \in \mathbb{N}$ ya da $q - p \in \mathbb{N}$, yani $|p - q| \in \mathbb{N}$ ve Önerme 9.3 (1) ile $|p - q| \geq 1$.

(a_n) , terimleri $\mathbb{Z}$ 'de olan bir Cauchy dizisi olsun. Tanımda $\varepsilon = 1$ alalım: $n, m \geq n_1$ iken $|a_n - a_m| < 1$ olan bir n_1 vardır. İki tam sayının uzaklığı 1'den küçükse sıfır olmak zorundadır; dolayısıyla $n, m \geq n_1$ için $a_n = a_m$. Yani dizi n_1 -inci terimden sonra sabittir: her $n \geq n_1$ için $a_n = a_{n_1}$.

Sabit kuyruklu bir dizi yakınsaktır: $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun $n \geq n_1$ için $|a_n - a_{n_1}| = 0 < \varepsilon$; dolayısıyla $a_n \rightarrow a_{n_1} \in \mathbb{Z}$. Her Cauchy dizisi $\mathbb{Z}$ 'nin bir elemanına yakınsadığından $\mathbb{Z}$ tamdır. (Aynı sonuç, $\mathbb{Z}$ 'nin kapalı bir küme olması ve Önerme 26.2 ile de elde edilir.)

■

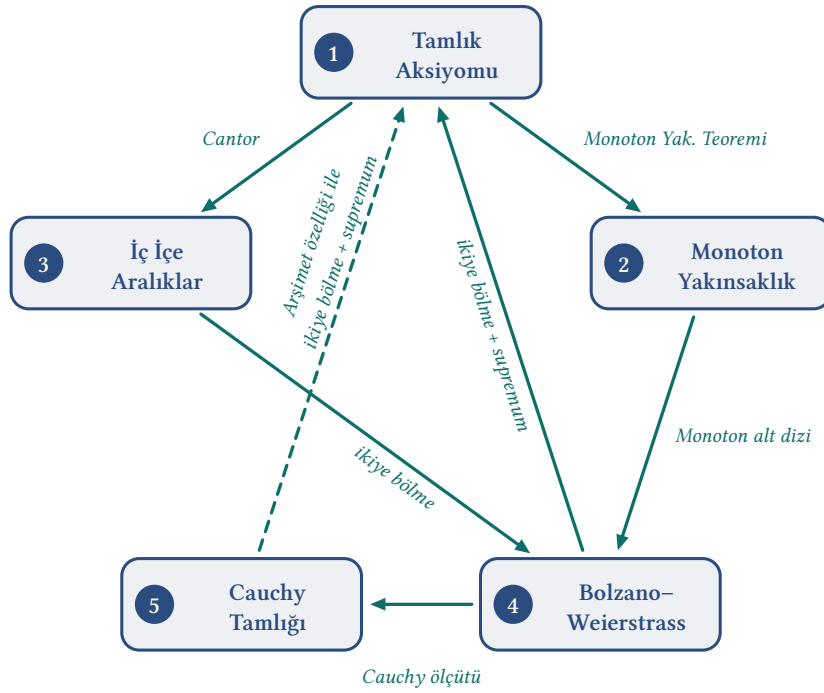
26.5 Reel Sayıların Tamlığı: Beş Denk Özellik

Bu kitabın diziler kısmı boyunca reel sayıların “deliksiz” oluşunu birçok farklı kılıkta gördük: supremum varlığı, monoton dizilerin yakınsaklığı, iç içe aralıkların ortak noktası, sınırlı dizilerin yakınsak alt dizisi ve şimdi Cauchy dizilerinin yakınsaklığı. Bunlar aynı olgunun beş farklı ifadesidir; her biri diğerlerinden türetilir. Aşağıdaki teorem bu bölümün ve diziler kısmının kapanış taşıdır.

Teorem 26.4 (Reel Sayıların Tamlığının Beş Denk İfadesi). *Reel sayılar için aşağıdaki beş özellik birbirine denktir; yani herhangi birinden diğerlerinin hepsi çıkarılabilir.*

1. **Tamlık Aksiyomu.** Üstten sınırlı ve boş olmayan her $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin bir supremumu vardır.
2. **Monoton Yakınsaklık.** Sınırlı her monoton dizi yakınsaktır.
3. **İç İçe Aralıklar (Cantor).** İç içe kapalı ve sınırlı aralıkların kesişimi boş değildir.
4. **Bolzano–Weierstrass.** Sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.
5. **Cauchy Tamlığı.** Her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Reel sayılar bu özelliklerin hepsine sahiptir; rasyonel sayılar hiçbirine sahip değildir.



Şekil 26.2: Tamlik aksiyomunun beş eşdeğer biçimi. Her ok, kuyruğundaki özelliğin ucundakini gerektirdiğini ve ispatta kullanılan aracı gösterir: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ zinciri ile $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ yolu düz oklarla, 4'ten ve 5'ten 1'e dönüş ikiye bölme ve supremum ile kurulur. Cauchy tamlığından aksiyoma dönüş (kesikli ok) ayrıca Arşimet özelliğine ihtiyaç duyar.

İspat.

İspat, kitap boyunca kanıtladığımız sonuçları bir döngüde birleştirir. Önce nerede ne kanıtladığımızı listeleyelim:

Yön	Nerede kanıtlandı
$(1) \Rightarrow (2)$	Monoton yakınsaklık teoremi Teorem 23.1 (Tamlik Aksiyomu'ndan)
$(1) \Rightarrow (3)$	Cantor'un iç içe aralıklar teoremi Teorem 10.5 (supremumla)
$(2) \Rightarrow (4)$	Her dizinin monoton bir alt dizisi vardır (Teorem 24.4 , tamlik kullanılmaz); sınırlıysa (2) ile yakınsar — bu, Teorem 24.5 'nin ispatıdır
$(4) \Rightarrow (5)$	Cauchy ölçütü Teorem 26.3 (sınırlılık + Bolzano-Weierstrass + Lemma 26.1)
$(3) \Rightarrow (4)$	Aşağıda, Adım A
$(4) \Rightarrow (1)$ ve $(5) \Rightarrow (1)$	Aşağıda, Adım B ve C

Bu oklar birleşince her özellikten her özelliğe bir yol vardır: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ döngüsü ile $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$. Geriye üç yönü kanıtlamak kalıyor. Bu ispatlarda kullanacağımız limit özellikleri (limit aritmetiği, sıralama, sıkıştırma, alt dizilerin ve kuyrukların yakınsaklığı) yalnızca limit tanımından çıkar, tamlik kullanmaz; dolayısıyla döngüde kısır döngü yoktur.

Adım A: $(3) \Rightarrow (4)$. (a_n) sınırlı olsun: her n için $a_n \in [-M, M] = I_1$. I_1 'i ortasından iki kapalı aralığa bölelim; en az biri sonsuz çoklukta n indisi için a_n 'yi içerir (ikisi de sonlu tane içerseydi I_1 de sonlu tane içerirdi). Böyle bir parçayı I_2 seçelim; I_2 'yi bölüp aynı ölçütü I_3 'ü seçelim ve devam edelim. Elde edilen

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ kapalı aralıkları iç içedir ve I_k 'nin uzunluğu $\frac{2M}{2^{k-1}}$ 'dir. (3) gereği ortak bir a noktası vardır. Şimdi indisleri seçelim: $a_{n_1} \in I_1$ olacak bir n_1 alalım; I_{k+1} sonsuz çoklukta indis içerdiğinden $n_{k+1} > n_k$ ve $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ olan bir n_{k+1} vardır. Hem a hem a_{n_k} aynı I_k aralığında olduğundan

$$|a_{n_k} - a| \leq \frac{2M}{2^{k-1}} = 4M \left(\frac{1}{2}\right)^k \rightarrow 0$$

(Teorem 22.8); sıkıştırma ile $a_{n_k} \rightarrow a$. Yakınsak alt dizi bulundu.

Adım B: Ortak kuruluş. (4) $\Rightarrow$ (1) ve (5) $\Rightarrow$ (1) yönleri için aynı kuruluşu kullanacağız. $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan, üstten sınırlı bir küme olsun; $\sup A$ 'nın var olduğunu göstereceğiz. Bir $a_0 \in A$ seçip $x_1 = a_0 - 1$ alalım; $a_0 > x_1$ olduğundan x_1 bir üst sınır **değildir**. y_1 ise A 'nın herhangi bir üst sınırı olsun. $x_1 < a_0 \leq y_1$ 'dir.

Aralığı ikiye bölerek ilerleyelim: $[x_n, y_n]$ kurulmuş, x_n üst sınır değil, y_n üst sınır olsun. $z = \frac{x_n + y_n}{2}$ orta noktası üst sınırsa $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z$; değilse $x_{n+1} = z$, $y_{n+1} = y_n$ alalım. Her adımda "sol uç üst sınır değil, sağ uç üst sınır" özelliği korunur ve uzunluk yarılanır:

$$y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}.$$

x_n üst sınır olmadığından $x_n < a$ olan bir $a \in A$ vardır ve $a \leq y_n$; dolayısıyla $x_n < y_n$. Kuruluş gereği (x_n) artan, (y_n) azalandır ve her $n \geq N$ için $x_N \leq x_n < y_n \leq y_N$.

Uzunluklar sıfıra gider: $n \geq 2$ için $n-1 \in \mathbb{N}$ olduğundan Bernoulli eşitsizliği (Teorem 9.5) $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) = n$ verir; $n=1$ için ise $2^0 = 1 = n$ apaçıktır. Her iki durumda da $2^{n-1} \geq n$, dolayısıyla

$$0 < y_n - x_n \leq \frac{y_1 - x_1}{n} \rightarrow 0,$$

burada $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olması Teorem 10.4'e, yani Arşimet özelliğine dayanır (bu nokta için aşağıdaki nota bakınız).

Adım C: (y_n) yakınsaktır. İki hipotezden hangisi elimizdeyse onu kullanalım.

(4) altında. (y_n) sınırlıdır ($x_1 < y_n \leq y_1$); (4) ile yakınsak bir (y_{n_k}) alt dizisi vardır, limitine s diyelim. Dizinin tamamının s 'ye yakınsadığını görelim. Sabit bir n için Önerme 24.1 gereği $k \geq n$ olan her k 'de $n_k \geq k \geq n$, dolayısıyla azalanlıktan $y_{n_k} \leq y_n$. Eşitsizlik alt dizinin yalnızca $k \geq n$ kuyruğunda geçerlidir; ama bu kuyruğun limiti de s 'dir (Teorem 24.3), dolayısıyla limitlerde sıralama (Teorem 21.3) ile $s \leq y_n$ ve bu her n için doğrudur. $\varepsilon > 0$ verilsin; $y_{n_K} < s + \varepsilon$ olan bir K vardır ve $n \geq n_K$ için $s \leq y_n \leq y_{n_K} < s + \varepsilon$. Demek ki $y_n \rightarrow s$.

(5) altında. $n, m \geq N$ için y_n ve y_m her ikisi de $[x_N, y_N]$ aralığındadır; dolayısıyla $|y_n - y_m| \leq y_N - x_N \leq \frac{y_1 - x_1}{N}$. $\varepsilon > 0$ verilince $N > \frac{y_1 - x_1}{\varepsilon}$ seçilirse $n, m \geq N$ için $|y_n - y_m| < \varepsilon$: (y_n) Cauchy'dir ve (5) ile bir s sayısına yakınsar.

Her iki durumda da $x_n = y_n - (y_n - x_n) \rightarrow s - 0 = s$ (Teorem 21.1).

Adım D: $s = \sup A$. (S1) s üst sınırdır: $a \in A$ olsun. Her n için y_n üst sınır olduğundan $a \leq y_n$; limitlerde sıralama (Teorem 21.3) ile $a \leq s$. (S2) s 'den küçük hiçbir sayı üst sınır değildir: $c < s$ olsun. $x_n \rightarrow s$ olduğundan $\varepsilon = s - c > 0$ için $x_n > s - \varepsilon = c$ olan bir n vardır. x_n üst sınır olmadığından $a > x_n > c$ olan bir $a \in A$ vardır; yani c üst sınır değildir. Tanım 10.4 gereği $s = \sup A$. Böylece (4) $\Rightarrow$ (1) ve (5) $\Rightarrow$ (1) kanıtlandı.

■

i Arşimet özelliğinin rolü

Adım A'da $(\frac{1}{2})^k \rightarrow 0$, Adım B'de $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğunu, yani $\mathbb{N}$ 'nin üstten sınırsızlığını (Arşimet özelliği) kullandık; bunu ise Teorem 10.4'de Tamlik Aksiyomu ile kanıtlamıştık. (4) $\Rightarrow$ (1) yönünde bu bir sorun değildir, çünkü Bolzano–Weierstrass özelliği Arşimet özelliğini kendi başına verir: $\mathbb{N}$ üstten sınırlı olsaydı (n) dizisi sınırlı olur, (4) ile yakınsak bir (n_k) alt dizisi bulunur, yakınsak dizi Cauchy olduğundan $(\varepsilon = 1)$ büyük k için $|n_{k+1} - n_k| < 1$ gerekirdi; oysa farklı iki doğal sayının farkı en az 1'dir (Önerme 9.3). Çelişki. Aynı akıl yürütme (2) için de işler: (n) artan ve sınırlı olsaydı (2) ile yakınsar, dolayısıyla Cauchy olurdu.

(3) $\Rightarrow$ (4) (Adım A) ve (5) $\Rightarrow$ (1) yönlerinde ise Arşimet özelliği ayrıca varsayılmalıdır: iç içe aralıklar özelliği de Cauchy tamlığı da tek başına $\mathbb{N}$ 'nin sınırsızlığını vermez (Arşimet olmayan ama bu iki özelliği sağlayan sıralı cisimler vardır; bu incelik ileri kurslara aittir). Reel sayılarda Arşimet özelliği zaten sağlandığından, teoremin “reel sayılar için” ifadesi tamamen doğrudur.

Teoremin mesajı şudur: **reel sayıları rasyonel sayılardan ayıran tek şey tamlıktır** ve bu tamlık, hangi araçla bakarsak bakalım aynı şeydir. $\mathbb{Q}$ 'da beş özelliğin hiçbiri doğru değildir: $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ kümesinin rasyonel supremumu yoktur (Sonuç 13.1); $\sqrt{2}$ 'ye yakınsayan rasyonel dizi monoton seçilebilir ama $\mathbb{Q}$ 'da yakınsamaz; $\sqrt{2}$ 'yi sıkıştıran rasyonel uçlu kapalı aralıkların $\mathbb{Q}$ 'daki kesişimi boştur; aynı dizinin $\mathbb{Q}$ 'da yakınsak alt dizisi yoktur; ve $\mathbb{Q}$ 'daki Cauchy dizileri yakınsamak zorunda değildir (Örnek 26.5).

26.6 Alıştırmalar

Alıştırma 26.1 (Cauchy Dizileri Alıştırmaları).

- $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu doğrudan tanımla gösteriniz.
- $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ harmonik dizisinin Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz; buradan dizinin $+\infty$ 'a ıraksadığını çıkarınız. Ardışık farkların $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ olduğuna dikkat ediniz.
- (a_n) ve (b_n) Cauchy dizileriye $(a_n + b_n)$ ve $(a_n b_n)$ dizilerinin de Cauchy olduğunu, Cauchy ölçütünü kullanmadan doğrudan tanımdan gösteriniz.
- $A = [0, \infty)$ ve $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ kümelerinin tam olup olmadığını belirleyiniz.
- $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$ olsun. Dizinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

Çözüm.

a) Önce $a_n = \frac{2(n+3)-5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$ yazalım. $m > n$ için

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{5}{m+3} - \frac{5}{n+3} \right| = \frac{5}{n+3} - \frac{5}{m+3} < \frac{5}{n+3} < \frac{5}{n}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin; Teorem 10.4 ile $n_\varepsilon > \frac{5}{\varepsilon}$ olan bir n_ε seçelim. $m > n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - a_m| < \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. $n = m$ durumu apaçık, $n > m$ durumu simetrik olduğundan dizi Cauchy'dir. (Elbette $a_n \rightarrow 2$ olduğundan Teorem 26.1 da aynı sonucu verir; burada istenen tanımdan doğrulamaydı.)

b) $n \in \mathbb{N}$ için $h_{2n} - h_n$ farkına bakalım:

$$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Sağda n tane terim vardır ve her biri en küçük terim olan $\frac{1}{2n}$ 'den büyük ya da eşittir; dolayısıyla

$$h_{2n} - h_n \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Olumsuzlamayı $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ile doğrulayalım: N verilsin, $n = N$ ve $m = 2N$ alalım; her ikisi de N 'den büyük ya da eşittir ve $|h_m - h_n| \geq \frac{1}{2}$. Demek ki (h_n) Cauchy değildir ve Sonuç 26.1 gereği ıraksaktır. Dizi artandır ($h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} > 0$); artan ve ıraksak bir dizi Sonuç 23.3 gereği sınırsızdır, dolayısıyla Teorem 23.2 ile $h_n \rightarrow +\infty$. Oysa ardışık farklar $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ 'dır: ardışık terimlerin yaklaşması Cauchy olmak için yetmez.

c) *Toplam.* $\varepsilon > 0$ verilsin. $n, m \geq N_1$ için $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $n, m \geq N_2$ için $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$ için üçgen eşitsizliğiyle

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon.$$

Çarpım. **Teorem 26.2** gereği her iki dizi sınırlıdır: her n için $|a_n| \leq M$ ve $|b_n| \leq M$ olacak bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $n, m \geq N_1$ için $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ve $n, m \geq N_2$ için $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$ olsun. $a_n b_n - a_m b_m = a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)$ yazılırsa $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$ için

$$|a_n b_n - a_m b_m| \leq |a_n| |b_n - b_m| + |b_m| |a_n - a_m| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

d) $A = [0, \infty)$ kapalıdır: tümleyeni $(-\infty, 0)$ açık bir aralıktır (**Önerme 15.3**). **Önerme 26.2** gereği A tamdır.

$B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tam değildir. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sayısı irrasyoneldir (rasyonel olsaydı $\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ de rasyonel olurdu, **Önerme 11.6**; bu **Teorem 13.3** ile çelişir) ve $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ 'dir ($1 < \sqrt{2} < 2$ olduğundan). **Teorem 13.5** ile her n için $\frac{\sqrt{2}}{2} < q_n < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4n}$ olan bir $q_n \in \mathbb{Q}$ seçelim; $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} < 1$ olduğundan her $q_n \in B$. Sıkıştırma ile $q_n \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$; dizi yakınsak olduğundan Cauchy'dir, ama limiti B 'de değildir. Demek ki B tam değildir; **Önerme 26.2** gereği kapalı da değildir.

e) *Terimler pozitifdir.* $a_1 = 1 > 0$ ve $a_n > 0$ ise $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n} > 0$ (**Önerme 7.9**); tümevarımla her n için $a_n > 0$, dolayısıyla $2 + a_n > 2$.

Ardışık farklar daralır. Paydaları eşitleyerek

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_{n+1}} - \frac{1}{2 + a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{(2 + a_{n+1})(2 + a_n)},$$

ve paydadaki çarpanların her biri 2'den büyük olduğundan

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n|.$$

$a_2 = \frac{1}{3}$ ve $|a_2 - a_1| = \frac{2}{3}$ olduğundan tümevarımla $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$. **Örnek 26.3**'ün hipotezi $C = \frac{8}{3}$, $r = \frac{1}{4}$ ile sağlanır: dizi Cauchy'dir ve bir a sayısına yakınsar. Limitlerde sıralama ile $a \geq 0$.

Limit. **Teorem 24.3** gereği $a_{n+1} \rightarrow a$; $2 + a_n \rightarrow 2 + a \neq 0$ olduğundan **Teorem 21.1** (bölüm) ile özyineleme bağıntısında limite geçebiliriz:

$$a = \frac{1}{2 + a} \implies a^2 + 2a - 1 = 0 \implies (a + 1)^2 = 2 \implies a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$a \geq 0$ olduğundan $a = \sqrt{2} - 1$ (varlığı için **Teorem 13.1**). Dizi monoton olmadığı hâlde ($a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{3} < a_3 = \frac{3}{7}$) Cauchy ölçütü sayesinde yakınsaklığını kanıtlayabildik.

■

Cauchy ölçütüyle birlikte diziler kuramının araç çantası tamamlandı: yakınsaklığı tanımla, monotonlukla, üst-alt limitle ya da Cauchy koşuluyla denetleyebiliyoruz ve bütün bu araçların aynı kaynaktan, reel sayıların tamlığından beslendiğini biliyoruz. Sıradaki adım, “yaklaşma” fikrini indisleri sonsuza giden dizilerden, bir noktaya yaklaşan reel değişkenlere taşımaktır: **Fonksiyon Limiti: ε - δ Tanımı**.

27. Fonksiyon Limiti: ε - δ Tanımı

Dizilerde n indisi yalnızca “sonsuz” gidebiliyordu; şimdi değişkenimiz bir reel sayıdır ve herhangi bir a noktasına, üstelik her iki yandan ve dilediği yoldan yaklaşabilir. Bu bölümde, “ x sayısı a ’ya yaklaşırken $f(x)$ sayısı ℓ ’ye yaklaşır” cümlesine kesin bir matematiksel anlam vereceğiz. Kilit fikir dizilerdekiyle aynıdır: çıktındaki hata payı ε ne kadar küçük istenirse istensin, girdi için uygun bir hata payı δ bulunabilmelidir. Bu tanım 19. yüzyılda Augustin-Louis Cauchy’nin sezgisel çalışmasından Karl Weierstrass’ın elinde bugünkü biçimini almıştır ve analizin tamamının, özellikle de türev ve integralin temelidir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin ε - δ tanımı ve geometrik yorumu; tanımda noktanın neden bir yığılma noktası olması gerektiği; limitin tekliği; sabit, lineer, kare, karekök ve ters fonksiyon gibi temel fonksiyonların limitlerinin doğrudan tanımdan ispatı ve bu ispatlarda δ ’nın nasıl bulunacağı.

27.1 Sezgisel Yaklaşım

Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelemek, fonksiyonun o noktadaki **değerine** değil, o noktanın **çevresindeki davranışına** bakmaktır. Şu fonksiyonu ele alalım:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}.$$

Bu fonksiyon $x = 1$ noktasında tanımsızdır; payda sıfır olur, dolayısıyla $f(1)$ diye bir sayı yoktur. Ama $x \neq 1$ için pay çarpanlarına ayrılır ve sadeleşir:

$$f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = 3(x+1) = 3x+3 \quad (x \neq 1).$$

x sayısı 1’e yaklaştıkça $3x+3$ sayısı 6’ya yaklaşır: $x = 0,9$ için $f(x) = 5,7$; $x = 0,99$ için $f(x) = 5,97$; $x = 1,001$ için $f(x) = 6,003$. Fonksiyonun 1 noktasında tanımlı olup olmaması bu gözlemi hiç etkilemez; limit, “yaklaşma” ile ilgili bir kavramdır, “varma” ile değil.

Ne var ki “yaklaşmak” sözcüğü matematikte belirsizdir. x sayısı 1’e ne kadar yaklaşmalı? $f(x)$ sayısının 6’ya “yaklaştığını” nasıl ölçeriz? x sayısı 1’e yaklaşırken $f(x)$ sayısı 6’ya ulaşmadan hep aynı uzaklıkta kalsa bu da “yaklaşmak” sayılır mı? Dizilerde aynı belirsizliği ε - n_ε tanımıyla (Tanım 20.1) gidermiştik; burada da aynı yolu izleyeceğiz. Tek fark, “yeterince büyük n ” yerine “ a ’ya yeterince yakın x ” diyeceğimiz için indis eşiği n_ε yerine bir uzaklık eşiği δ kullanmamızdır.

27.2 Limitin ε - δ Tanımı

Aşağıdaki tanımda a noktasının, fonksiyonun tanım kümesi A ’nın bir **yığılma noktası** olması istenir (Tanım 17.1): a ’nın her delinmiş komşuluğunda A ’nın en az bir elemanı bulunmalıdır. Böylece “ a ’ya yaklaşan” x ’ler gerçekten vardır ve tanım boş bir koşula dönüşmez; bunun neden gerekli olduğunu tanımın hemen ardından açıklayacağız.

Tanım 27.1 (Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

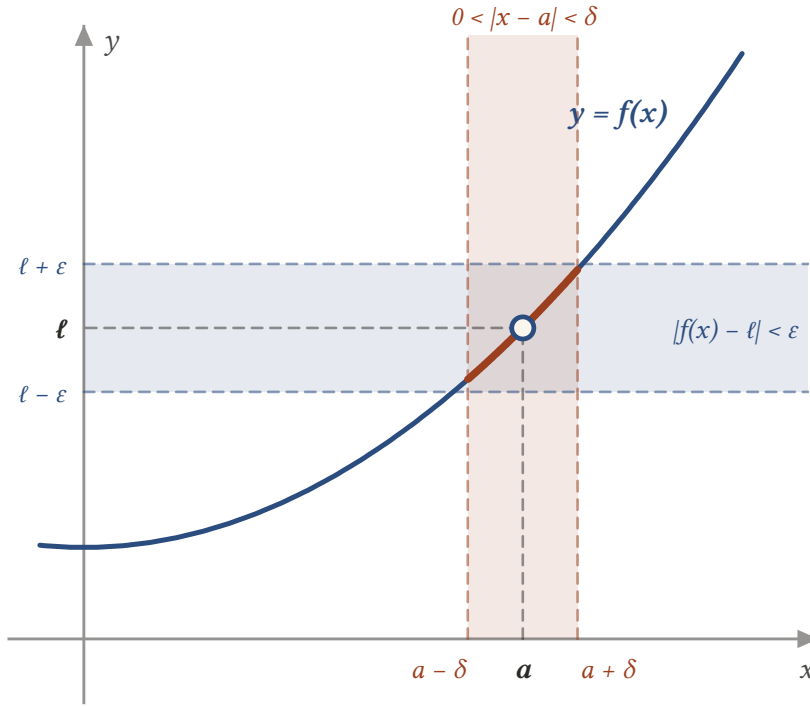
$$x \in A \text{ ve } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonunun a noktasındaki **limiti** (limit) ℓ sayıdır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ya da} \quad x \rightarrow a \text{ iken } f(x) \rightarrow \ell$$

yazılır. Niceleyicilerle:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



Şekil 27.1: Limit tanımının resmi: y ekseninde ℓ 'nin ε komşuluğu (yatay bant), x ekseninde a 'nın δ komşuluğu (düşey pencere). Pencerede a dışındaki her x için grafik banda düşer; a noktasının kendisi delinmiştir, $f(a)$ tanımlı olmasa da limit vardır. ε küçültülünce ona uygun yeni bir δ bulunmalıdır.

Tanımı komşuluk diliyle okuyalım (Tanım 15.1, Tanım 15.2). $0 < |x - a| < \delta$ koşulu, x 'in a 'nın δ yarı-çaplı **delinmiş** komşuluğunda olması demektir: $x \in B^*(a, \delta)$. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ koşulu ise $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$ demektir. Dolayısıyla tanım şöyle özetlenir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(A \cap B^*(a, \delta)) \subseteq B(\ell, \varepsilon).$$

Geometrik olarak: y -ekseninde ℓ çevresinde ne kadar dar bir $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ şeridi çizilirse çizilsin, x -ekseninde a çevresinde öyle bir $(a - \delta, a + \delta)$ penceresi bulunur ki bu pencerede (a 'nın kendisi dışında) grafiğin bütün noktaları şeridin içine düşer. ε küçüldükçe genellikle δ da küçülür; önemli olan, **her** ε için **bir** δ 'nın bulunabilmesidir. Niceleyicilerin sırası dizilerdeki gibi hayatidir: önce ε verilir, δ ona göre seçilir; δ, ε 'ye bağlı olabilir ama x 'e bağlı olamaz.

i Fonksiyonun a noktasındaki değeri limiti ilgilendirmez

Tanımdaki $0 < |x - a|$ koşulu $x = a$ durumunu dışarıda bırakır. Bu yüzden a noktasının A 'ya ait olması gerekmez; $a \in A$ olsa bile $f(a)$ değerinin ne olduğu limiti etkilemez. Sezgisel örneğimizde $f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 'dir; $1 \notin A$ ama 1 , A 'nın bir yığılma noktasıdır: **Örnek 17.1** gereği $1 \in (1, 2)'$ ve $(1, 2) \subseteq A$ olduğundan **Önerme 17.1** ile $1 \in A'$. Bu bölümde birazdan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$ olduğunu tanımdan ispatlayacağız. Öte yandan $g(x) = 3x + 3$ fonksiyonu 1 'de tanımlıdır ve $g(1) = 6$ 'dır; $h(x) = 3x + 3$ ($x \neq 1$), $h(1) = 100$ olarak tanımlanan fonksiyonun da 1 'deki limiti yine 6 'dır. Üç fonksiyonun 1 'deki limiti aynıdır, çünkü 1 'in dışında üçü de aynı fonksiyondur.

⚠ Neden yığılma noktası şart

a noktası A 'nın bir yığılma noktası olmasaydı ne olurdu? O zaman $B^*(a, \delta_0) \cap A = \emptyset$ olan bir $\delta_0 > 0$ bulunurdu. Bu δ_0 için " $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta_0$ " koşulunu sağlayan **hiçbir** x yoktur; dolayısıyla " $\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ " koşulu, ℓ ne olursa olsun, boş yere doğrudur. Yani $\delta = \delta_0$ seçimi her ε için ve **her** $\ell \in \mathbb{R}$ için işe yarar: fonksiyonun a 'daki limiti aynı anda $0, 1, \pi, -10^6$ olurdu. Böyle bir "limit" hiçbir bilgi taşımaz ve aşağıdaki teklik teoremi çöker.

Somut örnek: $A = [0, 1] \cup \{3\}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. 3 noktası A 'nın izole bir noktasıdır (Tanım 17.3): $B^*(3, 1) \cap A = \emptyset$. Bu yüzden $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ifadesi tanımsızdır; limit sorusu 3 noktasında sorulamaz. Buna karşılık $[0, 1]$ 'in her noktası, 0 ve 1 dâhil, A 'nın bir yığılma noktasıdır ve limit sorusu bu noktalarda anlamlıdır.

Tanımın olumsuzlamasını da yazalım; bir limitin **ne olmadığını** göstermek için buna ihtiyaç duyacağız. Teorem 2.1 gereği niceleyiciler yer değiştirir ve en içteki gerektirme olumsuzlanır:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \ell \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{ve} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Sözle: öyle bir "kötü" ε_0 vardır ki a 'ya ne kadar yaklaşırsak yaklaşıalım, f 'nin değeri ℓ 'den en az ε_0 uzakta kalan bir x hep bulunur. Dikkat: " f 'nin a 'da limiti **yoktur**" demek, bu olumsuzlamanın **her** $\ell \in \mathbb{R}$ için doğru olması demektir. Bunu doğrudan tanımla göstermek zahmetli olabilir; bir sonraki bölümde çok daha pratik iki ölçüt (dizisel ölçüt ve Cauchy ölçütü) geliştireceğiz.

27.3 Limitin Tekliği

Dizilerde olduğu gibi (Teorem 20.1) bir fonksiyonun bir noktada en çok bir limiti olabilir. İspat, iki farklı limit adayının arasındaki uzaklığın yarısını ε olarak seçme fikrine dayanır.

Teorem 27.1 (Limitin Tekliği). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve a , A 'nın bir yığılma noktası olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$ ise $\ell_1 = \ell_2$ 'dir.

İspat.

Olmayana ergi ile $\ell_1 \neq \ell_2$ varsayalım. O zaman $|\ell_1 - \ell_2| > 0$ 'dır ve

$$\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} > 0$$

seçebiliriz. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ olduğundan tanım gereği bu ε için öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon.$$

Benzer biçimde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$ olduğundan öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun; iki pozitif sayının küçüğü olarak $\delta > 0$ 'dır. Şimdi kritik adım: a , A 'nın bir yığılma noktası olduğundan $B^*(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$ 'dir; yani $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ olan **en az bir** x vardır. Bu x için $|x - a| < \delta \leq \delta_1$ ve $|x - a| < \delta \leq \delta_2$ olduğundan iki eşitsizlik birden sağlanır:

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon \quad \text{ve} \quad |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2) iki limit adayı arasındaki uzaklığı kestirelim:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| = |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ama $2\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|$ seçmiştik; buradan

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$$

çıkar ki bu bir çelişkidir (hiçbir sayı kendisinden kesin küçük olamaz). Öyleyse varsayımımız yanlıştır: $\ell_1 = \ell_2$.

■

Bu teorem sayesinde “ f ’nin a ’daki **limiti**” diyebilir ve ona $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ diye tek bir ad verebiliriz; limit bir sayı olarak hesaplanabilir, karşılaştırılabilir, üzerinde işlem yapılabilir. İspatta yığılma noktası varsayımının nerede kullanıldığına dikkat edelim: δ yarıçaplı delinmiş komşulukta A ’dan bir x bulabilmemiz tamamen bu varsayıma dayanır. Yukarıdaki uyarıda anlattığımız gibi, bu varsayım olmadan teorem yanlıştır.

27.4 Tanımdan Limit Hesaplama

Şimdi tanımı iş başında görelim. Her örnekte izlenen şablon aynıdır: keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilir, $|f(x) - \ell|$ ifadesi $|x - a|$ cinsinden yukarıdan sınırlanır, bu sınırı ε ’den küçük yapan bir δ seçilir ve son olarak seçilen δ ’nın gerçekten işe yaradığı doğrulanır.

Örnek 27.1 (Sabit Fonksiyonun Limiti). $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

Önce sorunun anlamlı olduğunu görelim: $\mathbb{R}$ açık bir kümedir (Teorem 15.1 (1)) ve açık bir kümenin her noktası o kümenin yığılma noktasıdır (Önerme 17.2); dolayısıyla her $a \in \mathbb{R}$ için limit sorusu anlamlıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = 1$ seçelim (aslında herhangi bir pozitif sayı olur). $0 < |x - a| < 1$ olan her x için

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Koşul sağlandı; tanım gereği $\lim_{x \rightarrow a} c = c$. Burada δ ’nın ε ’ye bağlı olmaması, sabit fonksiyonun “hiç hareket etmemesinin” yansımasıdır.

■

Örnek 27.2 (Birim Fonksiyonun Limiti). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \varepsilon$ seçelim. $0 < |x - a| < \delta$ olan her x için

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Demek ki her $\varepsilon > 0$ için uygun bir δ (burada $\delta = \varepsilon$) vardır; $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

■

Örnek 27.3 (Lineer Fonksiyonun Limiti). $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $0 < |x - 3| < \delta$ olan her x için $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ sağlanacak bir $\delta > 0$ arıyoruz.

Keşif (δ’yı bulma). Kontrol edeceğimiz ifadeyi $|x - 3|$ cinsinden yazalım:

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|.$$

Bunun ε ’den küçük olmasını istiyoruz:

$$4|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Öyleyse $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ seçmek doğal görünüyor; $\varepsilon > 0$ olduğundan $\delta > 0$ ’dır.

Doğrulama. $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ olsun ve $0 < |x - 3| < \delta$ olan bir x alalım. O zaman

$$|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\delta = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon/4$ tanımdaki koşulu sağlar; $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.

■

🔍 δ bulma reçetesi

Tanımdan limit ispatı iki aşamadan oluşur ve öğrencilerin çoğu ikinci aşamayı unuttur.

1. **Keşif.** $|f(x) - \ell|$ ifadesini cebirle $|x - a|$ cinsinden yukarıdan sınırlayın: $|f(x) - \ell| \leq K|x - a|$ biçiminde bir eşitsizlik hedefleyin. Çoğu zaman $|f(x) - \ell|$, $|x - a|$ ile “başka bir çarpanın” çarpımı olarak yazılır; o çarpanı sabit bir K ile sınırlamak için x 'i a 'ya yakın tutmak (örneğin $|x - a| < 1$ demek) gerekebilir. Sonra $K|x - a| < \varepsilon$ eşitsizliğini $|x - a|$ için çözün: $\delta = \varepsilon/K$.

2. **Doğrulama.** Bulduğunuz δ 'yı (gerekirse $\delta = \min\{1, \varepsilon/K\}$ biçiminde) ilan edin ve $0 < |x - a| < \delta$ varsayarak $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ eşitsizliğine adım adım ulaşın. İspat aslında yalnızca bu aşamadır; keşif aşaması karalama kâğıdında kalabilir.

δ tek değildir: δ işe yarıyorsa ondan küçük her pozitif sayı da işe yarar. Bu yüzden “en iyi” δ 'yı aramak gerekmez; işe yarayan herhangi biri yeter. Ayrıca δ , ε 'ye ve a 'ya bağlı olabilir, ama x 'e bağlı olamaz.

Şimdi bölümün başındaki sezgisel örneği kesinleştirelim.

Örnek 27.4 (Sadeleşen Kesrin Limiti). $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

$1 \notin A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ama 1, A 'nın bir yığılma noktasıdır: her $\varepsilon > 0$ için $1 + \varepsilon/2 \in B^*(1, \varepsilon) \cap A$. Dolayısıyla limit sorusu anlamlıdır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in A$, yani $x \neq 1$ için

$$|f(x) - 6| = \left| \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} - 6 \right| = |3(x+1) - 6| = |3x - 3| = 3|x - 1|.$$

Sadeleştirme yapabilmemizin tek nedeni $x \neq 1$ olmasıdır; tanımdaki $0 < |x - 1|$ koşulu tam da bunu güvence altına alır. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ seçelim. $x \in A$ ve $0 < |x - 1| < \delta$ ise

$$|f(x) - 6| = 3|x - 1| < 3\delta = \varepsilon.$$

Öyleyse $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{x-1} = 6$.

■

Buraya kadarki örneklerde $|f(x) - \ell|$ doğrudan $|x - a|$ 'nın sabit bir katıydı. Aşağıdaki örneklerde araya x 'e bağlı bir çarpan girer; onu sınırlamak için δ 'yı önce 1'den (ya da başka uygun bir sayıdan) küçük tutarız.

Örnek 27.5 (Kare Fonksiyonunun Limiti). Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Kontrol edilecek ifadeyi çarpanlarına ayırılım (Teorem 8.1 ile $|uv| = |u| |v|$):

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|.$$

$|x - a|$ çarpanını δ ile küçültebiliriz; sorun $|x + a|$ çarpanıdır, çünkü x 'e bağlıdır. Ama x , a 'ya yakınsa $|x + a|$ da $2|a|$ 'ya yakındır. Bunu kesinleştirelim: $|x - a| < 1$ ise üçgen eşitsizliğiyle

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|.$$

Dolayısıyla $|x - a| < 1$ olduğu sürece

$$|x^2 - a^2| \leq (2|a| + 1)|x - a|.$$

Sağ tarafın ε 'den küçük olması için $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ yeter. İki koşulu birden sağlamak üzere

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1} \right\}$$

seçelim; $\delta > 0$ 'dır. **Doğrulama:** $0 < |x - a| < \delta$ olsun. $\delta \leq 1$ olduğundan $|x - a| < 1$, dolayısıyla $|x + a| < 2|a| + 1$; ve $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ olduğundan

$$|x^2 - a^2| = |x - a| |x + a| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1} \cdot (2|a|+1) = \varepsilon.$$

Böylece $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$. ■

i Paydadaki +1 ne için

$\delta = \varepsilon/(2|a|)$ seçseydik $a = 0$ için δ tanımsız olurdu. $2|a| + 1$ yazmak hem bu sorunu giderir hem de $|x + a| < 2|a| + 1$ sınırıyla tam uyuşur. Genel ilke: δ 'nın paydasında sıfır olabilecek bir ifade bırakmayın.

Örnek 27.6 (Karekök Fonksiyonunun Limiti). $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. Her $a \geq 0$ için $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

Karekökün varlığını ve $\sqrt{x} \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$ özelliklerini Teorem 13.2'ten biliyoruz. $[0, \infty)$ 'un her noktası bu kümenin yığılma noktasıdır (0 dâhil: $1/n$ noktaları 0'a yığılır). İki durum ayıralım.

Durum $a > 0$. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \geq 0$ için “eşlenikle çarpma” hilesini kullanalım: $\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0$ olduğundan

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Paydada $\sqrt{x} \geq 0$ olduğundan $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$, yani

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

$\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ seçelim. (ε büyükse bu δ sayısı a 'dan da büyük çıkabilir, yani $0 < |x - a| < \delta$ koşulu tek başına x 'i pozitif tutmaz; bir sakıncası yoktur, çünkü tanım yalnızca $x \in A = [0, \infty)$ olan noktaları sınar ve yukarıdaki kestirim her $x \geq 0$ için geçerlidir. Tanımdaki $x \in A$ koşulu tam da bunun için vardır.) $x \geq 0$ ve $0 < |x - a| < \delta$ ise

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Durum $a = 0$. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x > 0$ için $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x}$ ve $\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$ (iki taraf da pozitif; kare alma sıralamayı korur, Önerme 7.12). $\delta = \varepsilon^2$ seçelim. $x \geq 0$ ve $0 < |x - 0| < \delta$, yani $0 < x < \varepsilon^2$ ise $\sqrt{x} < \varepsilon$.

Her iki durumda da $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. ■

$a = 0$ durumunda $\delta = \varepsilon^2$ çıkması dikkat çekicidir: $\varepsilon = 0,01$ için $\delta = 0,0001$. Karekök fonksiyonu 0 yakınında çok dik olduğundan, çıktıda küçük bir hata payı tutturmak için girdiyi çok daha sıkı kontrol etmek gerekir. δ ile ε arasındaki bu ilişki, ileride düzgün süreklilik konusunda önem kazanacaktır.

Örnek 27.7 (Ters Fonksiyonun Limiti). $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. Her $a \neq 0$ için $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $x \neq 0$ için

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a-x}{xa} \right| = \frac{|x-a|}{|x||a|}.$$

Sorun paydadaki $|x|$ 'tir: x sıfıra yaklaşırsa kesir patlar. Ama x, a 'ya yakinken x sıfırdan uzak kalır; bunu ters üçgen eşitsizliğiyle (Sonuç 8.3) kesinleştirelim. $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ ise

$$|x| = |a - (a-x)| \geq |a| - |x-a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2},$$

dolayısıyla $\frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|}$ ve

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{2}{|a|^2} |x-a| = \frac{2}{a^2} |x-a|.$$

Sağ tarafın ε 'den küçük olması için $|x-a| < \frac{a^2\varepsilon}{2}$ yeter. Öyleyse

$$\delta = \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{a^2\varepsilon}{2} \right\}$$

seçelim; $a \neq 0$ olduğundan $\delta > 0$ 'dır. **Doğrulama:** $0 < |x-a| < \delta$ olsun. $\delta \leq |a|/2$ olduğundan $|x| > |a|/2$ (özellikle $x \neq 0$, yani x tanım kümesindedir) ve

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a^2} |x-a| < \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Böylece $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

i Örneklerin ortak deseni

Kare, karekök ve ters fonksiyon örneklerinde δ , iki sayının minimumu olarak çıktı: birincisi x 'i a 'nın “güvenli” bir komşuluğunda tutar ($|x+a|$ 'yı sınırlamak, x 'i sıfırdan uzak tutmak gibi), ikincisi asıl ε kontrolünü sağlar. Bu desen, bir sonraki bölümlerde limitin cebirsel özelliklerini ispatlarken de karşımıza çıkacak; orada aynı hesapları bir kez genel olarak yapıp bir daha tekrarlamayacağız.

Son olarak olumsuzlamanın nasıl kullanıldığını bir örnekte görelim.

Örnek 27.8 (Bir Limitin Belirli Bir Sayı Olmadığını Gösterme). $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{x}$ olsun (bu, işaret fonksiyonunun 0 dışındaki kısıtlamasıdır, Tanım 7.6). $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x > 0$ için $f(x) = 1$, $x < 0$ için $f(x) = -1$ 'dir. Olumsuzlamaya göre öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ bulmalıyız ki her $\delta > 0$ için $0 < |x| < \delta$ ve $|f(x) - 1| \geq \varepsilon_0$ olan bir x var olsun.

$\varepsilon_0 = 1$ seçelim. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olsun. $x = -\frac{\delta}{2}$ alalım: $x \neq 0$ ve $|x| = \frac{\delta}{2} < \delta$ 'dır, yani x delinmiş komşuluktur. Ama $x < 0$ olduğundan $f(x) = -1$ ve

$$|f(x) - 1| = |-1 - 1| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

δ keyfi olduğundan olumsuzlama sağlanır: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1$. Aynı yolla $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq -1$ de gösterilir ($x = \delta/2$ alınır). Peki başka bir ℓ limit olabilir mi? Alistirmalarda bu fonksiyonun 0'da **hiçbir** limiti olmadığını göstereceğiz; sonraki bölümde ise aynı sonuç tek satırda çıkacak.

27.5 Alıştırmalar

Alıştırma 27.1 (Fonksiyon Limiti Alıştırmaları).

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu tanımdan gösteriniz.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$ olduğunu tanımdan gösteriniz.
 c) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ olduğunu tanımdan gösteriniz.
 d) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ için $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ olduğunu gösteriniz.
 e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasında limiti olmadığını, yani **her** $\ell \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \ell$ olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.

a) $\varepsilon > 0$ verilsin. $|(3x + 1) - 7| = |3x - 6| = 3|x - 2|$. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ seçelim. $0 < |x - 2| < \delta$ ise $|(3x + 1) - 7| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$. Öyleyse $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

b) $\varepsilon > 0$ verilsin. Küp farkı özdeşliğiyle

$$|x^3 - 1| = |x - 1| \cdot |x^2 + x + 1|.$$

İkinci çarpanı sınırlayalım: $|x - 1| < 1$ ise $0 < x < 2$, dolayısıyla $x^2 + x + 1 > 0$ ve $x^2 + x + 1 < 4 + 2 + 1 = 7$; yani $|x^2 + x + 1| < 7$. Öyleyse $|x - 1| < 1$ iken $|x^3 - 1| < 7|x - 1|$. $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ seçelim. $0 < |x - 1| < \delta$ ise $|x - 1| < 1$ ve

$$|x^3 - 1| < 7|x - 1| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$.

c) $\varepsilon > 0$ verilsin. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) her x için $||x| - |a|| \leq |x - a|$ verir. $\delta = \varepsilon$ seçelim. $0 < |x - a| < \delta$ ise

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Öyleyse $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$.

d) $2 \notin A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ama 2, A 'nın yığılma noktasıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \neq 2$ için

$$f(x) - 4 = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 = (x+2) - 4 = x - 2,$$

dolayısıyla $|f(x) - 4| = |x - 2|$. $\delta = \varepsilon$ seçelim. $x \neq 2$ ve $0 < |x - 2| < \delta$ ise $|f(x) - 4| = |x - 2| < \varepsilon$. Öyleyse $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Sadeleştirmenin yalnızca $x \neq 2$ için geçerli olduğuna ve tanımın tam da bu x 'leri incelediğine dikkat ediniz.

e) $\ell \in \mathbb{R}$ herhangi bir sayı olsun. $\varepsilon_0 = 1$ seçelim ve $\delta > 0$ keyfi olsun. Delinmiş komşulukta iki nokta alalım: $x_1 = \frac{\delta}{2}$ ve $x_2 = -\frac{\delta}{2}$; ikisi de $0 < |x_i| < \delta$ sağlar ve $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$ 'dir. Üçgen eşitsizliğiyle

$$2 = |1 - (-1)| = |(1 - \ell) + (\ell - (-1))| \leq |1 - \ell| + |-1 - \ell| = |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell|.$$

Toplamı en az 2 olan iki negatif olmayan sayıdan en az biri 1'den küçük olamaz (ikisi de 1'den küçük olsaydı toplamı 2'den küçük olurdu); yani $|f(x_1) - \ell| \geq 1$ ya da $|f(x_2) - \ell| \geq 1$. Hangisi doğruysa o x_i , olumsuzlamanın istediği noktadır: $0 < |x_i - 0| < \delta$ ve $|f(x_i) - \ell| \geq \varepsilon_0$. δ keyfi olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \ell$; ℓ de keyfi olduğundan f 'nin 0'da limiti yoktur.

Sezgisel açıklama: 0'a sağdan yaklaşırken f değerleri 1'e, soldan yaklaşırken -1 'e yapışır; tek bir ℓ her iki tarafa da 1'den yakın olamaz, çünkü 1 ile -1 arasındaki uzaklık 2'dir.

■

ε - δ tanımı bir limitin **var olduğunu** ispatlamanın standart yoludur; ama son alıştırmada gördüğümüz gibi, bir limitin **olmadığını** göstermek için her ℓ ile ayrı ayrı uğraşmak gerekir ve bu zahmetlidir. Diziler bölümünde geliştirdiğimiz bütün araçları fonksiyon limitlerine aktaran çok daha güçlü bir köprü vardır: bir fonksiyonun limiti, a 'ya yakınsayan **dizilerin** görüntü dizileriyle karakterize edilebilir. Bu köprü ve

limit değerini bilmeden varlığını sınavan Cauchy ölçütü bir sonraki bölümün konusudur: [Limit için Dizisel Ölçüt ve Cauchy Ölçütü](#).

28. Limit için Dizisel Ölçüt ve Cauchy Ölçütü

Önceki bölümde limiti ε - δ tanımıyla kurduk ve tanımın bir limitin **var olduğunu** ispatlamak için elverişli, ama bir limitin **olmadığını** göstermek için hantal olduğunu gördük. Bu bölümde iki yeni araç geliştiriyoruz. İlki, Eduard Heine'nin adıyla anılan **dizisel ölçüt** (sequential criterion), sürekli değişen bir x yerine adım adım ilerleyen dizilerle çalışmamızı sağlar: bir fonksiyonun a 'daki limiti, a 'ya yakınsayan bütün dizilerin görüntü dizileriyle belirlenir. Böylece diziler için ispatladığımız her teorem, fonksiyon limitleri için de bir teoreme dönüşür ve limitin olmadığını göstermek çoğu zaman iki dizi bulmaya indirgenir. İkincisi, dizilerdeki Cauchy ölçütünün ([Teorem 26.3](#)) fonksiyon sürümü olan **Cauchy ölçütü** (Cauchy criterion), limitin değerini bilmeden var olup olmadığını sınamaya yarar.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: dizisel ölçüt ve iki yönlü ispatı; limitin var olmadığını gösteren dizisel ölçüt sonucu ve $\sin(1/x)$ ile Dirichlet fonksiyonu örnekleri; dizisel ölçütle limit hesabı; fonksiyonlar için Cauchy ölçütü, ispatındaki “karışık dizi” hilesi ve olumsuzlamasıyla taban fonksiyonunun tam sayılardaki limitinin olmaması.

28.1 Dizisel Ölçüt (Heine Ölçütü)

Bir fonksiyonun a noktasındaki limiti, x 'in a 'ya “her yoldan” yaklaşmasını hesaba katar. Bir dizi ise a 'ya belirli bir yoldan, adım adım yaklaşır. Aşağıdaki teorem bu iki bakışın aynı şeyi ölçtüğünü söyler: x 'in her yoldan yaklaşmasını, a 'ya yakınsayan **bütün** dizileri düşünerek yakalayabiliriz.

Teorem 28.1 (Dizisel Ölçüt (Heine Ölçütü)). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a , A 'nın bir yığılma noktası olsun. Şu iki ifade denktir:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
2. $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan **her** (x_n) dizisi için görüntü dizisi $(f(x_n))$, ℓ 'ye yakınsar.

Kısaca:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A \setminus \{a\} : (x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell).$$

Buradaki $(x_n) \subseteq A \setminus \{a\}$ yazımı yerleşik bir kısaltmadır: bir dizi küme değildir, kastedilen “dizinin **bütün** terimleri $A \setminus \{a\}$ içindedir”dir.

İspat.

($\Rightarrow$ **yönü.**) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun ve (x_n) , $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan herhangi bir dizi olsun. $f(x_n) \rightarrow \ell$ olduğunu, yani her $\varepsilon > 0$ için bir eşikten sonra $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ verilsin. Fonksiyon limitinin tanımı ([Tanım 27.1](#)) gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Şimdi bu δ 'yı dizi için bir “ ε ” gibi kullanalım: $x_n \rightarrow a$ olduğundan dizi limitinin tanımı ([Tanım 20.1](#)) gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için $|x_n - a| < \delta$. Ayrıca $x_n \in A \setminus \{a\}$ olduğundan $x_n \in A$ ve $x_n \neq a$, yani $0 < |x_n - a|$. İkisini birleştirirsek her $n \geq N$ için

$$x_n \in A \quad \text{ve} \quad 0 < |x_n - a| < \delta,$$

dolayısıyla $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Bu tam olarak $f(x_n) \rightarrow \ell$ demektir.

($\Leftarrow$ **yönü.**) $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan her dizinin görüntü dizisi ℓ 'ye yakınsasın. Olmayana ergi ile $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \ell$ varsayalım. Önceki bölümde yazdığımız olumsuzlama gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için

$$x \in A, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{ve} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$$

olan bir x bulunur. Bu δ 'yı sırayla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ alalım: her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{n}$ seçildiğinde öyle bir $x_n \in A$ vardır ki

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Böylece bir (x_n) dizisi kurduk. Özelliklerini inceleyelim.

Dizi $A \setminus \{a\}$ içindedir: her $x_n \in A$ ve $0 < |x_n - a|$ olduğundan $x_n \neq a$.

Dizi a 'ya yakınsar: $\varepsilon > 0$ verilsin. Arşimet özelliği (Sonuç 12.2) gereği $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq N$ için

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Demek ki $x_n \rightarrow a$.

O hâlde hipotez gereği $f(x_n) \rightarrow \ell$ olmalıdır. Ama bu, ε_0 için öyle bir N' olmasını gerektirir ki her $n \geq N'$ için $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon_0$; oysa kurduğumuz dizide her n için $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ 'dır. Çelişki. Öyleyse varsayımımız yanlıştır ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

i Böyle diziler gerçekten vardır

Teoremin ikinci ifadesi " $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan her dizi" der. Böyle dizilerin var olduğunu bilmek önemlidir; aksi hâlde koşul boş yere sağlanırdı. a , A 'nın yığılma noktası olduğundan her n için $B^*(a, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ 'dir (Tanım 17.1); her birinden bir x_n seçersek, ispatın ikinci yarısındaki hesaplama $x_n \rightarrow a$ olan ve $A \setminus \{a\}$ içinde kalan bir dizi elde ederiz. Yığılma noktası koşulu burada da tam bu iş için gereklidir.

Teoremin gücü şuradadır: dizilerde ispatladığımız her sonuç, artık fonksiyon limitleri için de bedavadır. Limitin tekliği bunun ilk örneğidir; dizi limiti tek olduğundan (Teorem 20.1) fonksiyon limiti de tektir – bu, Teorem 27.1'nin ikinci bir ispatıdır. Ama en sık kullanılan sonuç, limitin **olmadığını** göstermeye yarayan şu ölçüttür.

Sonuç 28.1 (Limitin Olmadığını Gösteren Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve a , A 'nın bir yığılma noktası olsun. Aşağıdakilerden biri sağlanıyorsa f 'nin a noktasında limiti **yoktur**:

1. $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan öyle iki $(x_n), (y_n)$ dizisi vardır ki $f(x_n) \rightarrow \ell_1, f(y_n) \rightarrow \ell_2$ ve $\ell_1 \neq \ell_2$.
2. $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan öyle bir (x_n) dizisi vardır ki $(f(x_n))$ görüntü dizisi ıraksaktır.

İspat.

Olmayana ergi ile $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olan bir $\ell \in \mathbb{R}$ bulunduğunu varsayalım.

Durum 1'de Teorem 28.1 ($\Rightarrow$ yönü) gereği hem $f(x_n) \rightarrow \ell$ hem $f(y_n) \rightarrow \ell$ olmalıdır. Dizi limiti tek olduğundan (Teorem 20.1) $\ell_1 = \ell$ ve $\ell_2 = \ell$, yani $\ell_1 = \ell_2$; bu, $\ell_1 \neq \ell_2$ ile çelişir.

Durum 2'de yine Teorem 28.1 gereği $f(x_n) \rightarrow \ell$ olmalıdır; oysa $(f(x_n))$ ıraksaktır. Çelişki.

Her iki durumda da böyle bir ℓ yoktur.

🔗 Hangi araç ne zaman

Bir limitin **var olduğunu** ve değerini ispatlamak için ε - δ tanımı ya da (birazdan göreceğimiz gibi) dizisel ölçütü dizi teoremleri kullanılır. Bir limitin **olmadığını** göstermek içinse dizisel ölçüt çok daha pratiktir: a 'ya yaklaşan ama görüntüleri farklı yerlere giden iki dizi bulmak yeter. Önceki bölümün son alıştırmasında $|x|/x$ için uzun uzun uğraştığımız iş, şimdi iki satırdır: $x_n = 1/n \rightarrow 0$ için $f(x_n) = 1 \rightarrow 1, y_n = -1/n \rightarrow 0$ için $f(y_n) = -1 \rightarrow -1; 1 \neq -1$, limit yoktur.

Önce ölçütün "olumlu" kullanımına, yani bir limiti dizi teoremleriyle hesaplamaya bir örnek verelim.

Örnek 28.1 (Dizisel Ölçüt ile Limit Hesabı). $A = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$ olsun ($x = -3$ 'te payda sıfır olduğundan fonksiyon orada tanımsızdır; 2, A 'nın bir yığılma noktasıdır). Dizisel ölçüt ile $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(x_n) , $A \setminus \{2\}$ içinde 2'ye yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Teorem 28.1 gereği $f(x_n) \rightarrow 1$ olduğunu göstermek yeter. Limit aritmetiği (Teorem 21.1) dizilere uygulanır:

$$x_n \rightarrow 2 \Rightarrow x_n^2 = x_n \cdot x_n \rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x_n^2 + 1 \rightarrow 5,$$

$$x_n \rightarrow 2 \Rightarrow x_n + 3 \rightarrow 5.$$

Bölüm kuralının iki koşulu da sağlanır: payda dizisinin limiti $5 \neq 0$ 'dır ve her n için $x_n \in A$, yani $x_n \neq -3$ olduğundan $x_n + 3 \neq 0$ 'dır. Öyleyse

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 + 1}{x_n + 3} \rightarrow \frac{5}{5} = 1.$$

Dizi keyfi olduğundan dizisel ölçüt $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ verir. Hiç δ aramadık; bütün ε - δ işini dizi teoremleri bizim yerimize yaptı.

■

i Limit aritmetiğini dizilerden aktarma

Örnekteki akıl yürütme geneldir. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ise, a 'ya yakınsayan her (x_n) için $f(x_n) \rightarrow \ell$ ve $g(x_n) \rightarrow m$ 'dir; dizi aritmetiği $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell + m$ ve $f(x_n)g(x_n) \rightarrow \ell m$ verir; dizisel ölçüt de bunu $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + m$ ve $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell m$ diye geri çevirir. Bir sonraki bölümde bu sonuçları ε - δ ile de ispatlayacağız (Teorem 29.2); dizisel ispatı bölüm sonu alıştırmasında yazacağız.

Şimdi ölçütün asıl ünlü olduğu “olumsuz” kullanımına geçelim.

i Trigonometrik fonksiyonlar hakkında

Aşağıdaki örnekte $\sin$ fonksiyonunun liseden bilinen özelliklerini kullanıyoruz: $\sin$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır, $|\sin t| \leq 1$ 'dir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = -1$ 'dir. Bu fonksiyonların kesin tanımı Analiz 2'de kuvvet serileriyle yapılır; burada yalnızca örnek amacıyla kullanılırlar.

Örnek 28.2 (Sinüs Bir Bölü x Fonksiyonu). $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

0, tanım kümesi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'ın yığılma noktasıdır. Sonuç 28.1 (1) gereği 0'a yakınsayan ama görüntüleri farklı limitlere giden iki dizi bulmak yeter. Fikir: $\sin$ değerinin 1 olduğu yerleri ve -1 olduğu yerleri ayrı ayrı yakalayan diziler seçmek.

Adım 1: Görüntüsü hep 1 olan dizi. $\sin \theta = 1$ olması için $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ alınabilir. $\frac{1}{x_n}$ bu değere eşit olsun:

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Her $x_n > 0$, dolayısıyla $x_n \in A \setminus \{0\}$. Payda $+\infty$ 'a ıraksar: $2\pi > 1$ olduğundan her n için $\frac{\pi}{2} + 2n\pi > n$ 'dir ve $n \rightarrow +\infty$ olduğundan (Örnek 22.1 (a)) Teorem 22.4 gereği $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty$. Pozitif terimli dizide ters alma (Teorem 22.3) $x_n \rightarrow 0$ verir. Görüntü dizisi:

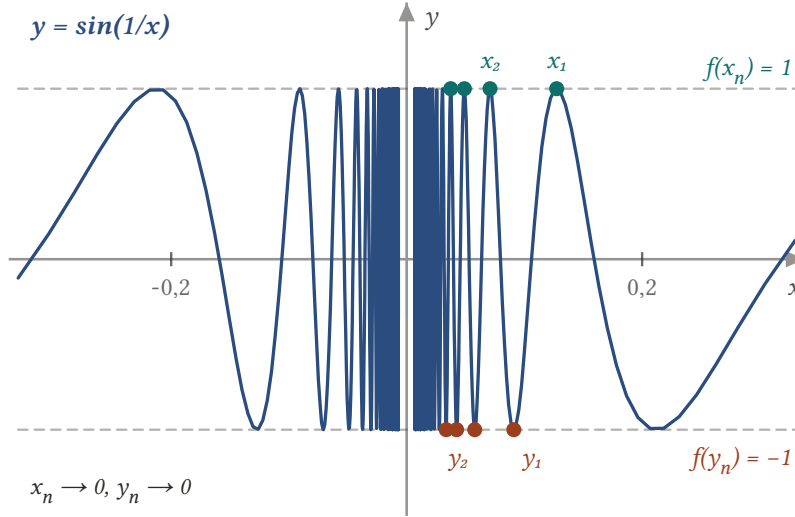
$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 1.$$

Adım 2: Görüntüsü hep -1 olan dizi. $\sin \theta = -1$ olması için $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ alınabilir:

$$y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aynı gerekçeyle $y_n \in A \setminus \{0\}$ ve $y_n \rightarrow 0$; görüntü dizisi

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \Rightarrow f(y_n) \rightarrow -1.$$



Şekil 28.1: $y = \sin(1/x)$ grafiği 0'a yaklaşıırken gitgide sıklaşan salınımlar yapar; her salınımda -1 ile 1 arasındaki bütün değerleri alır. x_n noktalarında değer hep 1 , y_n noktalarında hep -1 'dir. İki dizi de 0'a gider ama görüntüleri farklı limitlere gittiğinden $x \rightarrow 0$ iken limit yoktur.

Adım 3: Sonuç. $x_n \rightarrow 0$ ve $y_n \rightarrow 0$ ama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

Sonuç 28.1 gereği $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ yoktur. Grafik bunu görünür kılar: x sifıra yaklaştıkça $1/x$ sonsuza gider ve $\sin(1/x)$, -1 ile 1 arasında giderek sıklaşan salınımlar yapar; tek bir sayıya yerleşmez.

■

Aynı yöntem, hiçbir noktada limiti olmayan bir fonksiyon örneği verir. Bu fonksiyon, Alman matematikçi Peter Gustav Lejeune Dirichlet'in (1805–1859) adıyla anılır ve analizde “kötü davranışlı” fonksiyonların başlıca örneğidir.

Örnek 28.3 (Dirichlet Fonksiyonu). $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

$a \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. a 'ya yakınsayan, biri yalnızca rasyonel, öteki yalnızca irrasyonel sayılardan oluşan iki dizi kuracağız.

Adım 1: Rasyonel dizi. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a < a + \frac{1}{n}$ olduğundan rasyonel sayıların yoğunluğu (Teorem 13.5) gereği

$$a < q_n < a + \frac{1}{n}$$

olan bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. $q_n > a$ olduğundan $q_n \neq a$; yani $(q_n), \mathbb{R} \setminus \{a\}$ içindedir. $a \rightarrow a$ ve $a + \frac{1}{n} \rightarrow a$ olduğundan sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) $q_n \rightarrow a$ verir. Her q_n rasyonel olduğundan

$$D(q_n) = 1 \Rightarrow D(q_n) \rightarrow 1.$$

Adım 2: İrrasyonel dizi. Aynı biçimde irrasyonel sayıların yoğunluğu (Teorem 13.6) gereği her n için

$$a < r_n < a + \frac{1}{n}$$

olan bir $r_n \notin \mathbb{Q}$ vardır. Yine $r_n \neq a$, sıkıştırmayla $r_n \rightarrow a$ ve her r_n irrasyonel olduğundan

$$D(r_n) = 0 \Rightarrow D(r_n) \rightarrow 0.$$

Adım 3: Sonuç. $q_n \rightarrow a$, $r_n \rightarrow a$ ama $\lim D(q_n) = 1 \neq 0 = \lim D(r_n)$. Sonuç 28.1 gereği $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ yoktur. a keyfi olduğundan Dirichlet fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'nin hiçbir noktasında limiti yoktur. ■

Dirichlet fonksiyonunun grafiği çizilemez: her aralıkta hem 1 hem 0 değerini sonsuz kez alır. Bu örnek, “limit” kavramının grafiğe bakarak değil, tanımla ve ölçütlerle incelenmesi gerektiğinin en iyi kanıtıdır. Süreklilik bölümünde bu fonksiyonun hiçbir noktada sürekli olmadığını, ama $x \cdot D(x)$ fonksiyonunun yalnızca 0’da sürekli olduğunu göreceğiz; ikincisinin limit hâlini bölüm sonu alıştırmalarında inceleyeceğiz.

28.2 Cauchy Ölçütü

Dizilerde Cauchy ölçütü (Teorem 26.3), limitin değerini bilmeden yakınsaklığa karar vermemizi sağlıyordu: terimler birbirine yeterince yaklaşıyorsa dizi yakınsaktır. Fonksiyonlar için de benzer bir ölçüt vardır: a ’ya yakın noktalardaki fonksiyon değerleri **birbirine** yeterince yakınsa limit vardır. Önceki bölümde bir limitin varlığını göstermek için ℓ ’yi önceden tahmin etmek zorundaydık; bu ölçüt o zorunluluğu kaldırır.

Teorem 28.2 (Fonksiyon Limiti için Cauchy Ölçütü). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve a , A ’nın bir yığılma noktası olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limiti vardır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunur ki a ’nın δ yarıçaplı delinmiş komşuluğundaki A ’ya ait her x, x' çifti için $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ olur:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in A \cap B^*(a, \delta) : |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

İspat.

($\Rightarrow$ yönü.) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımını $\frac{\varepsilon}{2}$ için uygulayalım: öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ olan her x için $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Şimdi $x, x' \in A \cap B^*(a, \delta)$ herhangi iki nokta olsun; ikisi de bu koşulu sağlar. Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$|f(x) - f(x')| = |(f(x) - \ell) + (\ell - f(x'))| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cauchy koşulu sağlanır. ($\varepsilon/2$ seçmemizin nedeni, iki hatanın toplamının tam ε olmasıdır.)

($\Leftarrow$ yönü.) Cauchy koşulu sağlansın. Limitin var olduğunu dizisel ölçütle (Teorem 28.1) göstereceğiz; bunun için a ’ya yakınsayan her dizinin görüntü dizisinin **aynı** sayıya yakınsadığını kanıtlamalıyız. İspat üç adımdan oluşur.

Adım 1: Her görüntü dizisi Cauchy dizisidir. (x_n) , $A \setminus \{a\}$ içinde a ’ya yakınsayan herhangi bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve Cauchy koşulundaki $\delta > 0$ alınsın. $x_n \rightarrow a$ olduğundan öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için $|x_n - a| < \delta$; $x_n \neq a$ olduğundan aslında $0 < |x_n - a| < \delta$, yani $x_n \in A \cap B^*(a, \delta)$. O hâlde her $n, m \geq N$ için x_n ve x_m bu delinmiş komşuluktadır ve Cauchy koşulu

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

verir. Bu, $(f(x_n))$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması demektir (Tanım 26.1).

Adım 2: Her görüntü dizisi yakınsaktır. $\mathbb{R}$ 'de her Cauchy dizisi yakınsaktır (Teorem 26.3). Öyleyse $(f(x_n))$ bir L sayısına yakınsar. Ama dikkat: bu L , şimdilik seçtiğimiz (x_n) dizisine bağlı olabilir. Dizisel ölçütü uygulayabilmek için bütün dizilerin aynı L 'yi vermesi gerekir.

Adım 3: Limit diziden bağımsızdır (karışık dizi hilesi). (x_n) ve (y_n) , $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan iki dizi olsun; Adım 2 gereği $f(x_n) \rightarrow L$ ve $f(y_n) \rightarrow L'$ diyelim. İki diziyi dönüşümlü olarak iç içe geçirelim:

$$(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots), \quad z_{2k-1} = x_k, \quad z_{2k} = y_k.$$

Her z_n , $A \setminus \{a\}$ içindedir. (z_n) 'nin tek indisli alt dizisi (x_k) ve çift indisli alt dizisi (y_k) aynı a limitine yakınsadığından Teorem 24.2 gereği $z_n \rightarrow a$. Öyleyse Adım 1-2, (z_n) 'ye de uygulanır: $(f(z_n))$ bir L'' sayısına yakınsar. Şimdi $(f(x_k)) = (f(z_{2k-1}))$ dizisi $(f(z_n))$ 'nin bir alt dizisidir; yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limite yakınsadığından (Teorem 24.1) $f(x_k) \rightarrow L''$. Dizi limiti tek olduğundan (Teorem 20.1) $L = L''$. Aynı biçimde $(f(y_k)) = (f(z_{2k}))$ de $(f(z_n))$ 'nin alt dizisidir, dolayısıyla $L' = L''$. Sonuç: $L = L'$.

Demek ki a 'ya yakınsayan her dizinin görüntü dizisi aynı L sayısına yakınsar. (a yığılma noktası olduğundan böyle en az bir dizi vardır, dolayısıyla L gerçekten tanımlıdır.) Dizisel ölçütün $(\Leftrightarrow)$ yönü $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ verir; limit vardır.

■

Teoremin değeri, limitin değerini hiç anmamasıdır: sağ taraftaki koşulda ℓ geçmez. Bu, dizilerdeki Cauchy ölçütünün fonksiyonlara yansımaları ve ispatın kalbi de yine reel sayıların tamlığıdır (Adım 2). Uygulamada teoremin en sık kullanılan biçimi olumsuzlamasıdır.

Sonuç 28.2 (Limitin Olmadığını Gösteren Cauchy Ölçütü). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve a , A 'nın bir yığılma noktası olsun. Öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ varsa ki her $\delta > 0$ için a 'nın δ yarıçaplı delinmiş komşuluğunda görüntüleri en az ε_0 uzak olan iki nokta bulunuyorsa, yani

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, x'_\delta \in A \cap B^*(a, \delta) : \quad |f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

ise f 'nin a noktasında limiti yoktur.

İspat.

Verilen ifade, Teorem 28.2'deki Cauchy koşulunun Teorem 2.1 ile alınmış olumsuzlamasıdır: " $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x, x' (\dots < \varepsilon)$ " ifadesinin olumsuzu " $\exists \varepsilon_0 \forall \delta \exists x, x' (\dots \geq \varepsilon_0)$ "dır. Cauchy koşulu sağlanmadığından, teoremin "ancak ve ancak" kısmı gereği limit yoktur.

■

Sözle: öyle bir "kötü uzaklık" ε_0 vardır ki a 'ya ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım, fonksiyon değerleri birbirinden en az ε_0 uzak kalan iki nokta hep bulunur. Bu ölçütü ve dizisel ölçütü aynı örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek 28.4 (Taban Fonksiyonunun Tam Sayılarda Limiti Yoktur). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ taban fonksiyonu olsun (Tanım 12.1). Her $k \in \mathbb{Z}$ için $\lim_{x \rightarrow k} \lfloor x \rfloor$ limitinin var olmadığını iki yöntemle gösteriniz.

Çözüm.

Önce hatırlatma: Teorem 12.3 gereği $\lfloor x \rfloor$, $p \leq x < p+1$ koşulunu sağlayan tek $p \in \mathbb{Z}$ sayısıdır. Dolayısıyla $k \leq x < k+1$ ise $\lfloor x \rfloor = k$, $k-1 \leq x < k$ ise $\lfloor x \rfloor = k-1$ 'dir. k noktasının $\mathbb{R}$ 'nin yığılma noktası olduğu açıktır.

Yöntem 1: Cauchy ölçütüyle. Sonuç 28.2'yi uygulayacağız. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ seçelim. $\delta > 0$ keyfi olsun. Delinmiş komşulukta kalmak ve aynı zamanda tam sayı sınırlarını aşmamak için

$$\eta = \frac{\min\{\delta, 1\}}{2}$$

alalım; $0 < \eta < \delta$ ve $\eta < 1$ 'dir. İki nokta seçelim:

- $x_\delta = k + \eta$: $|x_\delta - k| = \eta < \delta$, ve $k < x_\delta < k+1$ olduğundan $f(x_\delta) = k$.
- $x'_\delta = k - \eta$: $|x'_\delta - k| = \eta < \delta$, ve $k-1 < x'_\delta < k$ olduğundan $f(x'_\delta) = k-1$.

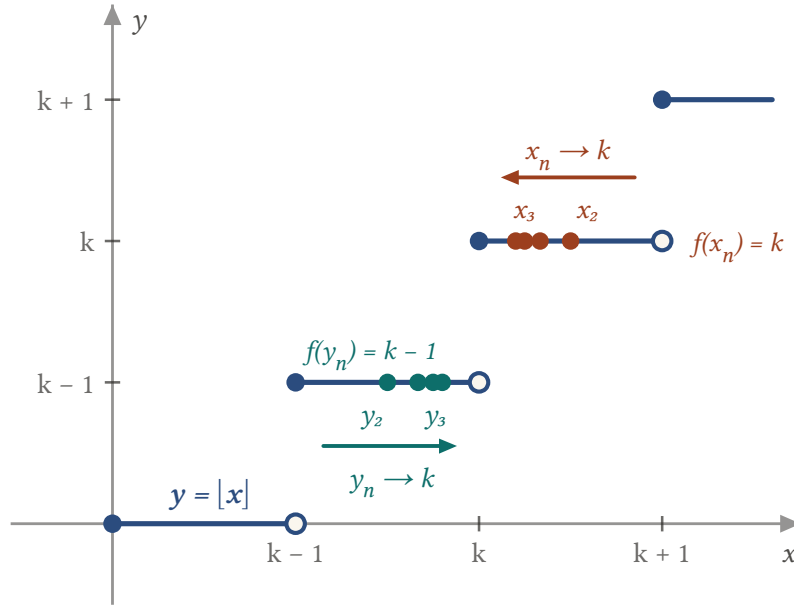
İkisi de $B^*(k, \delta)$ içindedir ve görüntüleri arasındaki uzaklık

$$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| = |k - (k - 1)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

δ keyfi olduğundan Cauchy koşulu sağlanmaz; **Sonuç 28.2** gereği limit yoktur.

Yöntem 2: Dizisel ölçüt. **Sonuç 28.1** (1)'i uygulayacağız; k 'ya sağdan ve soldan yaklaşan iki dizi seçelim.

Sağdan yaklaşan dizi: $x_n = k + \frac{1}{n}$. Her n için $x_n \neq k$ ve $x_n \rightarrow k$ (**Örnek 20.1** ve limit aritmetiği). $n \geq 1$ için $k < x_n \leq k + 1$, hatta $n \geq 2$ için $k < x_n < k + 1$; dolayısıyla $n \geq 2$ için $f(x_n) = k$ ve $f(x_n) \rightarrow k$ (sonlu tane başlangıç terimi limiti etkilemez: $(f(x_n))$ dizisinin 1-kuyruğu sabit k dizisidir, **Teorem 24.3**).
Soldan yaklaşan dizi: $y_n = k - \frac{1}{n}$. Yine $y_n \neq k$ ve $y_n \rightarrow k$. Her $n \geq 1$ için $k - 1 \leq y_n < k$, dolayısıyla $f(y_n) = k - 1$ ve $f(y_n) \rightarrow k - 1$.



Şekil 28.2: Taban fonksiyonunun k tam sayısı yakınındaki grafiği. Sağdan yaklaşan $x_n = k + 1/n$ dizisinde değerler hep k , soldan yaklaşan $y_n = k - 1/n$ dizisinde hep $k - 1$ 'dir. İki dizi de k 'ya gittiği hâlde görüntüleri farklı yerlere gider; dizisel ölçüt gereği k 'da limit yoktur.

Sonuç: $x_n \rightarrow k$, $y_n \rightarrow k$ ama $\lim f(x_n) = k \neq k - 1 = \lim f(y_n)$. **Sonuç 28.1** gereği $\lim_{x \rightarrow k} [x]$ yoktur. İki yöntem aynı olguyu iki dille anlatır: k 'nın hemen sağında fonksiyon k , hemen solunda $k - 1$ değerini alır; aradaki 1 birimlik sıçrama, hangi δ seçilirse seçilsin kapanmaz.

i Tam sayı olmayan noktalarda taban fonksiyonu

$a \notin \mathbb{Z}$ ise $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ 'dır: $p = [a]$ için $p < a < p + 1$ olduğundan $\delta = \min\{a - p, p + 1 - a\} > 0$ seçilirse $|x - a| < \delta$ olan her x yine $(p, p + 1)$ aralığında kalır ve $[x] = p$ olur; bu, sabit fonksiyon örneğindeki gibi (bkz. **Örnek 27.1**) limiti p yapar. Yani taban fonksiyonu yalnızca tam sayılarda "kötü"dür. Tek yönlü limitler bölümünde k 'da sağdan limitin k , soldan limitin $k - 1$ olduğunu kesin olarak ifade edeceğiz.

28.3 Alıştırmalar

Alıştırma 28.1 (Dizisel Ölçüt ve Cauchy Ölçütü Alıştırmaları).

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ limitinin var olmadığını dizisel ölçütü gösteriniz. ($\cos(2n\pi) = 1$ ve $\cos((2n+1)\pi) = -1$ özelliklerini kullanabilirsiniz.)
- b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun 0'da limiti olmadığını Cauchy ölçütünün olumsuzlamasıyla gösteriniz.
- c) D Dirichlet fonksiyonu olmak üzere $g(x) = x \cdot D(x)$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ olduğunu, ama $a \neq 0$ için $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitinin var olmadığını gösteriniz.
- d) $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve a , A 'nın yığılma noktası olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ise $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + m$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell m$ olduğunu dizisel ölçütü ile ispatlayınız.
- e) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun 1'de limiti olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ve $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ alalım. İkisi de sıfırdan farklıdır. $2\pi > 1$ olduğundan her n için $2n\pi > n$ ve $(2n+1)\pi > n$ 'dir; $n \rightarrow +\infty$ olduğundan (Örnek 22.1 (a)) Teorem 22.4 gereği iki payda da $+\infty$ 'a ıraksar, dolayısıyla Teorem 22.3 gereği $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$. Görüntüler:

$$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \rightarrow 1, \quad \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos((2n+1)\pi) = -1 \rightarrow -1.$$

$1 \neq -1$ olduğundan Sonuç 28.1 gereği limit yoktur.

b) $\varepsilon_0 = 1$ seçelim ve $\delta > 0$ keyfi olsun. $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ ve $x'_\delta = -\frac{\delta}{2}$ noktaları $B^*(0, \delta)$ içindedir ve tanım kümesindedir. $f(x_\delta) = 1$, $f(x'_\delta) = -1$ olduğundan

$$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| = |1 - (-1)| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Sonuç 28.2 gereği f 'nin 0'da limiti yoktur. (Önceki bölümün son alıştırmasıyla karşılaştırınız: aynı sonuç, çok daha kısa.)

c) 0'daki limit. Her x için $D(x) \in \{0, 1\}$ olduğundan $|g(x)| = |x \cdot D(x)| \leq |x|$. Dizisel ölçütü: $(x_n), \mathbb{R} \setminus \{0\}$ içinde 0'a yakınsayan herhangi bir dizi olsun. $|g(x_n)| \leq |x_n|$ ve $|x_n| \rightarrow 0$ (Teorem 20.3); $0 \leq |g(x_n)| \leq |x_n|$ sıkıştırmasıyla (Teorem 21.6) $|g(x_n)| \rightarrow 0$, dolayısıyla $g(x_n) \rightarrow 0$ (sıfır limiti için mutlak değer denkliği, Önerme 20.3). Teorem 28.1 gereği $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Aynı sonuç ε - δ ile de bir satırdır: $\delta = \varepsilon$ alınırsa $0 < |x| < \delta$ için $|g(x) - 0| \leq |x| < \varepsilon$.

$a \neq 0$ 'daki limit. Örnek 28.3'ndeki dizileri kullanalım: $q_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \notin \mathbb{Q}$, ikisi de a 'dan farklı ve a 'ya yakınsak. O zaman

$$g(q_n) = q_n \cdot 1 = q_n \rightarrow a, \quad g(r_n) = r_n \cdot 0 = 0 \rightarrow 0.$$

$a \neq 0$ olduğundan görüntü limitleri farklıdır; Sonuç 28.1 gereği $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ yoktur. Demek ki g 'nin limiti yalnızca 0 noktasında vardır.

d) $(x_n), A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Dizisel ölçütün ($\Rightarrow$) yönü ile $f(x_n) \rightarrow \ell$ ve $g(x_n) \rightarrow m$. Dizilerde limit aritmetiği (Teorem 21.1) gereği

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell + m \quad \text{ve} \quad f(x_n)g(x_n) \rightarrow \ell m.$$

Yani $(f+g)(x_n) \rightarrow \ell + m$ ve $(fg)(x_n) \rightarrow \ell m$. Dizi keyfi olduğundan dizisel ölçütün ($\Leftarrow$) yönü $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \ell + m$ ve $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell m$ verir. Burada ε - δ hiç kullanılmadı; bütün yük dizi teoremlerine bindi.

e) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ alalım: $x_n \neq 1$ ve $x_n \rightarrow 1$. Görüntü dizisi

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1/n} = n$$

olup sınırsızdır; yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 20.2) $(f(x_n))$ ıraksaktır. Sonuç 28.1 (2) gereği $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur.

Cauchy ölçütüyle de görülebilir: $\varepsilon_0 = 1$ ve keyfi $\delta > 0$ için $\eta = \frac{\min\{\delta, 1\}}{2}$ alalım; $0 < \eta < \delta$ ve $\eta \leq \frac{1}{2}$ 'dir. $x_\delta = 1 + \eta$ ve $x'_\delta = 1 + \frac{\eta}{2}$ noktaları 1'den farklıdır, $B^*(1, \delta)$ içindedir ve

$$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| = \left| \frac{1}{\eta} - \frac{2}{\eta} \right| = \frac{1}{\eta} \geq 2 \geq 1 = \varepsilon_0.$$

δ keyfi olduğundan [Sonuç 28.2](#) gereği limit yoktur.

■

Bu bölümle birlikte fonksiyon limitleri için üç eşdeğer bakış açımız oldu: ε - δ tanımı, diziler ve Cauchy koşulu. Bundan sonra limitin “hesap kurallarını” kuracağız: limiti olan bir fonksiyon o noktanın yakınında sınırlıdır; toplam, çarpım ve bölümün limiti limitlerin toplamı, çarpımı ve bölümüdür; polinom ve rasyonel fonksiyonların limiti yerine koymayla bulunur; bileşke fonksiyonun limiti ise ek bir koşulla iç ve dış limitlerden hesaplanır. Bu bölümün alıştırmlarında dizisel ölçütle gördüğümüz sonuçların tam ε - δ ispatları ve daha fazlası için: [Limitin Özellikleri: Sınırlılık, Cebirsel İşlemler ve Bileşke](#).

29. Limitin Özellikleri: Sınırlılık, Cebirsel İşlemler ve Bileşke

Önceki iki bölümde fonksiyon limitini ε - δ diliyle tanımladık (Tanım 27.1) ve bu tanımla dizilere bağlayan dizisel ölçütü (Teorem 28.1) kanıtladık. Ancak elimizde hâlâ yalnızca “tanıma dönerek” limit hesaplayabildiğimiz birkaç örnek var. Bu bölümde limitin **genel özelliklerini** kuruyoruz: limiti olan bir fonksiyon o noktanın yakınında sınırlıdır; limitler toplama, çarpma ve bölmeyle uyumludur; polinomların ve rasyonel fonksiyonların limiti yerine koymayla bulunur; iki fonksiyonun bileşkesinin limiti, belirli bir ek koşul altında, “içeriden dışarıya” hesaplanır.

Bu sonuçların hemen hepsi, diziler için kanıtladığımız Teorem 20.2 ve Teorem 21.1 teoremlerinin birer kopyasıdır; ispatlar da aynı fikirle, n_ε yerine δ seçerek yürür. Bölüm boyunca $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a noktası A ’nın bir yığılma noktası, yani $a \in A'$ olacaktır (Tanım 17.1). Hatırlatalım: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ demek, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

olması demektir.

29.1 Nokta Yakınında Sınırlılık

Yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz (Teorem 20.2). Fonksiyonlar için bunun karşılığı şudur: fonksiyonun a ’da limiti varsa, a ’ya **yeterince yakın** noktalarda fonksiyon değerleri bir sabiti aşamaz. “Yeterince yakın” kaydı önemlidir: f bütün tanım kümesinde sınırsız olabilir, sınırlılık yalnızca a ’nın bir delinmiş komşuluğunda (Tanım 15.2) garanti edilir.

Teorem 29.1 (Limiti Olan Fonksiyon Nokta Yakınında Sınırlıdır). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ise f , a ’nın bir delinmiş komşuluğunda sınırlıdır; yani öyle $\delta > 0$ ve $M > 0$ sayıları vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

İspat.

Limit tanımını $\varepsilon = 1$ için uygulayalım. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$$

Böyle bir x için $f(x) = (f(x) - \ell) + \ell$ yazıp üçgen eşitsizliğini (Teorem 8.2) uygularsak

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

$M = 1 + |\ell|$ alalım; $M > 0$ ’dır ve $0 < |x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olur. İstenen de buydu. ■

Bu teoremin en sık kullanılan biçimi karşıt tersidir: f , a ’nın **her** delinmiş komşuluğunda sınırsızsa a ’da limiti olamaz. “Her delinmiş komşulukta sınırsız” ifadesini niceleyicilerle açık yazalım: sınırlılık ifadesi “ $\exists \delta > 0 \exists M > 0 \forall x \in A : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M)$ ” idi; Teorem 2.1 gereği olumsuzlaması

$$\forall \delta > 0 \forall M > 0 \exists x \in A : 0 < |x - a| < \delta \text{ ve } |f(x)| > M$$

olur.

Sonuç 29.1 (Sınırsız Fonksiyonun Limiti Yoktur). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. f , a ’nın her delinmiş komşuluğunda sınırsızsa, yani

$$\forall \delta > 0 \forall M > 0 \exists x \in A : 0 < |x - a| < \delta \text{ ve } |f(x)| > M$$

ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (bir reel sayı olarak) yoktur.

İspat.

Limit var olsaydı [Teorem 29.1](#) gereği f , a 'nın bir delinmiş komşuluğunda sınırlı olurdu; bu ise hipotezle çelişir. O hâlde limit yoktur. ■

Örnek 29.1 (Sıfırda Bir Bölü x Kare). $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde $f(x) = \frac{1}{x^2}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

0, A 'nın bir yığılma noktasıdır: her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon/2 \in A$ ve $0 < |\varepsilon/2 - 0| < \varepsilon$. [Sonuç 29.1](#) koşulunu doğrulayalım: $\delta > 0$ ve $M > 0$ keyfi olsun.

$$x = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2\sqrt{M}} \right\}$$

seçelim. Bu x pozitifdir, dolayısıyla $x \in A$ 'dır ve $0 < |x - 0| = x \leq \delta/2 < \delta$ sağlanır. Ayrıca $x \leq \frac{1}{2\sqrt{M}}$ olduğundan $x^2 \leq \frac{1}{4M}$, yani

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2} \geq 4M > M.$$

Demek ki her δ ve M için, 0'in δ -delinmiş komşuluğunda $|f(x)| > M$ olan bir x vardır: f , 0'in her delinmiş komşuluğunda sınırsızdır. [Sonuç 29.1](#) gereği $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2$ yoktur. ■

i Sonsuz limit ayrı bir kavramdır

$1/x^2$ fonksiyonu 0'a yaklaşırken “sonsuz gider” demek isteriz; bu doğru bir sezgidir ama bir reel sayı limiti değildir. $+\infty$ ve $-\infty$ için ayrı bir tanım ([Sonsuz Limitler ve Sonsuzdaki Limitler](#) bölümünde [Tanım 32.1](#)) yapacağız. Bu bölümde “limit vardır” her zaman “bir $\ell \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar” anlamındadır.

29.2 Limitlerde Cebirsel İşlemler

Diziler için kanıtladığımız [Teorem 21.1](#), limitin toplama, çarpma ve bölmeyle uyumlu olduğunu söylüyordu. Aynı kurallar fonksiyon limitleri için de geçerlidir ve sayesinde limitleri “parçalayarak” hesaplarız. Bölüm kuralında paydanın limiti ℓ_2 sıfırdan farklı olmalıdır; ispatın ilk adımı, o zaman g 'nin a 'nın bir delinmiş komşuluğunda zaten sıfırdan farklı kaldığını, yani f/g bölümünün orada tanımlı olduğunu gösterecek. Teoremin ifadesinde bu ikinci koşulu yine de açıkça yazıyoruz; böylece f/g 'nin nerede tanımlı olduğu baştan belli olur.

Teorem 29.2 (Limitlerde Cebirsel İşlemler). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$$

olsun. O zaman:

1. **(Toplam)** $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$.
2. **(Çarpım)** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$.
3. **(Sabitle çarpım)** Her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c\ell_1$.
4. **(Bölüm)** $\ell_2 \neq 0$ ise ve a 'nın bir delinmiş komşuluğundaki her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

İspat.

Her maddeyi ayrı ayrı kanıtlayalım. Bütün ispatlarda x 'in A 'da olduğu varsayılır; yazımı sadeleştirmek için " $x \in A$ " kaydını her seferinde tekrarlamayacağız.

(1) Toplam. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ olduğundan (tanımı $\varepsilon/2$ için uygulayarak) öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aynı şekilde $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ olduğundan öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alalım. $0 < |x - a| < \delta$ ise hem $|x - a| < \delta_1$ hem $|x - a| < \delta_2$ olduğundan yukarıdaki iki eşitsizlik birlikte sağlanır; üçgen eşitsizliğiyle

$$|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(f(x) - \ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu, (1)'i kanıtlar.

(2) Çarpım. Önce temel eşitsizliği kuralım. $\ell_1 g(x)$ terimini ekleyip çıkararak

$$f(x)g(x) - \ell_1 \ell_2 = f(x)g(x) - \ell_1 g(x) + \ell_1 g(x) - \ell_1 \ell_2 = g(x) (f(x) - \ell_1) + \ell_1 (g(x) - \ell_2)$$

yazılır; üçgen eşitsizliği ve $|uv| = |u| |v|$ ile

$$|f(x)g(x) - \ell_1 \ell_2| \leq |g(x)| |f(x) - \ell_1| + |\ell_1| |g(x) - \ell_2|. \quad (1)$$

Sağ tarafı küçültmek için $|g(x)|$ 'i kontrol etmeliyiz. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ olduğundan [Teorem 29.1](#) gereği öyle $\delta_0 > 0$ ve $M > 0$ vardır ki

$$0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)| \leq M.$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. f 'nin limit tanımını $\frac{\varepsilon}{2M}$ için uygulayarak öyle bir $\delta_1 > 0$ seçelim ki

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M};$$

g 'nin limit tanımını $\frac{\varepsilon}{2(1+|\ell_1|)}$ için uygulayarak öyle bir $\delta_2 > 0$ seçelim ki

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\ell_1|)}.$$

(Paydada $|\ell_1|$ yerine $1 + |\ell_1|$ yazmamızın nedeni, $\ell_1 = 0$ olduğunda sıfıra bölmekten kaçınmaktır.) $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ alalım. $0 < |x - a| < \delta$ için üç eşitsizlik de geçerlidir; (1)'de yerine koyarsak

$$|f(x)g(x) - \ell_1 \ell_2| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|\ell_1|)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\ell_1|}{1+|\ell_1|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Son adımda $\frac{|\ell_1|}{1+|\ell_1|} < 1$ olduğunu kullandık. Böylece $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$.

(3) Sabitle çarpım. $c = 0$ ise her x için $cf(x) = 0$ 'dır ve sabit 0 fonksiyonunun limiti $0 = c \ell_1$ 'dir (tanımda her δ işe yarar, çünkü $|0 - 0| = 0 < \varepsilon$). $c \neq 0$ ise $cf(x)$, sabit c fonksiyonu ile f 'nin çarpımıdır. Sabit fonksiyonun limiti kendisidir: $|c - c| = 0 < \varepsilon$ her x için sağlanır, yani $\lim_{x \rightarrow a} c = c$. O hâlde (2) ile

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} c \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = c \ell_1.$$

(4) Bölüm. $\ell_2 \neq 0$ olsun ve g , a 'nın bir delinmiş komşuluğunda sıfırdan farklı olsun; böylece f/g o komşulukta tanımlıdır.

Adım 1: $|g(x)|$ sıfırdan uzak kalır. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ tanımını $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_2|}{2} > 0$ için uygulayalım: öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki

$$0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) $|g(x)| \geq |\ell_2| - |g(x) - \ell_2|$ verir; dolayısıyla böyle x 'ler için

$$|g(x)| > |\ell_2| - \frac{|\ell_2|}{2} = \frac{|\ell_2|}{2} > 0. \quad (2)$$

(Özellikle bu komşulukta $g(x) \neq 0$ 'dır; hipotezdeki “ g komşulukta sıfırdan farklı” koşulu demek ki $\ell_2 \neq 0$ 'dan kendiliğinden çıkar.)

Adım 2: Temel eşitsizlik. $0 < |x - a| < \delta_0$ için paydaları eşitleyip $\ell_1 \ell_2$ ekleyip çıkaralım:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{f(x)\ell_2 - g(x)\ell_1}{g(x)\ell_2} = \frac{\ell_2 (f(x) - \ell_1) - \ell_1 (g(x) - \ell_2)}{g(x)\ell_2}.$$

Üçgen eşitsizliği ve (2) ile

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| \leq \frac{|\ell_2| |f(x) - \ell_1| + |\ell_1| |g(x) - \ell_2|}{|g(x)| |\ell_2|} \leq \frac{2}{|\ell_2|^2} (|\ell_2| |f(x) - \ell_1| + |\ell_1| |g(x) - \ell_2|).$$

Adım 3: δ seçimi. $\varepsilon > 0$ verilsin ve

$$\eta = \frac{\varepsilon |\ell_2|^2}{4 (|\ell_2| + |\ell_1|)} > 0$$

olsun. f ve g 'nin limit tanımlarını η için uygulayarak öyle $\delta_1, \delta_2 > 0$ seçelim ki

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \eta, \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \eta.$$

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ alalım. $0 < |x - a| < \delta$ için (3)'ten

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| < \frac{2}{|\ell_2|^2} (|\ell_2| + |\ell_1|) \eta = \frac{2}{|\ell_2|^2} (|\ell_2| + |\ell_1|) \cdot \frac{\varepsilon |\ell_2|^2}{4 (|\ell_2| + |\ell_1|)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Bu, bölüm kuralını kanıtlar.

■

Teoremin işe yaradığı yer açıktır: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{2x-1}$ gibi bir limiti artık ε - δ ile uğraşmadan, pay ve paydanın limitlerinden hesaplayabiliriz. Ayrıca ispatın Adım 1'i kendi başına değerlidir: limiti sıfırdan farklı olan bir fonksiyon, nokta yakınında sıfırdan uzak kalır. Bu yüzden (4)'teki “ g komşulukta sıfırdan farklı” koşulu aslında $\ell_2 \neq 0$ 'dan çıkar; onu yalnızca f/g 'nin nerede tanımlı olduğunu açıkça söylemek için yazdık. Aynı gözlemi bir sonraki bölümde Teorem 30.2 olarak ayrıca kayda geçireceğiz.

🔍 Dizisel ölçütle kısa ispat

Teorem 29.2, dizi limitlerinin aritmetiğinden (Teorem 21.1) dizisel ölçüt (Teorem 28.1) yardımıyla birkaç satırda da çıkarılabilir. Örneğin çarpım kuralı için: $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. Teorem 28.1 gereği $f(x_n) \rightarrow \ell_1$ ve $g(x_n) \rightarrow \ell_2$ 'dir; Teorem 21.1 ile $f(x_n)g(x_n) \rightarrow \ell_1 \ell_2$ olur. Bu, $A \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan her dizi için doğru olduğundan, yine Teorem 28.1 (bu kez $\Leftarrow$ yönü) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$ verir. Toplam ve bölüm için aynı şablon işler; bölümde dizi, f/g 'nin tanım kümesi olan $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$ içinden seçildiğinden $g(x_n) \neq 0$ zaten sağlanır ve dizi bölüm kuralı (Teorem 21.1) uygulanabilir.

Bu kısa yol, ε - δ ispatının değerini azaltmaz: diziler için yapılan işin fonksiyonlara nasıl taşındığını görmek, ileride benzer teoremleri kendi başınıza kanıtlamanızı kolaylaştırır.

Teoremden hemen çıkan birkaç sonuç var.

Sonuç 29.2 (Fark, Negatif ve Kuvvet). Teorem 29.2 hipotezleri altında:

1. **(Fark)** $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \ell_1 - \ell_2$.
2. **(Negatif)** $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\ell_1$.
3. **(Kuvvet)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \ell_1^n$.

İspat.

(2) için sabitle çarpım kuralını $c = -1$ ile uygulayalım: $\lim_{x \rightarrow a} (-1)f(x) = (-1)\ell_1 = -\ell_1$. (1) için $f - g = f + (-g)$ yazıp (2) ve toplam kuralını kullanalım: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-g(x))) = \ell_1 + (-\ell_2) = \ell_1 - \ell_2$.

(3)'ü n üzerinde tümevarımla (Teorem 9.1) kanıtlayalım. $n = 1$ için ifade hipotezin kendisidir. İfade n için doğru olsun: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \ell_1^n$. $(f(x))^{n+1} = (f(x))^n \cdot f(x)$ olduğundan çarpım kuralıyla

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{n+1} = \left(\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \ell_1^n \cdot \ell_1 = \ell_1^{n+1}.$$

Tümevarım ilkesi gereği ifade her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

■

29.3 Polinomların ve Rasyonel Fonksiyonların Limitleri

Cebirsel kurallar, iki basit limitle birleşince en sık karşılaştığımız fonksiyon sınıfının limitini verir. Basit limitler şunlar: sabit fonksiyon için $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ (yukarıda gördük) ve birim fonksiyon için $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ (tanımda $\delta = \varepsilon$ almak yeter: $0 < |x - a| < \delta$ ise $|x - a| < \varepsilon$). Örnek 27.3 bu iki limitin toplam ve sabitle çarpım kuralıyla birleşmiş hâliydi.

Sonuç 29.3 (Polinomun Limiti). $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ reel katsayılı bir polinom olsun (katsayıları, limit noktası a ile karışmasın diye c_k ile gösteriyoruz). Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0 = p(a).$$

İspat.

$\lim_{x \rightarrow a} x = a$ olduğundan Sonuç 29.2 (3) ile her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$ 'dir. Sabitle çarpım kuralıyla her $k \geq 1$ için $\lim_{x \rightarrow a} c_k x^k = c_k a^k$ olur; $k = 0$ terimi ise sabit c_0 fonksiyonudur ve limiti c_0 'dır. Son olarak toplam kuralı iki fonksiyon için verilmişti; sonlu sayıda fonksiyona, terim sayısı üzerinde tümevarımla genişler: m terimin toplamının limiti limitlerin toplamıysa, $m + 1$ terim için $(p_1 + \dots + p_m) + p_{m+1}$ yazıp iki fonksiyonluk kuralı uygularız. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} c_k x^k = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k a^k = p(a).$$

■

Sonuç 29.4 (Rasyonel Fonksiyonun Limiti). p ve q polinomlar, $a \in \mathbb{R}$ ve $q(a) \neq 0$ olsun. $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

İspat.

Sonuç 29.3 gereği $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a) \neq 0$ 'dır. Bölüm kuralını uygulamak için q 'nın a yakınında sıfırdan farklı olması da gerekir; bu, Teorem 29.2 (4) ispatının Adım 1'inden çıkar: $q(x) \rightarrow q(a) \neq 0$ olduğundan bir delinmiş komşulukta $|q(x)| > |q(a)|/2 > 0$ 'dır. (Ayrıca r 'nin tanım kümesi $\{x : q(x) \neq 0\}$ 'dir ve a bu kümenin yığılma noktasıdır, çünkü bir polinomun sonlu sayıda kökü vardır.) Bölüm kuralı ile

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

■

Örnek 29.2 (Bir Rasyonel Fonksiyonun Limiti). $f : \mathbb{R} \setminus \{-8\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 8}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Pay ve payda polinomdur ve paydanın -3 'teki değeri $-3 + 8 = 5 \neq 0$ 'dır. **Sonuç 29.4** gereği

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{(-3)^2 + 2(-3) + 5}{-3 + 8} = \frac{9 - 6 + 5}{5} = \frac{8}{5}.$$

■

⚠ Payda sıfırsa ne olur?

Sonuç 29.4 içindeki $q(a) \neq 0$ koşulu, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ formülünün **geçerli olması** için yeterlidir; ama limitin **var olması** için gerekli değildir. $q(a) = 0$ olduğunda formül anlamsızdır, limit ise olabilir de olmayabilir de: $\frac{1}{x^2}$ için 0 'da limit yoktur (**Örnek 29.1**), oysa aşağıdaki örnekte limit vardır. Böyle durumlarda pay ve paydayı çarpanlarına ayırıp ortak çarpanı sadeleştirmek ilk denenecek yoldur.

Sadeleştirmenin neden meşru olduğunu açıkça söyleyelim: limit yalnızca a 'nın delinmiş komşuluklarındaki değerlere bakar. Dolayısıyla a dışında (yakında) çakışan iki fonksiyonun limitleri aynıdır.

Önerme 29.1 (Nokta Yakınında Çakışan Fonksiyonlar). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ olsun ve öyle bir $\delta_0 > 0$ bulunsun ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_0$ için $f(x) = g(x)$ olsun. O zaman $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ 'dir.

Uygulamalarda g çoğu zaman A 'yı kapsayan daha büyük bir kümede (örneğin bütün $\mathbb{R}$ 'de) tanımlı bir polinomdur; böyle bir g 'nin A 'ya kısıtlaması alınır ve bu limiti değiştirmez, çünkü limit tanımındaki koşul daha az sayıda x için istenir, a ise A 'nın yığılma noktası olmayı sürdürür.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin; g için $\delta_1 > 0$ seçelim: $0 < |x - a| < \delta_1$, $x \in A$ iken $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alalım. $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ ise $f(x) = g(x)$ olduğundan $|f(x) - \ell| = |g(x) - \ell| < \varepsilon$.

■

Örnek 29.3 (Payda Sıfır Ama Limit Var). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Fonksiyonun tanım kümesi $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 'dir ve $1 \in A'$. Payda $x = 1$ 'de sıfır olduğundan **Sonuç 29.4** doğrudan uygulanamaz. Payı çarpanlarına ayıralım: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. $x \neq 1$ için $x - 1 \neq 0$ olduğundan sadeleştirebiliriz:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1).$$

Yani A üzerinde fonksiyonumuz $g(x) = x + 1$ polinomuyla çakışır. **Önerme 29.1** ve **Sonuç 29.3** ile

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Demek ki $q(1) = 0$ olmasına rağmen limit vardır; $q(a) \neq 0$ koşulu yeterli ama gerekli değildir.

■

29.4 Bileşke Fonksiyonun Limiti

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + x^2}$ ya da $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x)$ gibi limitlerde iki fonksiyon iç içedir: önce $x \mapsto 1 + x^2$, sonra $u \mapsto \sqrt{u}$. Doğal beklenti, limitin “içeriden dışarıya” hesaplanmasıdır: iç fonksiyon b 'ye gidiyorsa ve dış fonksiyonun b 'de limiti ℓ ise bileşke ℓ 'ye gitmelidir. Bu beklenti **bir ek koşulla** doğrudur ve koşulun nedeni tam olarak limit tanımındaki “ $0 < |x - a|$ ” kaydından gelir: dış fonksiyonun b 'deki limiti, $g(b)$ değerini hiç hesaba katmaz. İç fonksiyon b değerini alıp durursa, bileşke $g(b)$ 'yi görür ama limit ℓ bunu “bilmez”.

Teorem 29.3 (Bileşke Fonksiyonun Limiti). $A, B \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan kümeler, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar, $a \in A', b \in B'$ ve $\ell \in \mathbb{R}$ olsun. Şunlar sağlansın:

1. Her $x \in A$ için $f(x) \in B$ (böylece $g \circ f$, A üzerinde tanımlıdır);
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$;
3. $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$;
4. Öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta_0$ iken $f(x) \neq b$.

O zaman $h = g \circ f$ bileşkesinin a 'da limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell.$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ keyfi olsun.

Adım 1: Dış fonksiyon için η . $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ olduğundan limit tanımı gereği öyle bir $\eta > 0$ vardır ki

$$y \in B, 0 < |y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - \ell| < \varepsilon.$$

Adım 2: İç fonksiyon için δ_1 . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ olduğundan, Adım 1'deki η pozitif sayısını limit tanımında “ ε ” rolünde kullanarak öyle bir $\delta_1 > 0$ buluruz ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \eta.$$

Adım 3: Ek koşul. Koşul (4) gereği öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow f(x) \neq b.$$

Adım 4: Birleştirme. $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alalım ve $x \in A, 0 < |x - a| < \delta$ olsun. Adım 2 ile $|f(x) - b| < \eta$, Adım 3 ile $f(x) \neq b$, yani $|f(x) - b| > 0$; birlikte

$$0 < |f(x) - b| < \eta$$

elde ederiz. Ayrıca koşul (1) gereği $f(x) \in B$ 'dir. Demek ki $y = f(x)$ sayısı Adım 1'deki koşulu sağlar; Adım 1 uygulanarak

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$ 'dir.

■

Teorem, limitleri “yerine koyma” ile hesaplamamızı sağlar: iç fonksiyonun limitini bulur, onu dış fonksiyonun limit noktası olarak kullanırız. Ancak sonucun $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$ olduğuna, $g(b)$ **olmadığına** dikkat edin; ikisi farklı olabilir. Koşul (4)'ün ne zaman kendiliğinden sağlandığını da not edelim: iç fonksiyon a yakınında birebirse ya da $f(x) = b$ denkleminin a yakınında a dışında çözümü yoksa – örneğin $f(x) = 3x, a = 0, b = 0$ için $3x \neq 0$ ($x \neq 0$) – koşul sağlanır.

⚠ Koşul (4) atılamaz

Koşul (4), f 'nin a 'nın bir delinmiş komşuluğunda b değerini **almamasını** ister. Bu koşul olmadan teorem yanlıştır: f, a yakınında sabit b ise bileşke $g(b)$ değerini alır ve bu değer ℓ 'den farklıysa sonuç çöker. Aşağıdaki iki örnek bunu gösteriyor.

Örnek 29.4 (Ek Koşulun Gerekliliği). $f(x) = 0$ (her $x \in \mathbb{R}$ için) ve

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y \neq 0 \end{cases}$$

olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{y \rightarrow 0} g(y)$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ limitlerini karşılaştırmamız.

Çözüm.

f sabit olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; yani $b = 0$. g için: $y \neq 0$ iken $g(y) = 1$ 'dir, dolayısıyla $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$ (Önerme 29.1 ile sabit 1 fonksiyonunun limiti); yani $\ell = 1$. $g(0) = 0 \neq \ell$ olduğuna dikkat edin.

Bileşke: her x için $f(x) = 0$ olduğundan $h(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ 'dır; h sabit 0 fonksiyonudur ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \neq 1 = \ell.$$

Teoremin sonucu geçerli değildir, çünkü koşul (4) bozulmuştur: her x için $f(x) = 0 = b$ 'dir, 0'ın hiçbir delinmiş komşuluğunda $f(x) \neq b$ sağlanamaz. Hipotezler (1)–(3) ise sağlanmaktadır; demek ki yalnız (4)'ün eksikliği sonucu bozmaya yetmiştir.

■

Örnek 29.5 (Bileşkenin Limiti ile Limitlerin Bileşkesi).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -2, & x = 1, \\ 2 + x, & x \neq 0, 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x, & x \neq 0 \end{cases}$$

olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ ile $f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ değerlerini hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.

Adım 1: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. $x \neq 0$ için $g(x) = 1 + x$ 'tir; Önerme 29.1 ve Sonuç 29.3 ile $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1 =: b$.

Adım 2: Limitlerin bileşkesi. $f(b) = f(1) = -2$. Yani $f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)) = -2$.

Adım 3: Bileşke fonksiyon $h = f \circ g$. $h(x) = f(g(x))$ 'i parça parça yazalım.

- $x = 0$ ise $g(0) = 0$ ve $f(0) = 0$; $h(0) = 0$.
- $x = -1$ ise $g(-1) = 1 + (-1) = 0$ ve $f(0) = 0$; $h(-1) = 0$.
- $x \neq 0, -1$ ise $g(x) = 1 + x$ sayısı 0'dan ve 1'den farklıdır ($1 + x = 1$ ancak $x = 0$ iken, $1 + x = 0$ ancak $x = -1$ iken); dolayısıyla f 'nin üçüncü dalı geçerlidir: $h(x) = f(1 + x) = 2 + (1 + x) = 3 + x$.

Özetle

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ya da } x = -1, \\ 3 + x, & x \neq 0, -1. \end{cases}$$

Adım 4: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. $0 < |x| < 1$ delinmiş komşuluğunda $x \neq -1$ ve $x \neq 0$ olduğundan $h(x) = 3 + x$ 'tir. Önerme 29.1 ile

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x) = 3.$$

Sonuç: $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 3$ ama $f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)) = -2$; ikisi farklıdır.

Bu örnek Teorem 29.3 ile çelişmez, tam tersine onu doğrular. Burada iç fonksiyon g , dış fonksiyon f , $a = 0$, $b = 1$ 'dir. $x \neq 0$ için $g(x) = 1 + x \neq 1$ olduğundan koşul (4) sağlanır; dış fonksiyonun $b = 1$ 'deki limiti $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = \lim_{y \rightarrow 1} (2 + y) = 3 = \ell$ 'dir. Teorem tam da $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \ell = 3$ der. Farklı olan, $\ell = 3$ ile $f(b) = f(1) = -2$ 'dir: bileşkenin limiti dış fonksiyonun **limitine** eşittir, b 'deki **değerine** değil.

■

Koşul (4)'ün gerekli olduğu durumlar, $g(b)$ ile ℓ 'nin farklı olduğu durumlardır. İkisi eşitse koşula gerek kalmaz; bu gözlem, süreklilik bölümünde bileşkenin sürekliliğini (Teorem 33.3) ek koşulsuz kanıtlamamızın nedenidir.

Önerme 29.2 (Dış Fonksiyonun Değeri Limitine Eşitse). Teorem 29.3 hipotezlerinden (1), (2) ve (3) sağlansın; ayrıca $b \in B$ ve $g(b) = \ell$ olsun. O zaman koşul (4) olmaksızın da $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$ 'dir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. **Teorem 29.3** ispatındaki gibi $\eta > 0$ ve $\delta_1 > 0$ seçelim: $y \in B$, $0 < |y - b| < \eta$ iken $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ ve $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_1$ iken $|f(x) - b| < \eta$. $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_1$ olsun; iki durum vardır.

- $f(x) \neq b$ ise $0 < |f(x) - b| < \eta$ ve $f(x) \in B$; dolayısıyla $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$.
- $f(x) = b$ ise $g(f(x)) = g(b) = \ell$; dolayısıyla $|g(f(x)) - \ell| = 0 < \varepsilon$.

Her iki durumda da $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$; $\delta = \delta_1$ işe yarar.

■

29.5 Alıştırmalar

Alıştırma 29.1 (Limitin Özellikleri Üzerine).

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ limitini hesaplayınız.
- $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ limitinin var olmadığını iki yolla gösteriniz: **Sonuç 29.1** ile ve dizisel ölçütle.
- $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. f 'nin a 'da limiti varsa ve g 'nin yoksa $f + g$ 'nin de a 'da limiti olmadığını gösteriniz. Her ikisinin de limiti olmayıp toplamlarının limiti olan iki fonksiyon örneği veriniz.
- $g(y) = \frac{y^2 - 4}{y - 2}$ ($y \neq 2$) ve $f(x) = x^2 + 1$ olsun. **Teorem 29.3** yardımıyla $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ limitini hesaplayınız; teoremin dört koşulunu tek tek doğrulayınız.

Çözüm.

a) Tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ 'dir ve payda 2'de sıfırdır; çarpanlara ayırılım: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. $x \neq 2$ için

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

olduğundan **Önerme 29.1** ve **Sonuç 29.3** ile

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12.$$

b) Kuvvet farkı özdeşliğini (**Lemma 13.1**) kullanacağız; her $x, a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$x^n - a^n = (x - a) (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k.$$

(Sağ tarafı açınca ardışık terimler birbirini götürür: $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^{k+1}$ toplamında ikinci toplamın k terimi birincinin $k + 1$ terimiyle aynıdır; geriye yalnızca x^n ve $-a^n$ kalır. Lemmadaki uzlaşma uyarak x^0 ve a^0 çarpanlarını, x ya da a sıfır olsa bile 1 okuyoruz; özellikle $n = 1$ hâlinde toplam tek terimden ibarettir ve sonuç $\lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 = 1 \cdot a^0$ olur.) $x \neq a$ için

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k =: p(x)$$

olur ve p , x 'in bir polinomudur. **Önerme 29.1** ve **Sonuç 29.3** ile

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = p(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}.$$

c) *Birinci yol.* $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f(x) = 1/x$ olsun. $\delta > 0$ ve $M > 0$ verilsin; $x = \min\{\delta/2, 1/(2M)\}$ alalım. $x > 0$ olduğundan $x \in A$ ve $0 < |x| < \delta$ 'dir; $x \leq 1/(2M)$ olduğundan $|f(x)| = 1/x \geq 2M > M$. Demek ki f , 0'ın her delinmiş komşuluğunda sınırsızdır ve **Sonuç 29.1** gereği limit yoktur.

İkinci yol. $x_n = 1/n$ dizisi $A \setminus \{0\}$ içindedir ve $x_n \rightarrow 0$ 'dır. $f(x_n) = n$ dizisi sınırsızdır, dolayısıyla yakınsak değildir (Teorem 20.2'nin karşıt tersi). Limit ℓ var olsaydı Teorem 28.1 gereği $f(x_n) \rightarrow \ell$ olurdu; çelişki. (Bu, Sonuç 28.1'in bir uygulamasıdır.)

d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun ve $f + g$ 'nin a 'da bir m limiti olduğunu varsayalım. $g = (f + g) - f$ olduğundan Sonuç 29.2 (1) ile

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} ((f + g)(x) - f(x)) = m - \ell$$

olurdu; bu, g 'nin limiti olmadığı hipoteziyle çelişir. O hâlde $f + g$ 'nin limiti yoktur.

Örnek: f , Dirichlet fonksiyonu olsun — $x \in \mathbb{Q}$ için $f(x) = 1$, $x \notin \mathbb{Q}$ için $f(x) = 0$ — ve $g = 1 - f$ olsun. Örnek 28.3 gereği f 'nin hiçbir noktada limiti yoktur; g 'nin de yoktur, çünkü olsaydı $f = 1 - g$ 'nin de olurdu (yukarıdaki akıl yürütme). Ama $f + g \equiv 1$ sabittir ve her noktada limiti 1'dir. Durum diziler için gördüğümüzün aynısıdır: “yakınsak + ıraksak” toplamı her zaman ıraksaktır (Önerme 21.1) ve alıştırmanın ilk yarısı bunun fonksiyon sürümüdür; “ıraksak + ıraksak” içinse — o önermeyi izleyen tabloda ve uyarıda belirtildiği gibi — genel bir şey söylenemez.

e) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $a = 1$ alalım. Koşulları sırayla doğrulayalım.

- **(1)** Her x için $f(x) = x^2 + 1 \in B$ olmalı, yani $x^2 + 1 \neq 2$ olmalı. Bu $x \neq \pm 1$ için doğrudur; $x = \pm 1$ 'de $f(x) = 2 \notin B$. Öyleyse A 'yı $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ olarak daraltalım; 1 hâlâ A 'nın yığılma noktasıdır ve limit, 1'in delinmiş komşuluklarına baktığı için değişmez. Artık her $x \in A$ için $f(x) \in B$.
- **(2)** Sonuç 29.3 ile $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 = 2 =: b$; $b = 2 \in B'$ (B , 2 dışındaki her reel sayıyı içerir).
- **(3)** $y \neq 2$ için $g(y) = \frac{(y-2)(y+2)}{y-2} = y + 2$; Önerme 29.1 ile $\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = 4 =: \ell$.
- **(4)** $x \in A$ ve $0 < |x - 1| < 1$ ise $x \neq \pm 1$, dolayısıyla $f(x) = x^2 + 1 \neq 2 = b$. Koşul $\delta_0 = 1$ ile sağlanır.

Teorem 29.3 gereği $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = \ell = 4$. Doğrulama: $x \in A$ için $g(f(x)) = f(x) + 2 = x^2 + 3$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$.

■

Limitin cebirsel yüzünü tamamladık. Sıradaki bölümde limitin **sıralamayla** ilişkisine bakacağız: mutlak değer limit, limitin işaretinin korunması, eşitsizliklerin limite geçmesi, sıkıştırma teoremi ve onun en ünlü uygulaması $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: **Limitlerde Mutlak Değer, İşaret, Sıralama ve Sıkıştırma**.

30. Limitlerde Mutlak Değer, İşaret, Sıralama ve Sıkıştırma

Önceki bölümde limitin **cebirsel** yüzünü tamamladık: toplam, çarpım, bölüm ve bileşke (Teorem 29.2, Teorem 29.3). Bu bölümde limitin **sıralamayla** ilişkisine bakıyoruz. Sorularımız şunlar: f' 'nin limiti varsa $|f|$ 'nin de var mıdır? Limit pozitifse fonksiyon nokta yakınında pozitif midir? İki fonksiyon arasındaki bir eşitsizlik limitlerine geçer mi? Bir fonksiyon, limitleri aynı olan iki fonksiyonun arasına sıkışmışsa onun da limiti var mıdır?

Bu soruların hepsini diziler için zaten yanıtlamıştık: Teorem 20.3, Teorem 21.2, Teorem 21.3 ve Teorem 21.6. Fonksiyon sürümleri, o ispatlardaki " $n \geq n_\epsilon$ " ifadesini " $0 < |x - a| < \delta$ " ile değiştirerek elde edilir; her birini yine de baştan sona yazacağız, çünkü bu değişimin nasıl yapıldığını görmek, ileride benzer teoremleri kendi başınıza kanıtlamanızın anahtarıdır. Bölümün sonunda sıkıştırma teoreminin en ünlü uygulamasını, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ limitini geometrik bir karşılaştırmayla kanıtlayacağız.

Bölüm boyunca $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A'$, yani a noktası A 'nın bir yığılma noktasıdır (Tanım 17.1). " a 'nın bir delinmiş komşuluğunda" sözü (Tanım 15.2), " $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ olan bütün x 'ler için, uygun bir $\delta > 0$ ile" anlamındadır. Hatırlatma: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ demek (Tanım 27.1), her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunması demektir ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

30.1 Mutlak Değerin Limiti

$f(x)$ değerleri ℓ 'ye yaklaşıyorsa $|f(x)|$ değerlerinin $|\ell|$ 'ye yaklaşması beklenir; çünkü mutlak değer, iki sayı arasındaki uzaklığı büyütmez: $||u| - |v|| \leq |u - v|$. Bu, ters üçgen eşitsizliğidir (Sonuç 8.3) ve ispatın bütün işini o yapar.

Teorem 30.1 (Mutlak Değerin Limiti). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

İspat.

$\epsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Böyle bir x için ters üçgen eşitsizliğini (Sonuç 8.3) $u = f(x)$, $v = \ell$ ile uygulayalım:

$$||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Demek ki aynı δ , $|f|$ fonksiyonu ve $|\ell|$ sayısı için limit tanımının koşulunu sağlar: $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$.

■

Teorem, $\lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 7| = |4 - 7| = 3$ türünden limitleri tek adımda verir. Ancak teoremin karşıtı doğru değildir: $|f|$ 'nin limiti varken f 'nin limiti olmayabilir, çünkü mutlak değer işaret bilgisini siler ve tam da bu bilgi bozuk olabilir.

Örnek 30.1 (Mutlak Değerin Limiti Var, Fonksiyonun Yok). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ limitinin var olduğunu ama $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Her x için $|f(x)| = 1$ 'dir; yani $|f|$ sabit 1 fonksiyonudur ve sabit fonksiyonun limiti kendisidir: her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$.

f 'nin a 'da limiti olmadığını dizisel ölçütle (Sonuç 28.1) gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(a, a + 1/n)$ aralığında rasyonellerin yoğunluğu (Teorem 13.5) gereği bir $r_n \in \mathbb{Q}$, irrasyonellerin yoğunluğu (Teorem 13.6) gereği bir $s_n \notin \mathbb{Q}$ vardır. $a < r_n < a + 1/n$ olduğundan $r_n \neq a$ ve $|r_n - a| < 1/n$; dolayısıyla $r_n \rightarrow a$. Aynı biçimde $s_n \neq a$ ve $s_n \rightarrow a$. Görüntü dizileri ise sabittir:

$$f(r_n) = -1 \rightarrow -1, \quad f(s_n) = 1 \rightarrow 1.$$

a 'ya yakınsayan, a 'dan farklı terimli iki dizinin görüntüleri farklı limitlere gittiğinden Sonuç 28.1 gereği $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.

Sonuç: $|f|$ 'nin her noktada limiti vardır, f 'nin hiçbir noktada yoktur. ($f = 1 - 2D$ yazılabilir; burada D , Örnek 28.3'ndeki Dirichlet fonksiyonudur: rasyonellerde $1 - 2 = -1$, irrasyonellerde $1 - 0 = 1$.)

■

Karşıtın doğru olduğu tek durum $\ell = 0$ 'dır: sifıra yaklaşmak için işaretin önemi yoktur.

Sonuç 30.1 (Sıfır Limiti ve Mutlak Değer). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. O zaman

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

İspat.

($\Rightarrow$) Teorem 30.1'u $\ell = 0$ ile uygulayalım: $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |0| = 0$.

($\Leftarrow$) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $||f(x)| - 0| < \varepsilon$. Ama $||f(x)| - 0| = |f(x)| = |f(x) - 0|$ olduğundan bu, aynı x 'ler için $|f(x) - 0| < \varepsilon$ demektir; yani $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

■

30.2 Limitin İşaretini Koruma

Limit ℓ sıfırdan farklıysa $f(x)$ değerleri, a 'ya yeterince yakın x 'lerde ℓ 'nin “yanında” kalır; dolayısıyla ne sıfır olabilir ne de ℓ 'nin tersi işarete. Bunun niceliksel hâli, bölüm kuralının ispatında (Teorem 29.2 (4), Adım 1) zaten karşımıza çıkmıştı; şimdi kayda geçiriyoruz.

Teorem 30.2 (İşaret Koruma). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun.

1. $\ell \neq 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{|\ell|}{2};$$

özellikle böyle x 'ler için $f(x) \neq 0$.

2. $\ell > 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$.

3. $\ell < 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) < \frac{\ell}{2} < 0$.

İspat.

(1) $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$ alalım ve limit tanımını uygulayalım: öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2}.$$

Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) $|\ell| - |f(x)| \leq ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell|$ verir; böyle x 'ler için

$$|f(x)| \geq |\ell| - |f(x) - \ell| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

Özellikle $|f(x)| > 0$, yani $f(x) \neq 0$ 'dır.

(2) $\ell > 0$ olsun ve $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ seçelim. Limit tanımı gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$. Mutlak değerli eşitsizliği açalım (Önerme 8.6):

$$-\frac{\ell}{2} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}.$$

Soldaki eşitsizlik istenendir: $f(x) > \ell/2 > 0$.

(3) $\ell < 0$ olsun. $-f$ fonksiyonunun limiti $-\ell > 0$ 'dır (Sonuç 29.2 (2)). (2)'yi $-f$ 'ye uygularsak öyle bir $\delta > 0$ buluruz ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta$ iken $-f(x) > \frac{-\ell}{2}$, yani $f(x) < \frac{\ell}{2} < 0$.

■

Teoremin işlevi, bir eşitsizliği **noktadan komşuluğa** taşımaktır: limit hakkında bildiğimiz tek bir bilgi ($\ell > 0$), fonksiyonun bir bütün delinmiş komşuluktaki davranışını belirler. Bu bölümde sıralama teoreminin ispatında, ileride ise süreklilik için işaret koruma ve Bolzano'nun sıfır yeri teoreminde (Teorem 35.1) kullanılacaktır.

⚠ Limit sıfıra işaret hakkında bir şey söylenemez

Teorem, $\ell = 0$ hâlinde hiçbir şey söylemez ve söyleyemez: $f(x) = x$ fonksiyonu 0'da 0'a yakınsar ama 0'ın her delinmiş komşuluğunda hem pozitif hem negatif değer alır. Benzer biçimde " $f(x) \geq 0$ komşulukta" varsayımından $\ell > 0$ değil yalnızca $\ell \geq 0$ çıkar (aşağıda Sonuç 30.2). Kesin eşitsizlik yalnızca "limitten fonksiyona" doğru korunur, "fonksiyondan limite" doğru değil.

30.3 Sınırlı Fonksiyon ile Sıfıra Giden Fonksiyonun Çarpımı

Çarpım kuralı (Teorem 29.2 (2)) iki fonksiyonun da limitinin olmasını ister. Oysa çarpanlardan biri sıfıra gidiyorsa ötekinin limitinin olmasına gerek yoktur; sınırlı kalması yeter. Sezgi basittir: "çok küçük" çarpı "en fazla M " yine "çok küçük"tür. Diziler için bunu Teorem 21.2 olarak görmüştük.

Teorem 30.3 (Sınırlı Fonksiyon Çarpı Sıfıra Giden Fonksiyon). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olsun ve g , a 'nın bir delinmiş komşuluğunda sınırlı olsun; yani öyle $\delta_1 > 0$ ve $M > 0$ bulunsun ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| \leq M.$$

O zaman

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olduğundan limit tanımını $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ sayısı için uygulayabiliriz: öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alalım. $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ ise hem $|g(x)| \leq M$ hem $|f(x)| < \varepsilon/M$ sağlanır; $|uv| = |u| |v|$ (Teorem 8.1) ile

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)| |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Bu, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ demektir.

■

İki not: Birincisi, g bütün A üzerinde sınırlıysa her delinmiş komşulukta da sınırlıdır; teorem doğrudan uygulanır. İkincisi, teoremin gücü g hakkında limit istememesindedir: g 'nin a 'da limiti olmayabilir,

salınabilir, hatta hiçbir noktada limiti olmayabilir. Bunun klasik örneği aşağıdadır; $\sin(1/x)$ 'in 0'da limiti olmadığını **Örnek 28.2**'te görmüştük, bu yüzden çarpım kuralı burada işe yaramaz.

Örnek 30.2 (x Çarpı Sinüs Bir Bölü x). $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

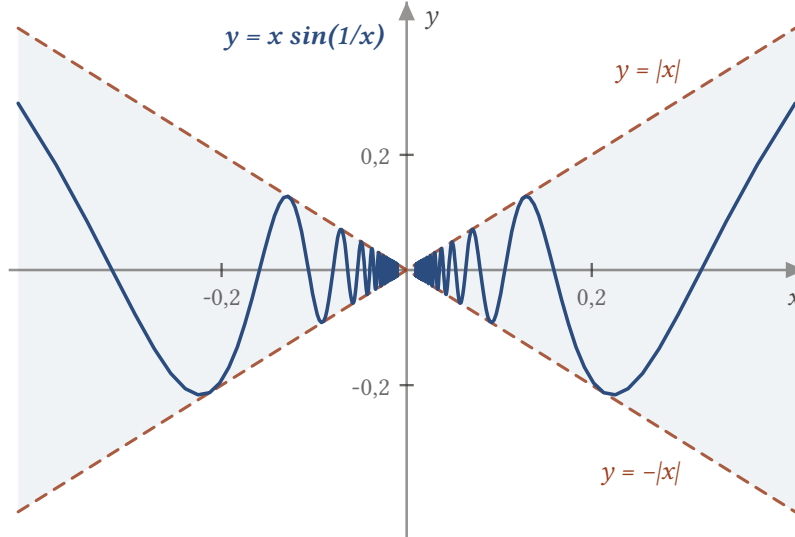
$A = \mathbb{R}$ ve $a = 0 \in A'$. h 'yi iki fonksiyonun çarpımı olarak yazalım: $f(x) = x$ ve

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$x \neq 0$ için $f(x)g(x) = x \sin(1/x) = h(x)$, $x = 0$ için $f(0)g(0) = 0 = h(0)$; yani $\mathbb{R}$ üzerinde $h = fg$ 'dir. Birim fonksiyonun limiti $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 'dır (tanımda $\delta = \varepsilon$ almak yeter). g ise bütün $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlıdır: $|\sin t| \leq 1$ olduğundan (sinüs hakkında kullandığımız olguları bölümün son kesimindeki *Kabul edilen trigonometrik ve geometrik olgular* kutusunda topluca listeliyoruz) her x için $|g(x)| \leq 1$; $M = 1$ alınabilir. **Teorem 30.3** gereği

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Aynı sonucu doğrudan da görebiliriz: $x \neq 0$ için $|h(x)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|$; yani h 'nin grafiği $y = |x|$ ve $y = -|x|$ doğruları arasında kalır ve bu iki doğru 0'da birleşir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon$ seçmek yeter.



Şekil 30.1: $y = x \sin(1/x)$ grafiği, kesikli çizilen $y = |x|$ ve $y = -|x|$ zarfları arasında kalır: $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$. Salınımlar 0'a yaklaşırken sıklaşır, ama iki zarf 0'da birleştiğinden fonksiyon aralarında sıkışıp 0'a gider.

Grafik 0'a yaklaşırken sonsuz kez salınır, ama salınımın genliği $|x|$ ile birlikte sıfıra iner; limit bu yüzden vardır. ($h(0) = 0$ tanımı limite eşit olduğundan h aslında 0'da süreklidir; bunu **Süreklilik** bölümünde **Tanım 33.1** ile söyleyeceğiz.)

■

30.4 Limit ve Sıralama

Şimdi ana soruya geliyoruz: iki fonksiyon arasındaki bir eşitsizlik limitlerine geçer mi? Yanıt evettir, ancak “ $\leq$ ” olarak kesin eşitsizlik limite geçerken eşitliğe gevşeyebilir. Ters yönde ise limitler arasındaki **kesin** eşitsizlik, fonksiyonlar arasında bir komşulukta kesin eşitsizlik doğurur. Diziler için bu, [Teorem 21.3](#) idi.

Teorem 30.4 (Limit ve Sıralama). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$$

olsun.

1. a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $f(x) \leq g(x)$ ise — yani öyle bir $\delta > 0$ varsa ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) \leq g(x)$ — o zaman $\ell_1 \leq \ell_2$ 'dir.
2. $\ell_1 < \ell_2$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

İspat.

(1) $h(x) = g(x) - f(x)$ olsun; hipoteze göre öyle bir $\delta' > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta'$ iken $h(x) \geq 0$. Fark kuralı ([Sonuç 29.2 \(1\)](#)) ile

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell_2 - \ell_1.$$

Olmayana ergi ile ilerleyelim: $\ell_1 > \ell_2$ olsun. O zaman $\ell_2 - \ell_1 < 0$ 'dır ve [Teorem 30.2 \(3\)](#) gereği öyle bir $\delta'' > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta''$ iken $h(x) < 0$. Şimdi $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ alalım. a , A 'nın bir yığılma noktası olduğundan ([Tanım 17.1](#)) $0 < |x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan en az bir $x \in A$ vardır. Bu x için hem $h(x) \geq 0$ hem $h(x) < 0$ olur; çelişki. O hâlde $\ell_1 \leq \ell_2$.

(2) $\ell_1 < \ell_2$ olsun ve iki limitin “tam ortasına” kadar olan yarı uzaklığı alalım:

$$\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0.$$

Limit tanımlarını bu ε için uygulayarak öyle $\delta_1, \delta_2 > 0$ seçelim ki $x \in A$ için

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon, \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun ve $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ olsun. Birinci eşitsizlikten $f(x) < \ell_1 + \varepsilon$, ikincisinden $g(x) > \ell_2 - \varepsilon$ çıkar. Ama ε 'un seçimi gereği

$$\ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = \ell_2 - \varepsilon.$$

Dolayısıyla

$$f(x) < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} < g(x),$$

yani bu komşulukta $f(x) < g(x)$ 'tir.

■

Teoremin (1) maddesi “eşitsizlikler limite geçer” kuralıdır; hesaplarda genellikle sabit fonksiyonlarla kullanılır.

Sonuç 30.2 (Sabit Sınırlar Limite Geçer). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun; $b, c \in \mathbb{R}$ verilsin.

1. a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $b \leq f(x)$ ise $b \leq \ell$ 'dir.
2. a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $f(x) \leq c$ ise $\ell \leq c$ 'dir.

Özellikle, a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $b \leq f(x) \leq c$ ise $b \leq \ell \leq c$ 'dir.

İspat.

$u(x) = b$ ve $v(x) = c$ sabit fonksiyonlarını alalım; sabit fonksiyonun limiti kendisidir: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c$. (1) için Teorem 30.4 (1)'i $u \leq f$ çiftine uygulayalım: $b \leq \ell$. (2) için aynı teoremi $f \leq v$ çiftine uygulayalım: $\ell \leq c$. İkisi birlikte son ifadeyi verir.

■

Sıralama teoremi her iki fonksiyonun da limitinin olmasını ister. Karşılaştırılan fonksiyonlardan biri sıfıra gidiyorsa ötekinin limitinin varlığını **varsaymaya gerek yoktur**; onu ispatlarız.

Sonuç 30.3 (Sıfıra Giden Fonksiyonla Karşılaştırma). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $|f(x)| \leq g(x)$ ise ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 'dır. Özellikle: komşulukta $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ve $g \rightarrow 0$ ise $f \rightarrow 0$.

İspat.

Hipotez gereği öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_0$ iken $|f(x)| \leq g(x)$. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_1$ iken $|g(x)| < \varepsilon$. $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alalım. $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ ise

$$|f(x) - 0| = |f(x)| \leq g(x) \leq |g(x)| < \varepsilon.$$

Demek ki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. ($0 \leq f(x) \leq g(x)$ hâlinde $|f(x)| = f(x) \leq g(x)$ olduğundan ilk ifade uygulanır.)

■

Dikkat: bu sonucu Teorem 30.4 (1) ile “ $0 \leq \lim f \leq \lim g = 0$ ” diye kanıtlamak eksik olurdu, çünkü o teorem $\lim f$ 'nin var olduğunu baştan ister; burada varlık sonucun bir parçasıdır. Aynı nedenle Teorem 30.3 da bu sonucun bir özel hâli olarak görülebilir: $|f(x)g(x)| \leq M |f(x)|$ ve $M |f(x)| \rightarrow 0$.

⚠ Kesin eşitsizlik limitte kesin kalmaz

a 'nın bir delinmiş komşuluğundaki **her** x için $f(x) < g(x)$ olsa bile limitler eşit olabilir. Teorem 30.4 (1) yalnızca $\ell_1 \leq \ell_2$ der ve daha fazlasını diyemez; aşağıdaki örnek bunu gösteriyor. Diziler için Teorem 21.3'nin ardından gördüğümüz $0 < 1/n$ örneğinin (her n için kesin eşitsizlik, limitler ise $0 = 0$) fonksiyon karşılığıdır.

Örnek 30.3 (Kesin Eşitsizlik, Eşit Limitler). $A = (-1, 1) \setminus \{0\}$, $a = 0$ ve $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2$ olsun. Her $x \in A$ için $f(x) < g(x)$ olduğunu, buna karşın $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x \in A$ ise $0 < |x| < 1$ 'dir; dolayısıyla $x^2 > 0$ ve $x^2 = |x|^2 < 1$. Pozitif x^2 ile çarparak

$$x^4 = x^2 \cdot x^2 < x^2 \cdot 1 = x^2,$$

yani her $x \in A$ için $f(x) < g(x)$. Öte yandan x^4 ve x^2 polinomdur; Sonuç 29.3 ile $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. (Tanım kümesini $\mathbb{R}$ 'den A 'ya daraltmak limiti bozmaz: limit tanımındaki koşul daha az x için istenir, dolayısıyla $\mathbb{R}$ için bulunan δ burada da işe yarar.) Demek ki kesin eşitsizliğe rağmen limitler eşittir: $0 = 0$.

■

30.5 Sıkıştırma Teoremi

Sıralama teoremi iki fonksiyonun limitini karşılaştırır. Sıkıştırma teoremi ise limiti olup olmadığını **bilmediğimiz** bir fonksiyon hakkında sonuç verir: fonksiyon, aynı limite giden iki fonksiyonun arasına sıkışmışsa onun da limiti vardır ve aynıdır. Diziler için Teorem 21.6 olarak gördüğümüz bu teorem, limit hesabının en çok kullanılan aracıdır; ε - δ ile doğrudan uğraşmanın zor olduğu salınımlı fonksiyonlarda ve trigonometrik limitlerde başvuracağız.

Teorem 30.5 (Sıkıştırma Teoremi). $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A'$ olsun. Öyle bir $\delta_0 > 0$ bulunsun ki

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ ise $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta_1$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, yani

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Benzer biçimde $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ olduğundan öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta_2$ iken

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon.$$

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ alalım ve $x \in A, 0 < |x - a| < \delta$ olsun. Üç koşul da sağlandığından eşitsizlikleri zincirleyebiliriz:

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Zincirin iki ucu $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$, yani $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ verir. ε keyfi olduğundan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ 'dir.

■

Teoremi kullanmanın reçetesi şudur: limiti aranan g 'yi, limitini hesaplayabildiğimiz iki fonksiyonun arasına al; iki sınırın limiti aynıysa bitti. En sık kullanılan sınırlar $-|u(x)| \leq u(x) \cos(\cdot) \leq |u(x)|$ türünden, sınırlı bir çarpanın ± 1 ile değiştirilmesiyle elde edilir.

Örnek 30.4 (x Kare Çarpı Kosinüs Bir Bölü x Küp). $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Tanım kümesi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $0 \in A'$. Çarpım kuralı doğrudan kullanılamaz: $\cos(1/x^3)$ fonksiyonunun 0'da limiti yoktur (Örnek 28.2'teki gibi, $\cos$ değeri 1 ve -1 olan iki dizi 0'a yakınsatılabilir). Sıkıştırma teoremine başvuralım.

Kosinüs her reel sayıda -1 ile 1 arasındadır: her $x \neq 0$ için

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1.$$

Eşitsizliği $x^2 \geq 0$ ile çarpalım; çarpan negatif olmadığından yön değişmez:

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq x^2.$$

$f(x) = -x^2$ ve $h(x) = x^2$ alalım; [Sonuç 29.3](#) ile $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. [Teorem 30.5](#) gereği (δ_0 olarak herhangi bir pozitif sayı işe yarar; eşitsizlik bütün A üzerinde geçerlidir)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

Alternatif: $x^2 \rightarrow 0$ ve $\cos(1/x^3)$ sınırlı olduğundan [Teorem 30.3](#) da aynı sonucu verir.

■

Örnek 30.5 (İki Polinom Arasına Sıkışan Fonksiyon). $f, x \neq 2$ olan her x için tanımlı ve

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 3$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.

f hakkında eşitsizlikten başka hiçbir şey bilmiyoruz; limitin varlığını da ancak sıkıştırma teoremi verebilir. Alt sınır $g(x) = 2x - 1$ ve üst sınır $h(x) = x^2 - 2x + 3$ polinomlardır; [Sonuç 29.3](#) ile

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 4 - 4 + 3 = 3.$$

İki sınırın limiti aynıdır ve $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ eşitsizliği 2'nin her delinmiş komşuluğunda geçerlidir. [Teorem 30.5](#) gereği

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

Sınırların neden 2'de “buluştuğuna” bakmak öğreticidir: $h(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, yani iki sınır arasındaki açıklık 2'ye yaklaşıırken sıfıra iner; f 'ye başka yer kalmaz.

⚠ Sınırların limitleri farklıysa teorem susar

Sıkıştırma teoremi, alt ve üst sınırların limitleri **aynı** olduğunda çalışır. $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ eşitsizliği her $x \neq 0$ için doğrudur ve sınırların limitleri -1 ile 1 'dir; ama $\sin(1/x)$ 'in 0'da limiti yoktur ([Örnek 28.2](#)). Sınırlar farklı yerlere gidiyorsa aradaki fonksiyon hakkında ne “limiti vardır” ne de “yoktur” diyebiliriz; yalnızca, limiti varsa [Sonuç 30.2](#) gereği $[-1, 1]$ içinde olduğunu söyleyebiliriz.

30.6 Sinüs x Bölü x Limiti

$\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$ 'da tanımsızdır; pay ve payda birlikte sıfıra gider, bölüm kuralı uygulanamaz. Buna rağmen 0'a yaklaşıırken bölümün 1'e yaklaştığını göstereceğiz. Bu limit, trigonometrik fonksiyonların türevlerinin hesabında temel taşdır ve ispatı sıkıştırma teoreminin en güzel örneğidir: $\frac{\sin x}{x}$ 'i, birim çemberdeki üç bölgenin alanlarını karşılaştırarak $\cos x$ ile 1 arasına sıkıştırırız.

i Kabul edilen trigonometrik ve geometrik olgular

Sinüs ve kosinüs bu derste henüz analitik olarak tanımlanmadı; kesin tanımları Analiz 2'de kuvvet serileriyle yapılacaktır. Burada liseden bilinen geometrik tanımlarıyla çalışıyor ve şunları kabul ediyoruz:

1. Birim çember üzerinde $(1, 0)$ noktasından saat yönünün tersine x uzunluğunda yay gidildiğinde varılan nokta $(\cos x, \sin x)$ 'tir. Her x için $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$; $\sin$ tek, $\cos$ çift fonksiyondur: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.
2. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\sin x > 0$ ve $\cos x > 0$; $\cos x \neq 0$ olduğunda $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
3. Yarım açı özdeşliği: her x için $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.
4. Tabanı 1, yüksekliği y olan üçgenin alanı $\frac{y}{2}$; birim dairede merkez açısı x radyan ($0 < x < \pi/2$) olan daire diliminin alanı $\frac{x}{2}$ 'dir. Bir bölge başka bir bölgenin içinde kalıyor ve aralarında boş yer bulunuyorsa, içtekinin alanı dıştakinin alanından kesinlikle küçüktür.

Bu olgulardan türeteceğimiz her şey, ileride sinüs ve kosinüs analitik olarak tanımlandığında da geçerli kalacaktır; [Süreklilik](#) bölümünde aynı düzeyde bir kabulle $\sin$ ve $\cos$ 'un sürekliliği gösterilecektir.

Teorem 30.6 (Sinüs x Bölü x Limiti).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

İspat.

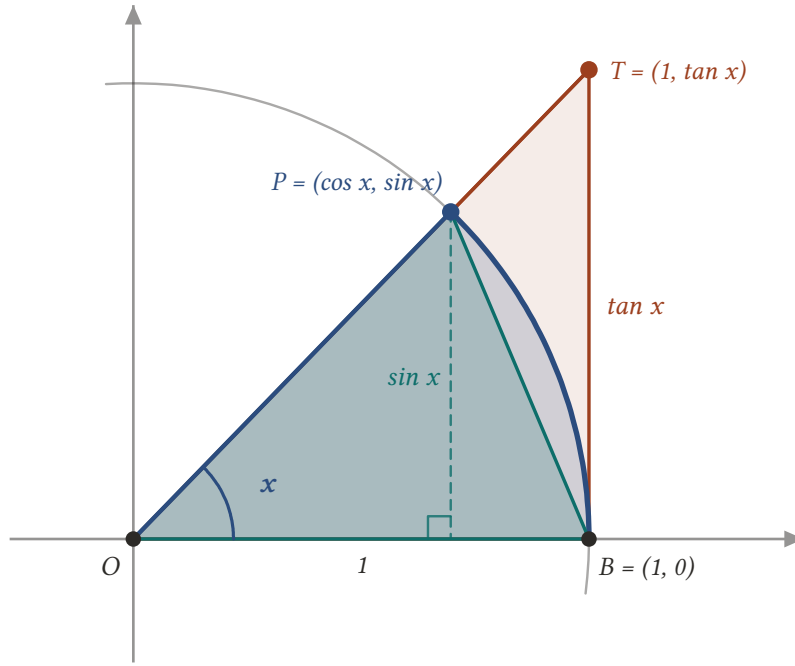
Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir ve 0 bu kümenin bir yığılma noktasıdır. İspat beş adımdan oluşur: önce $0 < x < \pi/2$ için geometrik bir eşitsizlik, sonra bunun $\frac{\sin x}{x}$ için verdiği sıkıştırma eşitsizliği, sonra negatif x 'lere geçiş, sonra yardımcı limit $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ve son olarak sıkıştırma teoremi.

Adım 1: Geometrik eşitsizlik. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olsun. Birim çemberde $O = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $P = (\cos x, \sin x)$ ve $T = (1, \tan x)$ noktalarını alalım ($\cos x > 0$ olduğundan $\tan x$ tanımlıdır). Üç bölge iç içedir:

- OBP üçgeni: tabanı $OB = 1$, yüksekliği P 'nin x -eksenine uzaklığı $\sin x$; alanı $\frac{\sin x}{2}$.
- Merkez açısı x olan OBP daire dilimi; alanı $\frac{x}{2}$.
- OBT dik üçgeni: tabanı $OB = 1$, yüksekliği $BT = \tan x$; alanı $\frac{\tan x}{2}$.

Üçgen OBP daire diliminin, daire dilimi de OBT üçgeninin içinde kalır (çember yayı, P ile B 'yi birleştiren kirişin dışında ve B 'deki teğet doğrusunun içindedir). Alanlar karşılaştırılınca

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}, \quad \text{yani} \quad \sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$



$$\text{alan: } \text{üçgen } OBP \leq \text{daire dilimi } OBP \leq \text{üçgen } OBT$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

Şekil 30.2: Birim çemberde x açısı için üç alan iç içedir: OBP üçgeni (yüksekliği $\sin x$), OBP daire dilimi (alanı $x/2$) ve OBT dik üçgeni (yüksekliği $\tan x$). Alanları karşılaştırmak $\sin x \leq x \leq \tan x$ eşitsizliğini verir; $\sin x$ 'e bölüp sıkıştırınca $\sin x/x \rightarrow 1$ çıkar.

Adım 2: Sıkıştırma eşitsizliği. (1)'de $\sin x > 0$ olduğundan üç terimi de $\sin x$ 'e bölebiliriz; yön değişmez:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Üç terim de pozitiftir; pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirir ($0 < u < v \Rightarrow 0 < 1/v < 1/u$, Önerme 7.10). Böylece

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Adım 3: Negatif tarafa geçiş. $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ olsun; o zaman $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ ve (2) $-x$ için geçerlidir. $\sin$ tek, $\cos$ çift fonksiyon olduğundan

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}, \quad \cos(-x) = \cos x;$$

yani $\frac{\sin x}{x}$ ve $\cos x$ çift fonksiyonlardır ve (2) negatif x için de doğrudur. Sonuç: $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ olan her x için

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (3)$$

Adım 4: Yardımcı limit $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. (1)'den ve $\sin$ 'in tek fonksiyon olmasından, $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$ için $|\sin t| < |t|$ elde ederiz ($t > 0$ ise doğrudan (1); $t < 0$ ise $|\sin t| = |\sin(-t)| = \sin(-t) < -t = |t|$). Yarım açı özdeşliğiyle, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ için

$$0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|^2 \leq 2 \left| \frac{x}{2} \right|^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Yani $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$. Alt sınır bir polinomdur ve $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1$ (Sonuç 29.3); üst sınır sabittir.

Teorem 30.5 gereği $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Adım 5: Sıkıştırma. (3) eşitsizliği $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ ile **Teorem 30.5**'un hipotezini sağlar: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $h(x) = 1$. Adım 4 ile $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, sabit fonksiyon için $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$. O hâlde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

■

İspatın yan ürünleri de en az sonuç kadar değerlidir; onları toplayalım. Aşağıdaki (3) maddesi, kosinüsün 1'e "x'ten daha hızlı" yaklaştığını söyler ve $\cos$ 'un türevini hesaplamak gerekecektir.

Sonuç 30.4 (Sinüs ve Kosinüsün Sıfırdaki Özel Limitleri).

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
5. Her $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$.

İspat.

(1) **Teorem 30.6** ispatının Adım 4'ünde $0 < |x| < \pi/2$ için $|\sin x| < |x|$ görüldü. $g(x) = |x|$ için $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 'dır (**Teorem 30.1**, birim fonksiyona uygulanarak). **Sonuç 30.3** ile $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

(2) Aynı ispatın Adım 4'ünde gösterildi.

(3) Adım 4'teki $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ eşitsizliğini $|x| > 0$ 'a bölelim: $0 < |x| < \pi/2$ için

$$\left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| = \frac{1 - \cos x}{|x|} \leq \frac{x^2}{2|x|} = \frac{|x|}{2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2} = 0$ olduğundan **Sonuç 30.3** ile $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

(4) $0 < |x| < \pi/2$ için $\cos x > 0$, dolayısıyla $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$. Bölüm ve çarpım kuralları (**Teorem 29.2**) ile — paydanın limiti $1 \neq 0$ 'dır ve payda komşulukta sıfırdan farklıdır —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

(5) $x \neq 0$ için $\frac{\sin(kx)}{x} = k \cdot \frac{\sin(kx)}{kx}$ yazalım. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$ olduğunu bileşke teoremiyle (**Teorem 29.3**) görelim: iç fonksiyon $u(x) = kx$ ($A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a = 0$), dış fonksiyon $v(y) = \frac{\sin y}{y}$ ($B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b = 0$). Koşulları denetleyelim: $x \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken $kx \neq 0$, yani $u(x) \in B$ (koşul 1) ve $u(x) \neq b$ (koşul 4, her δ_0 ile); $\lim_{x \rightarrow 0} kx = 0 = b$ (koşul 2, sabitle çarpım kuralı); $\lim_{y \rightarrow 0} v(y) = 1$ (koşul 3, **Teorem 30.6**). Teorem $\lim_{x \rightarrow 0} v(u(x)) = 1$ verir; sabitle çarpım kuralıyla $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k \cdot 1 = k$.

■

30.7 Alıştırmalar

Alıştırma 30.1 (Sıralama ve Sıkıştırma Üzerine).

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ limitini hesaplayınız.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.
- c) $f : A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A'$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0$ olsun. a 'nın bir delinmiş komşuluğunda $\sqrt{f(x)}$ 'in tanımlı olduğunu ve $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ olduğunu gösteriniz.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ limitini bulunuz.
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor}$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) $0 < |x| < \frac{\pi}{10}$ için $0 < |5x| < \frac{\pi}{2}$, dolayısıyla $\sin 5x \neq 0$ (kabul edilen olgu 2 ve tek fonksiyon olma); fonksiyon bu delinmiş komşulukta tanımlıdır. Pay ve paydayı $x \neq 0$ 'a bölelim:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}.$$

Sonuç 30.4 (5) ile pay 3'e, payda 5 $\neq 0$ 'a gider; bölüm kuralı (Teorem 29.2 (4)) ile

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

b) Yarım açı özdeşliğiyle $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; $x \neq 0$ için

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin(x/2)}{x} \right)^2.$$

Sonuç 30.4 (5)'i $k = \frac{1}{2}$ ile uygularsak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2}$, sabitle çarpım kuralıyla $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x/2)}{x} = 1$. Kuvvet kuralı (Sonuç 29.2 (3)) ile karenin limiti $1^2 = 1$, sabitle çarpım kuralıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

c) $\ell > 0$ olduğundan Teorem 30.2 (2) gereği öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki $x \in A, 0 < |x - a| < \delta_0$ iken $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$; bu komşulukta $\sqrt{f(x)}$ tanımlıdır ve $\sqrt{f(x)} \geq 0$. Aşağıdaki fonksiyonların hepsini $A_0 = \{x \in A : 0 < |x - a| < \delta_0\}$ kümesi üzerinde düşünelim; $a \in A'$ olduğundan a, A_0 'ın da bir yığılma noktasıdır ve tanım kümesini A 'dan A_0 'a daraltmak var olan limitleri değiştirmez (limit tanımındaki koşul daha az x için istenir, dolayısıyla A için bulunan δ burada da işe yarar). Böyle x 'ler için, $(\sqrt{f(x)} - \sqrt{\ell})(\sqrt{f(x)} + \sqrt{\ell}) = f(x) - \ell$ özdeşliğinden ve $\sqrt{f(x)} + \sqrt{\ell} \geq \sqrt{\ell} > 0$ olmasından

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{\ell}| = \frac{|f(x) - \ell|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{|f(x) - \ell|}{\sqrt{\ell}}.$$

Sağ taraftaki $g(x) = \frac{|f(x) - \ell|}{\sqrt{\ell}}$ fonksiyonu 0'a gider: fark kuralıyla $f(x) - \ell \rightarrow 0$, Teorem 30.1 ile $|f(x) - \ell| \rightarrow 0$, sabitle çarpım kuralıyla $g(x) \rightarrow 0$. Sonuç 30.3 gereği $\sqrt{f(x)} - \sqrt{\ell} \rightarrow 0$; toplam kuralıyla (sabit $\sqrt{\ell}$ eklenerek) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.

d) Taban fonksiyonunun tanımı (Tanım 12.1, Teorem 12.3) gereği her $y \in \mathbb{R}$ için $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$, yani $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$. Bunu $y = 1/x$ ($x \neq 0$) için yazalım:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

$x > 0$ ise x ile çarpınca yön korunur: $1 - x < x \lfloor 1/x \rfloor \leq 1$. $x < 0$ ise yön çevrilir: $1 \leq x \lfloor 1/x \rfloor < 1 - x$. Her iki durumda da $x \lfloor 1/x \rfloor$, 1 ile $1 - x$ arasındadır; dolayısıyla her $x \neq 0$ için

$$\left| x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| \leq |x|.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ olduğundan [Sonuç 30.3](#) ile $x \lfloor 1/x \rfloor - 1 \rightarrow 0$, yani

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

(Taban fonksiyonu 0 yakınında sonsuz kez sıçrar; x çarpanı sıçramaları $|x|$ boyuna indirir. Sıkıştırma teoremi de doğrudan uygulanabilirdi: $x > 0$ için $1 - x \leq x \lfloor 1/x \rfloor \leq 1$, $x < 0$ için $1 \leq x \lfloor 1/x \rfloor \leq 1 - x$; iki durumu tek eşitsizlikte toplayan $1 - |x| \leq x \lfloor 1/x \rfloor \leq 1 + |x|$ sınırlarının limiti 1'dir.)

e) Dizisel ölçütle ([Sonuç 28.1](#)) gösterelim. $x_n = \frac{1}{n}$ ve $y_n = -\frac{1}{n}$ dizileri $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ içindedir ve 0'a yakınsar. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ olsun.

$$\varphi(x_n) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}, \quad \varphi(y_n) = \frac{\sin(-1/n)}{1/n} = -\frac{\sin(1/n)}{1/n}.$$

[Teorem 30.6](#) ve dizisel ölçüt ([Teorem 28.1](#), $\Rightarrow$ yönü) gereği $\frac{\sin(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$; dolayısıyla $\varphi(x_n) \rightarrow 1$ ve $\varphi(y_n) \rightarrow -1$. Görüntü dizileri farklı limitlere gittiğinden $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ yoktur.

Gözlem: $x > 0$ için $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x < 0$ için $\varphi(x) = -\frac{\sin x}{x}$; fonksiyon 0'a sağdan yaklaşırken 1'e, soldan yaklaşırken -1'e gider. "Sağdan" ve "soldan" limitleri bir sonraki bölümde tanımlayacağız.

■

Limitin sıralamayla ilişkisi tamamlandı: mutlak değer ve sıfırdan farklı limit komşuluğa taşınır, eşitsizlikler limite " $\leq$ " olarak geçer, sıkıştırma limitin varlığını verir ve bunların birleşimi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gibi temel limitleri kanıtlar. Son alıştırma gördüğümüz gibi bazı fonksiyonlar bir noktaya iki yandan farklı değerlere yaklaşır; limitin bu incelmış hâlini bir sonraki bölümde inceliyoruz: [Tek Yönlü Limitler](#).

31. Tek Yönlü Limitler

Önceki bölümlerde taban fonksiyonu $\lfloor x \rfloor$ 'in hiçbir $k \in \mathbb{Z}$ noktasında limiti olmadığını iki yöntemle gösterdik: k 'ya sağdan yaklaşan $x_n = k + \frac{1}{n}$ dizisinde fonksiyon değerleri hep k , soldan yaklaşan $y_n = k - \frac{1}{n}$ dizisinde hep $k - 1$ 'dir. "Limit yok" demek burada bilgiyi gizlemektir: fonksiyon k 'nın sağında ve solunda ayrı ayrı gayet düzenli davranır; yalnızca iki tarafın hedefi farklıdır. Bu bölümde limit kavramını **tek bir yöne** kısıtlayarak bu bilgiyi kurtaracağız.

Sağ ve sol limitler yalnızca "bozuk" noktaları sınıflandırmakla kalmaz; sonraki bölümlerde süreksizlik türlerini (Tanım 34.1) tanımlamanın ve monoton fonksiyonların davranışını anlamamanın temel aracı olur. Bölümün sonunda tamlık aksiyomunun güzel bir sonucunu ispatlayacağız: monoton bir fonksiyonun her iç noktada sağ ve sol limiti **her zaman** vardır.

31.1 Sağ Limit ve Sol Limit

Tanım 27.1 ile $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ derken a 'nın **her iki tarafındaki** x 'leri, yani $0 < |x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan bütün $x \in A$ noktalarını gözetiyorduk. Sezgi basit: yalnızca a 'nın sağındaki ($x > a$) noktalara bakarsak "sağ limit", yalnızca solundakilere ($x < a$) bakarsak "sol limit" elde ederiz. Tek dikkat edilecek şey, baktığımız tarafta a 'ya yığılan noktalar bulunmasıdır; aksi hâlde koşul boş yere sağlanır.

Tanım 31.1 (Sağ Limit ve Sol Limit). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, \ell \in \mathbb{R}$ olsun.

1. a noktası $A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun (Tanım 17.1). Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in A, \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa, ℓ sayısına f 'nin a noktasındaki **sağ limiti** (right-hand limit) denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{ya da kısaca} \quad f(a^+) = \ell$$

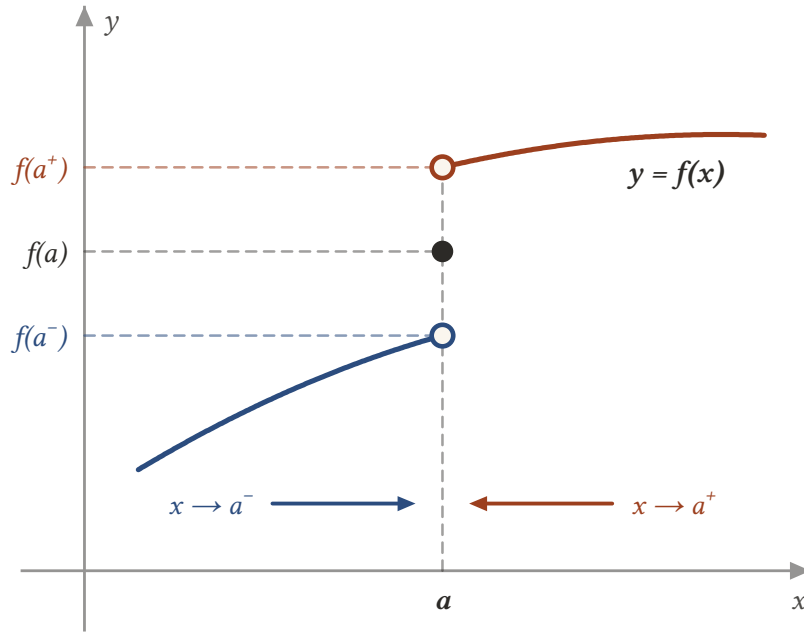
yazılır.

2. a noktası $A \cap (-\infty, a)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in A, \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa, ℓ sayısına f 'nin a noktasındaki **sol limiti** (left-hand limit) denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ya da $f(a^-) = \ell$ yazılır.

Sağ ve sol limitlere birlikte **tek yönlü limitler** (one-sided limits) denir.



Şekil 31.1: a noktasında sıçrayan bir fonksiyon. Soldan yaklaşınca değerler $f(a^-)$ 'ye, sağdan yaklaşınca $f(a^+)$ 'ya yığılır; iki tek yönlü limit de vardır ama farklıdır, bu yüzden $x \rightarrow a$ limiti yoktur. Fonksiyonun a 'daki değeri $f(a)$ ise ikisinden de bağımsızdır: tek yönlü limitler yalnızca a 'nın yanındaki noktalara bakar.

Tanımdaki yığılma noktası koşulunu açalım. a 'nın $A \cap (a, \infty)$ kümesinin yığılma noktası olması, her $\delta > 0$ için delinmiş komşuluk $B^*(a, \delta)$ 'nin bu kümeden bir nokta içermesi demektir; $B^*(a, \delta) \cap A \cap (a, \infty) = A \cap (a, a + \delta)$ olduğundan koşul, **her $\delta > 0$ için $A \cap (a, a + \delta) \neq \emptyset$** biçimini alır. Yani a 'nın hemen sağında, istediğimiz kadar yakında, A 'nın noktaları vardır. a 'nın kendisi A 'da olmak zorunda değildir; olsa bile $f(a)$ değeri sağ limiti etkilemez, çünkü koşulda yalnızca $x > a$ olan noktalar geçer.

Sağ limit aslında yeni bir kavram değildir: f 'nin tanım kümesini a 'nın sağındaki noktalara kısıtlayıp bildiğimiz limiti almaktan ibarettir. Bu gözlem, limitler için ispatladığımız her teoremi tek yönlü limitlere bedavaya aktaracak.

Önerme 31.1 (Tek Yönlü Limit, Kısıtlamanın Limitidir). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a, \ell \in \mathbb{R}$ olsun; $A^+ = A \cap (a, \infty)$, $A^- = A \cap (-\infty, a)$ yazalım. a , A^+ kümesinin bir yığılma noktasıysa aşağıdaki birinci denklik, A^- kümesinin bir yığılma noktasıysa ikinci denklik geçerlidir:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f|_{A^+}(x) = \ell \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f|_{A^-}(x) = \ell.$$

Burada $f|_{A^+}$, f 'nin A^+ kümesine kısıtlamasıdır ve sağdaki limit [Tanım 27.1](#) anlamındadır.

İspat.

Sağ limit için yazalım; sol limit aynıdır. İki tanımın da ön koşulu aynıdır: a , A^+ kümesinin yığılma noktasıdır. Şimdi $x \in A^+$ olsun. $x > a$ olduğundan $|x - a| = x - a$ 'dır; dolayısıyla

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow 0 < x - a < \delta \Leftrightarrow a < x < a + \delta.$$

O hâlde " $x \in A^+$ ve $0 < |x - a| < \delta$ " koşulu ile " $x \in A$ ve $a < x < a + \delta$ " koşulu aynı x 'leri seçer. Her iki tanımda bu x 'ler için istenen sonuç da aynıdır: $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. İki tanım kelimesi kelimesine örtüşür. ■

Kısıtlamayla ilgili küçük ama sık kullanılacak bir gözlem daha: bir fonksiyonun limiti varsa, tanım kümesini küçültmek (yığılma noktası koşulunu bozmamak kaydıyla) limiti değiştirmez.

Lemma 31.1 (Kısıtlamanın Limiti). $g : B \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ ve $C \subseteq B$ olsun. a, C 'nin bir yığılma noktasıysa $\lim_{x \rightarrow a} g|_C(x) = \ell$ 'dir. Aynı ifade sağ ve sol limitler için de geçerlidir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Hipotez gereği $x \in B, 0 < |x - a| < \delta$ iken $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. $C \subseteq B$ olduğundan bu koşul $x \in C, 0 < |x - a| < \delta$ olan her x için de sağlanır; bu da tam olarak $\lim_{x \rightarrow a} g|_C(x) = \ell$ demektir. Tek yönlü sınırlarda $0 < |x - a| < \delta$ yerine $a < x < a + \delta$ ya da $a - \delta < x < a$ yazılır; ispat değişmez.

■

Sonuç 31.1 (Limit Teoremleri Tek Yönlü Limitler İçin de Geçerlidir). $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun ve $a, A^+ = A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun (sol limitler için aynı koşul $A^- = A \cap (-\infty, a)$ üzerinde istenir). Sağ (ve sol) limitler için aşağıdakiler geçerlidir:

1. **Teklik.** Sağ limit varsa tektir.
2. **Aritmetik.** $f(a^+) = \ell_1$ ve $g(a^+) = \ell_2$ ise $(f + g)(a^+) = \ell_1 + \ell_2$, $(fg)(a^+) = \ell_1 \ell_2$, $(cf)(a^+) = c\ell_1$; ayrıca $\ell_2 \neq 0$ ve g , a 'nın sağındaki noktalarda sıfırdan farklıysa $(f/g)(a^+) = \ell_1/\ell_2$ 'dir.
3. **Sıralama.** a 'nın sağındaki noktalarda $f(x) \leq g(x)$ ve iki sağ limit de varsa $f(a^+) \leq g(a^+)$ 'dir.
4. **Sıkıştırma.** a 'nın sağındaki noktalarda $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ve $f(a^+) = h(a^+) = \ell$ ise $g(a^+) = \ell$ 'dir.
5. **Sınırlı çarpı sıfır.** $f(a^+) = 0$ ve g , a 'nın sağında sınırlıysa $(fg)(a^+) = 0$ 'dir.

İspat.

Önerme 31.1 gereği sağ limit, $f|_{A^+}$ 'nin a 'daki limitidir. Her maddede geçen fonksiyonların hepsini A^+ kümesine kısıtlayıp ilgili teoremi uygulamak yeter: teklik için **Teorem 27.1**, aritmetik için **Teorem 29.2**, sıralama için **Teorem 30.4**, sıkıştırma için **Teorem 30.5**, sınırlı çarpı sıfır için **Teorem 30.3**. “ a 'nın sağındaki noktalarda” ifadesi, “ a 'nın A^+ içindeki bir delinmiş komşuluğunda” demektir; teoremlerin hipotezleri tam bunu ister.

■

Tanımı iki temel örnekte çalıştıralım. İlki, yalnızca bir tarafı olan bir fonksiyon.

Örnek 31.1 (Karekökün Sıfırdaki Sağ Limiti). $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ olsun (karekökün varlığı için **Teorem 13.2**). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Önce ön koşul: $A = [0, \infty)$ için $A \cap (0, \infty) = (0, \infty)$ ve her $\delta > 0$ için $\frac{\delta}{2} \in (0, \delta) \cap A$; yani $0, A \cap (0, \infty)$ kümesinin yığılma noktasıdır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \varepsilon^2$ alalım. $0 < x < \delta$ ise $0 \leq \sqrt{x}$ ve $\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ olur; gerçekten $\sqrt{x} \geq \varepsilon$ olsaydı

Önerme 7.12 gereği (negatif olmayan sayılarda kare alma sıralamayı korur) $x \geq \varepsilon^2 = \delta$ olurdu. Dolayısıyla

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Bu, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ demektir.

Burada $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ olduğundan 0 'da sol limitten söz edilemez. Öte yandan $0, A$ 'nın bir yığılma noktasıdır ve **Tanım 27.1** anlamındaki limit de vardır: $x \in A$ için $0 < |x - 0| < \delta$ koşulu zaten $0 < x < \delta$ demektir, yani yukarıdaki hesap kelimesi kelimesine $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ eşitliğini de verir. Genel kural: $A \subseteq [a, \infty)$ ise a 'daki limit ile sağ limit aynı şeydir.

■

İkinci örnek, iki tarafı farklı olan bir fonksiyon.

Örnek 31.2 (İşaret Fonksiyonunun Sıfırdaki Tek Yönlü Limitleri). $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{x}$ olsun. $f(0^+) = 1, f(0^-) = -1$ olduğunu ve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'in var olmadığını gösterelim.

Çözüm.

$x > 0$ için $|x| = x$, dolayısıyla $f(x) = 1$; $x < 0$ için $|x| = -x$, dolayısıyla $f(x) = -1$ (**Tanım 8.1**). Yani f , sıfır dışında işaret fonksiyonuyla (**Tanım 7.6**) çakışır.

Sağ limit. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = 1$ alalım (aslında her δ işe yarar). $0 < x < 1$ ise $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. O hâlde $f(0^+) = 1$.

Sol limit. Aynı biçimde $-1 < x < 0$ ise $|f(x) - (-1)| = 0 < \varepsilon$; yani $f(0^-) = -1$.

Limit yok. Diyelim ki $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ olsun. $\varepsilon = 1$ için bir $\delta > 0$ bulunur: $0 < |x| < \delta$ iken $|f(x) - \ell| < 1$. $x = \frac{\delta}{2}$ ve $x' = -\frac{\delta}{2}$ noktaları bu koşulu sağlar; $f(x) = 1$, $f(x') = -1$ olduğundan $|1 - \ell| < 1$ ve $|-1 - \ell| < 1$. Üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2)

$$2 = |(1 - \ell) - (-1 - \ell)| \leq |1 - \ell| + |-1 - \ell| < 1 + 1 = 2,$$

yani $2 < 2$; çelişki. Limit yoktur. Aşağıdaki **Sonuç 31.2** bu sonucu tek satırda verecek: sağ ve sol limitler farklıysa limit olamaz.

■

31.2 Limit ile Tek Yönlü Limitlerin İlişkisi

Yukarıdaki örnek genel kuralı ele veriyor: limit, sağ ve sol limitlerin “anlaşması” demektir.

Teorem 31.1 (Limitin Varlığı ile Sağ ve Sol Limitler). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun ve a noktası hem $A \cap (a, \infty)$ hem de $A \cap (-\infty, a)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. O zaman

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

Başka bir deyişle: limit vardır ancak ve ancak sağ ve sol limitlerin ikisi de vardır ve birbirine eşittir; bu durumda limit, ortak değere eşittir.

İspat.

$A \cap (a, \infty) \subseteq A$ olduğundan a , A 'nın da yığılma noktasıdır; dolayısıyla soldaki limit anlamlıdır.

($\Rightarrow$) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Tanım gereği $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in A$ ve $a < x < a + \delta$ ise $0 < x - a = |x - a| < \delta$ olur; o hâlde $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Bu, aynı δ ile sağ limit tanımının sağlandığını gösterir: $f(a^+) = \ell$. $x \in A$ ve $a - \delta < x < a$ ise $0 < a - x = |x - a| < \delta$; yine $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, yani $f(a^-) = \ell$.

($\Leftarrow$) $f(a^+) = f(a^-) = \ell$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Sağ limit tanımından $x \in A$, $a < x < a + \delta_1$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta_1 > 0$; sol limit tanımından $x \in A$, $a - \delta_2 < x < a$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta_2 > 0$ vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alalım. $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ olsun. Üçlem yasası gereği ya $x > a$ ya $x < a$ 'dır ($x = a$ olamaz, çünkü $|x - a| > 0$).

- $x > a$ ise $a < x < a + \delta \leq a + \delta_1$; sağ limit koşulu $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ verir.
- $x < a$ ise $a - \delta_2 \leq a - \delta < x < a$; sol limit koşulu $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ verir.

Her iki hâlde de $|f(x) - \ell| < \varepsilon$; yani $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

■

Bu teorem, bir limiti hesaplamanın ya da yokluğunu göstermenin en pratik yolunu verir: parçalı tanımlı bir fonksiyonda her parçanın kendi limitini hesapla, sonra karşılaştır.

i Tek tarafı olan noktalar

Teoremda a 'nın iki tarafta da yığılma noktası olması istendi. Bir yığılma noktasının en az bir tarafta yığılma noktası olması zorunludur: $a \in A'$ ise $B^*(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ kümesi her δ için A 'dan nokta içerir. Bir δ_1 için $A \cap (a, a + \delta_1) = \emptyset$ ve bir δ_2 için $A \cap (a - \delta_2, a) = \emptyset$ olsaydı, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ için $B^*(a, \delta) \cap A = \emptyset$ olurdu; çelişki.

a yalnızca **bir** tarafta yığılma noktasıysa – örneğin $A = [0, 1]$ ve $a = 0$ – limit ile o taraftaki tek yönlü limit aynı şeydir. Diyelim a , $A \cap (a, \infty)$ kümesinin yığılma noktası olsun ama bir $\delta_2 > 0$ için $A \cap (a - \delta_2, a) = \emptyset$ olsun. İspatın ($\Rightarrow$) yarısı aynen geçerlidir. ($\Leftarrow$) yarısında sağ limitin verdiği δ_1 ile $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınır: $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ ise x , a 'nın solunda olamaz (çünkü $A \cap (a - \delta_2, a)$ boştur), dolayısıyla $a < x < a + \delta_1$ ve sağ limit koşulu $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ verir. **Örnek 31.1** sonundaki gözlem bunun özel hâlidir. Bu yüzden “limit vardır ancak ve ancak var olan tek yönlü limitler birbirine eşittir” cümlesi her durumu kapsar.

Sonuç 31.2 (Limitin Yokluğu için Tek Yönlü Ölçüt). a , **Teorem 31.1** hipotezini sağlasın. Sağ ve sol limitlerden en az biri yoksa **ya da** ikisi de var olduğu hâlde $f(a^+) \neq f(a^-)$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.

İspat.

Karşıt tersini gösterelim: limit var ve ℓ 'ye eşit olsun. **Teorem 31.1**'in ($\Rightarrow$) yönü gereği sağ ve sol limitlerin ikisi de vardır ve ikisi de ℓ 'ye eşittir; yani ikisi de var ve $f(a^+) = f(a^-)$. Bu, sonucun hipotezinin olumsuzlamasıdır.

■

Örnek 31.3 (Taban Fonksiyonunun Tam Sayılardaki Tek Yönlü Limitleri). $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. $f(k^+) = k$ ve $f(k^-) = k - 1$ olduğunu gösterelim; sonuç olarak $\lim_{x \rightarrow k} \lfloor x \rfloor$ yoktur.

Çözüm.

Tanım 12.1 gereği $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ koşulunu sağlayan tek tam sayıdır. $k < x < k + 1$ ise $k \leq x < k + 1$ olduğundan bu tek tam sayı k 'dir: $\lfloor x \rfloor = k$. Benzer biçimde $k - 1 \leq x < k$ ise $\lfloor x \rfloor = k - 1$.

Sağ limit. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = 1$ alalım. $k < x < k + 1$ ise $|\lfloor x \rfloor - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$. Yani $f(k^+) = k$.

Sol limit. Yine $\delta = 1$: $k - 1 < x < k$ ise $|\lfloor x \rfloor - (k - 1)| = 0 < \varepsilon$. Yani $f(k^-) = k - 1$.

$k \neq k - 1$ olduğundan **Sonuç 31.2** gereği $\lim_{x \rightarrow k} \lfloor x \rfloor$ yoktur. Önceki bölümlerde dizisel ve Cauchy ölçütleriyle uzun uzun gösterdiğimiz sonuç, tek yönlü limitlerle iki satıra sığdı. Bir gözlem daha: $f(k) = k = f(k^+)$, yani fonksiyonun k 'daki değeri sağ limitiyle uyuşur, sol limitiyle uyuşmaz. Süreklilik bölümünde buna “sağdan sürekli” diyeceğiz.

■

Örnek 31.4 (Parçalı Fonksiyonda Parametre Bulma). $c \in \mathbb{R}$ bir sabit ve

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + c, & x < 1 \text{ ise,} \\ 3x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 'in var olması için c ne olmalıdır?

Çözüm.

1 noktası hem $(1, \infty)$ hem de $(-\infty, 1)$ kümesinin yığılma noktasıdır; **Teorem 31.1** uygulanabilir.

Sağ limit. $(1, \infty)$ üzerinde f , $p(x) = 3x - 1$ polinomuyla çakışır: $f|_{(1, \infty)} = p|_{(1, \infty)}$. **Sonuç 29.3** gereği $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = p(1) = 2$; **Lemma 31.1** gereği kısıtlamanın da limiti 2'dir; **Önerme 31.1** gereği bu, $f(1^+) = 2$ demektir.

Sol limit. $(-\infty, 1)$ üzerinde f , $q(x) = x^2 + c$ polinomuyla çakışır; aynı akıl yürütmeyeyle $f(1^-) = q(1) = 1 + c$.

Teorem 31.1 gereği limit vardır ancak ve ancak $1 + c = 2$, yani $c = 1$ ise. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 'dir; üstelik $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ olduğundan limit, fonksiyonun o noktadaki değerine de eşittir.

■

🔗 Parçalı fonksiyonlarda çalışma reçetesi

Bir parçanın sınır noktasında limit sorulduğunda: (1) sınırın sağındaki formülle sağ limiti, solundaki formülle sol limiti hesapla — her parça çoğu zaman bir polinom ya da rasyonel fonksiyondur, **Sonuç 29.3** ve **Sonuç 29.4** kısıtlamayla birlikte işi bitirir; (2) ikisi eşitse limit odur, değilse limit yoktur (**Sonuç 31.2**). Fonksiyonun sınır noktasındaki **değeri** hesaba hiç girmez.

31.3 Tek Yönlü Limitler için Dizisel Ölçüt

Teorem 28.1 fonksiyon limitini dizi diline çevirmişti. Aynı çeviri tek yönlü limitler için de geçerlidir; tek fark, a 'ya yaklaşan dizilerin **tek taraftan** gelmesidir.

Teorem 31.2 (Tek Yönlü Limitler için Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun ve $a, A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. O zaman $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ olması için gerek ve yeter koşul şudur: A içinde, her terimi a 'dan büyük olan ve a 'ya yakınsayan **her** (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$ 'dir. Sol limit için aynı ifade, terimleri a 'dan küçük dizilerle geçerlidir.

İspat.

$(\Rightarrow) f(a^+) = \ell$ olsun; (x_n) , A içinde $x_n > a$ ve $x_n \rightarrow a$ koşullarını sağlayan bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Sağ limit tanımından $x \in A, a < x < a + \delta$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. $x_n \rightarrow a$ olduğundan (**Tanım 20.1**) bu δ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır: $n \geq N$ iken $|x_n - a| < \delta$. $x_n > a$ olduğundan bu, $a < x_n < a + \delta$ demektir; $x_n \in A$ ile birlikte sağ limit koşulu $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ verir. Yani $n \geq N$ için $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$; bu da $f(x_n) \rightarrow \ell$ demektir.

$(\Leftarrow)$ Olmayana ergi ile. Sağ taraftaki dizi koşulu sağlansın ama $f(a^+) = \ell$ olmasın. Sağ limit tanımının olumsuzlaması şudur: öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için $a < x < a + \delta$ ve $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$ olan bir $x \in A$ bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{n}$ alıp böyle bir noktayı x_n diye adlandıralım:

$$x_n \in A, \quad a < x_n < a + \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

$a < x_n < a + \frac{1}{n}$ ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (**Örnek 20.1**) olduğundan sıkıştırma teoremi (**Teorem 21.6**) $x_n \rightarrow a$ verir. Böylece (x_n) , hipotezdeki türden bir dizidir: A 'da, terimleri a 'dan büyük, a 'ya yakınsak. Hipotez gereği $f(x_n) \rightarrow \ell$ olmalıdır. Ama $\varepsilon = \varepsilon_0$ için hiçbir N işe yaramaz, çünkü her n için $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ 'dır. Çelişki; o hâlde $f(a^+) = \ell$ 'dir.

■

İspat (ikinci yol).

Önerme 31.1 gereği $f(a^+) = \ell$, $f|_{A^+}$ 'nın a 'daki limitinin ℓ olması demektir. **Teorem 28.1** bunu, " $A^+ \setminus \{a\}$ içinde a 'ya yakınsayan her dizi için görüntü dizisi ℓ 'ye yakınsar" koşuluna denk kılar. $a \notin A^+$ olduğundan $A^+ \setminus \{a\} = A^+ = A \cap (a, \infty)$; bu kümedeki diziler tam olarak " A 'da olup terimleri a 'dan büyük" dizilerdir.

■

Dizisel ölçütün asıl gücü, limitin **yokluğunu** göstermektir.

Sonuç 31.3 (Sağ Limitin Yokluğu için Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun ve $a, A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. A içinde terimleri a 'dan büyük ve a 'ya yakınsayan (x_n) ve (y_n) dizileri için $f(x_n) \rightarrow \ell_1$, $f(y_n) \rightarrow \ell_2$ ve $\ell_1 \neq \ell_2$ ise f 'nin a 'da sağ limiti yoktur. Aynı sonuç, $(f(x_n))$ dizisinin iraksak olması durumunda da geçerlidir.

İspat.

$f(a^+) = \ell$ olsaydı **Teorem 31.2** gereği hem $f(x_n) \rightarrow \ell$ hem $f(y_n) \rightarrow \ell$ olurdu. Dizi limitinin tekliği (**Teorem 20.1**) $\ell_1 = \ell = \ell_2$ verir; bu, $\ell_1 \neq \ell_2$ ile çelişir. $(f(x_n))$ iraksaksa zaten $f(x_n) \rightarrow \ell$ olamaz.

■

Örnek 31.5 ($\sin(1/x)$ Fonksiyonunun Sağ Limiti de Yoktur). $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ($x \neq 0$) fonksiyonunun 0'da sağ limitinin de sol limitinin de olmadığını gösterelim.

Çözüm.

Örnek 28.2'te 0'da limitin olmadığını görmüştük; şimdi daha güçlü bir şey söylüyoruz: fonksiyon 0'ın tek bir tarafına kısıtlansa bile bir hedefe yerleşmez.

$n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$$

alalım. Her iki dizinin terimleri pozitifdir. Paydalar $+\infty$ 'a ıraksar: $\frac{\pi}{2} + 2n\pi > n$, $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi > n$ ve (n) dizisi $+\infty$ 'a ıraksadığından (Örnek 22.1 (a)) Teorem 22.4 bunu verir. O hâlde Teorem 22.3 gereği $x_n \rightarrow 0$ ve $y_n \rightarrow 0$. Görüntüler:

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \quad f(y_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1.$$

Sabit diziler kendi değerlerine yakınsar: $f(x_n) \rightarrow 1$, $f(y_n) \rightarrow -1$ ve $1 \neq -1$. Sonuç 31.3 gereği $f(0^+)$ yoktur. Sol limit için $-x_n$ ve $-y_n$ dizilerini kullanırız: terimleri negatif, limitleri 0; $\sin$ tek fonksiyon olduğundan $f(-x_n) = -1$ ve $f(-y_n) = 1$. Yine iki farklı hedef; $f(0^-)$ de yoktur.

Bu fonksiyon, süreksizlik türleri bölümünde "ikinci tür" süreksizliğin temel örneği olacak: bozukluk, sağ ya da sol limitlerden birinin bile olmamasından kaynaklanır.

■

31.4 Monoton Fonksiyonların Tek Yönlü Limitleri

Dizilerde monotonluk ve sınırlılık yakınsaklığı garanti ediyordu (Teorem 23.1). Fonksiyonlar için benzer bir sonuç var: monoton bir fonksiyonun sağ ve sol limitleri her zaman vardır. Önce kavramı tanımlayalım; Tanım 19.4 ile karşılaştırm.

Tanım 31.2 (Monoton Fonksiyon). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. A 'daki her $x < y$ çifti için

- $f(x) \leq f(y)$ ise f 'ye **artan** (increasing), $f(x) < f(y)$ ise **kesin artan** (strictly increasing);
- $f(x) \geq f(y)$ ise f 'ye **azalan** (decreasing), $f(x) > f(y)$ ise **kesin azalan** (strictly decreasing)

denir. Artan ya da azalan fonksiyonlara **monoton** (monotone) denir.

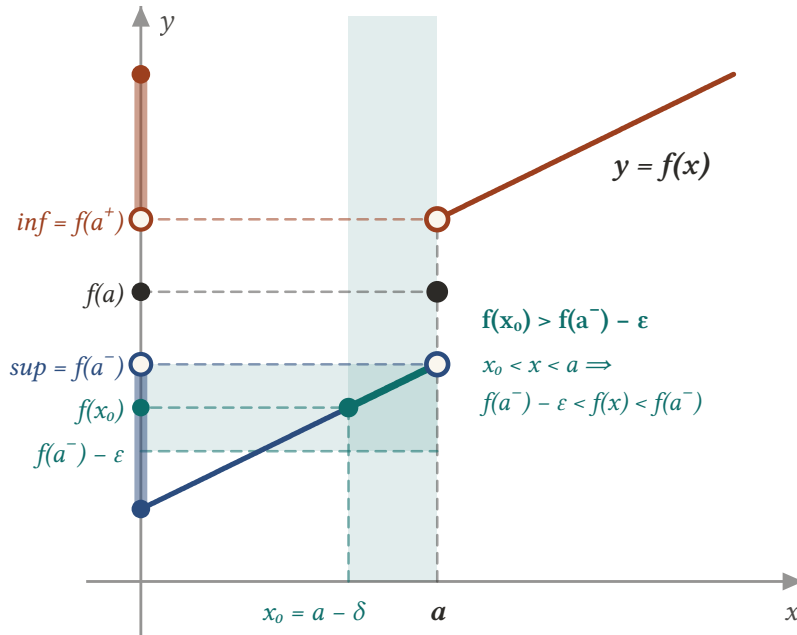
Örnekler: x^3 , $\mathbb{R}$ 'de kesin artandır ($x < y$ ise $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2) > 0$; ikinci çarpan $\frac{1}{2}((x + y)^2 + x^2 + y^2) > 0$ 'dır). $\lfloor x \rfloor$ artandır ama kesin artan değildir ($\lfloor 0, 2 \rfloor = \lfloor 0, 7 \rfloor = 0$). $\frac{1}{x}$, $(0, \infty)$ 'da kesin azalandır. İşaret fonksiyonu artandır. Sabit fonksiyon hem artan hem azalandır.

Teorem 31.3 (Monoton Fonksiyonun Tek Yönlü Limitleri). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon ve a , I 'nin bir iç noktası olsun (yani bir $r > 0$ için $(a - r, a + r) \subseteq I$). O zaman f 'nin a 'da sağ ve sol limitleri vardır. f artan ise

$$f(a^-) = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\}, \quad f(a^+) = \inf\{f(x) : x \in I, x > a\} \quad \text{ve} \quad f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+);$$

f azalan ise

$$f(a^-) = \inf\{f(x) : x \in I, x < a\}, \quad f(a^+) = \sup\{f(x) : x \in I, x > a\} \quad \text{ve} \quad f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+).$$



Şekil 31.2: Artan f için a 'nın solundaki değerlerin kümesi (y ekseninde koyu çizili) üstten sınırlıdır; supremumu $f(a^-)$ sol limittir. Supremum tanımı gereği $f(a^-) - \epsilon$ 'u aşan bir $f(x_0)$ vardır; $x_0 < x < a$ için artanlık $f(x)$ 'i $f(x_0)$ ile $f(a^-)$ arasında tutar. Sağdaki değerlerin infimumu $f(a^+)$ sağ limittir; $f(a)$ ikisinin arasında kalır.

İspat.

f artan olsun; azalan durumu sonda ele alacağız.

Sol limit. $S = \{f(x) : x \in I, x < a\}$ kümesine bakalım. $a - \frac{\tau}{2} \in I$ ve $a - \frac{\tau}{2} < a$ olduğundan $S \neq \emptyset$. $x < a$ olan her $x \in I$ için f artan olduğundan $f(x) \leq f(a)$; yani $f(a)$, S 'nin bir üst sınırıdır. Bölüm 10.4 gereği $L = \sup S$ vardır ve en küçük üst sınır olduğundan $L \leq f(a)$.

$f(a^-) = L$ olduğunu gösterelim. Ön koşul sağlanır: $(a - r, a) \subseteq I \cap (-\infty, a)$ olduğundan her $\delta > 0$ için $I \cap (a - \delta, a) \neq \emptyset$. $\epsilon > 0$ verilsin. Teorem 10.1 gereği $L - \epsilon$ bir üst sınır değildir; yani $f(x_0) > L - \epsilon$ olan bir $x_0 \in I$, $x_0 < a$ vardır. $\delta = a - x_0 > 0$ alalım. $x \in I$ ve $a - \delta < x < a$ ise $x_0 < x < a$ olur; f artan olduğundan $f(x_0) \leq f(x)$, ve $f(x) \in S$ olduğundan $f(x) \leq L$. Birleştirirsek

$$L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \epsilon, \quad \text{yani} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Bu, $f(a^-) = L$ demektir.

Sağ limit. $T = \{f(x) : x \in I, x > a\}$ kümesi $a + \frac{\tau}{2} \in I$ sayesinde boş değildir ve $x > a$ için $f(x) \geq f(a)$ olduğundan $f(a)$ alttan sınırlıdır. Bölüm 10.4 (infimum biçimi) gereği $M = \inf T$ vardır ve $M \geq f(a)$. $\epsilon > 0$ verilsin. Teorem 10.2 gereği $f(x_1) < M + \epsilon$ olan bir $x_1 \in I$, $x_1 > a$ vardır. $\delta = x_1 - a > 0$ alalım. $x \in I$ ve $a < x < a + \delta$ ise $a < x < x_1$; artanlıktan $f(x) \leq f(x_1)$ ve $f(x) \in T$ olduğundan $M \leq f(x)$. Böylece

$$M - \epsilon < M \leq f(x) \leq f(x_1) < M + \epsilon, \quad \text{yani} \quad |f(x) - M| < \epsilon.$$

Bu, $f(a^+) = M$ demektir. $L \leq f(a) \leq M$ eşitsizliklerini yukarıda gördük.

Azalan durum. f azalan ise $g = -f$ artandır: $x < y$ için $f(x) \geq f(y)$, dolayısıyla $-f(x) \leq -f(y)$. Artan durumu g 'ye uygulayalım: $g(a^-) = \sup\{-f(x) : x < a\}$ ve $g(a^+) = \inf\{-f(x) : x > a\}$ vardır.

Sonuç 31.1 (aritmetik, $c = -1$) gereği $f = -g$ 'nin tek yönlü limitleri de vardır ve $f(a^-) = -g(a^-)$, $f(a^+) = -g(a^+)$ 'dir. Son olarak bir küme B için $\sup(-B) = -\inf B$ olduğunu görelim; burada $-B = \{-b : b \in B\}$. $m = \inf B$ olsun: her $b \in B$ için $m \leq b$, yani $-b \leq -m$; o hâlde $-m$, $-B$ 'nin bir üst sınırıdır. $\epsilon > 0$ için Teorem 10.2 bir $b_0 \in B$ ile $b_0 < m + \epsilon$ verir; buradan $-b_0 > -m - \epsilon$, yani $-m - \epsilon$ üst sınır değildir. Teorem 10.1 gereği $\sup(-B) = -m$. Bunu $B = \{f(x) : x < a\}$ ve $B = \{f(x) : x > a\}$

kümelerine uygulayınca $f(a^-) = \inf\{f(x) : x < a\}$ ve $f(a^+) = \sup\{f(x) : x > a\}$ çıkar; eşitsizlikler de g 'ninkilerin -1 ile çarpılmış hâlidir.

■

Teoremin söylediği şudur: monoton bir fonksiyonda “bozukluk” ancak $f(a^-) \neq f(a^+)$ biçiminde, yani bir **sıçrama** olarak ortaya çıkabilir; $\sin(1/x)$ türü salınımlar monoton fonksiyonlarda imkânsızdır. Süreksizlik türleri bölümünde bunu **Teorem 34.1** olarak kaydedeceğiz. Artan bir fonksiyon için $f(a^+) - f(a^-) \geq 0$ farkına a 'daki **sıçrama** denir; limit vardır ancak ve ancak sıçrama sıfırdır (**Teorem 31.1**). Sıçramaların birbirini “itmesi” de teoremden çıkar: artan bir fonksiyonda bir noktanın sağ limiti, daha sağdaki bir noktanın sol limitini geçemez.

Sonuç 31.4 (Artan Fonksiyonda Tek Yönlü Limitlerin Sıralanışı). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ artan, $a < b$ ve a, b aralığın iç noktaları olsun. O zaman $a < x < b$ olan her $x \in I$ için

$$f(a^+) \leq f(x) \leq f(b^-), \quad \text{özel olarak} \quad f(a^+) \leq f(b^-).$$

İspat.

I bir aralık olduğundan $a < x < b$ olan her x, I 'dadır. $x > a$ olduğundan $f(x) \in \{f(t) : t \in I, t > a\}$ ve bu kümenin infimumu $f(a^+)$ olduğundan (**Teorem 31.3**) $f(a^+) \leq f(x)$. $x < b$ olduğundan $f(x) \in \{f(t) : t \in I, t < b\}$ ve bu kümenin supremumu $f(b^-)$ olduğundan $f(x) \leq f(b^-)$. $a < b$ olduğu için böyle bir x (örneğin $\frac{a+b}{2}$, **Önerme 7.11**) vardır; dolayısıyla $f(a^+) \leq f(b^-)$.

■

Bu sonuç, sonraki bölümlerde monoton bir fonksiyonun sıçrama noktalarının en çok sayılabilir olduğunu (**Teorem 34.2**) göstermenin anahtarı olacak: her sıçramanın içine bir rasyonel sayı sığdırılır ve sıçramalar birbirini itmediği için aynı rasyonel iki sıçramaya düşmez.

Örnek 31.6 (Sıçrayan Artan Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ ise,} \\ x + 1, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. f 'nin artan olduğunu gösterip 0 'daki tek yönlü limitlerini hem **Teorem 31.3** ile hem de tanımla bulalım.

Çözüm.

Artanlık. $x < y$ olsun. Her iki nokta da negatifse $f(x) = x < y = f(y)$; her ikisi de pozitifse $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$. $x < 0 = y$ ise $f(x) = x < 0 < \frac{1}{2} = f(y)$; $x = 0 < y$ ise $f(x) = \frac{1}{2} < 1 < y + 1 = f(y)$; $x < 0 < y$ ise $f(x) = x < 0 < 1 < y + 1 = f(y)$. Her durumda $f(x) \leq f(y)$ (hatta $<$); f kesin artandır.

Teoreme. $\{f(x) : x < 0\} = \{x : x < 0\} = (-\infty, 0)$ kümesinin supremumu 0 'dır: 0 bir üst sınırdır ve $\varepsilon > 0$ için $-\frac{\varepsilon}{2} \in (-\infty, 0)$, $-\frac{\varepsilon}{2} > 0 - \varepsilon$ olduğundan **Teorem 10.1** uygulanır. Dolayısıyla $f(0^-) = 0$. $\{f(x) : x > 0\} = \{x + 1 : x > 0\} = (1, \infty)$ kümesinin infimumu 1 'dir: 1 bir alt sınırdır ve $\varepsilon > 0$ için $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in (1, \infty)$, $1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$ olduğundan **Teorem 10.2** uygulanır. Böylece $f(0^+) = 1$. Gerçekten $f(0^-) = 0 \leq \frac{1}{2} = f(0) \leq 1 = f(0^+)$; sıçrama $1 - 0 = 1$ 'dir ve limit yoktur.

Tanımla. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = \varepsilon$ alalım. $-\delta < x < 0$ ise $|f(x) - 0| = |x| < \delta = \varepsilon$; $0 < x < \delta$ ise $|f(x) - 1| = |x| < \varepsilon$. Aynı sonuç.

Taban fonksiyonu için de teoremi sınavalım: $\sup\{\lfloor x \rfloor : x < k\} = k - 1$ (küme $\{\dots, k - 2, k - 1\}$ 'dir, en büyük elemanı $k - 1$) ve $\inf\{\lfloor x \rfloor : x > k\} = k$; bu, **Örnek 31.3** ile uyur.

■

31.5 Alıştırmalar

Alıştırma 31.1 (Tek Yönlü Limitler). a) $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ ($x \neq 2$) için $f(2^+)$ ve $f(2^-)$ 'yi bulun; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ var mı?

- b) $g(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. $g(k^+)$, $g(k^-)$ ve $g(k)$ 'yi bulun. $\lim_{x \rightarrow k} g(x)$ var mı?
 c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$ olduğunu gösterin.
 d) $a, b \in \mathbb{R}$ sabitler ve

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \text{ ise,} \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2 \text{ ise,} \\ a - x, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. f 'nin hem 0'da hem 2'de limiti olması için a ve b ne olmalıdır?

- e) $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ artan ve üstten sınırlı olsun. $L = \sup\{f(x) : x \in (\alpha, \beta)\}$ ise $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = L$ olduğunu gösterin.

Çözüm.

a) $x > 2$ için $|x - 2| = x - 2$, dolayısıyla $f(x) = 1$; $x < 2$ için $|x - 2| = -(x - 2)$, dolayısıyla $f(x) = -1$. **Örnek 31.2**'daki gibi her $\varepsilon > 0$ için $\delta = 1$ işe yarar: $2 < x < 3$ iken $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ ve $1 < x < 2$ iken $|f(x) + 1| = 0 < \varepsilon$. Yani $f(2^+) = 1$, $f(2^-) = -1$. $1 \neq -1$ olduğundan **Sonuç 31.2** gereği $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur. (Bu fonksiyon $x \mapsto |x|/x$ 'in 2 birim sağa kaydırılmışıdır.)

b) $k < x < k + 1$ olsun. $\lfloor x \rfloor = k$ 'dir (**Örnek 31.3**). Öte yandan $-k - 1 < -x < -k$ olduğundan $\lfloor -x \rfloor = -k - 1$. Böylece $g(x) = k + (-k - 1) = -1$. Şimdi $k - 1 < x < k$ olsun: $\lfloor x \rfloor = k - 1$ ve $-k < -x < -k + 1$ olduğundan $\lfloor -x \rfloor = -k$; yine $g(x) = -1$. Her iki tarafta da g sabit -1 olduğundan ($\delta = 1$ ile) $g(k^+) = g(k^-) = -1$. **Teorem 31.1** gereği $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = -1$ **vardır**. Ama $g(k) = \lfloor k \rfloor + \lfloor -k \rfloor = k - k = 0 \neq -1$: limit var, fonksiyonun değeriyle uyuşmuyor. Süreksizlik türleri bölümünde buna “kaldırılabilir süreksizlik” diyeceğiz $-g(k)$ 'yi -1 yapsak bozukluk giderilir.

c) $x > 0$ olsun ve $t = \frac{1}{x} > 0$ yazalım. **Tanım 12.1** gereği $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$; ikinci eşitsizlikten $t - 1 < \lfloor t \rfloor$. Yani

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

Pozitif x ile çarpmak eşitsizlik yönünü korur:

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 \quad (x > 0).$$

Alt sınır $1 - x$ bir polinomdur; **Sonuç 29.3** ve **Lemma 31.1** ile $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$. Üst sınır sabit 1'dir. **Sonuç 31.1** (sıkıştırma) gereği $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor 1/x \rfloor = 1$. Not: $x < 0$ için aynı $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ eşitsizliği negatif x ile çarpılınca yön değiştirir ve $1 \leq x \lfloor 1/x \rfloor < 1 - x$ verir; sıkıştırma sol limiti de 1 yapar, dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor 1/x \rfloor = 1$ 'dir.

d) 0 noktasında: $(-\infty, 0)$ üzerinde $f = ax + b$, dolayısıyla $f(0^-) = a \cdot 0 + b = b$ (**Sonuç 29.3**, **Lemma 31.1**, **Önerme 31.1**); $(0, 2)$ üzerinde $f = x^2 + 1$, dolayısıyla $f(0^+) = 1$. Limit için $b = 1$ gerekir ve yeter (**Teorem 31.1**). 2 noktasında: $(0, 2)$ üzerinde $f = x^2 + 1$, $f(2^-) = 5$; $(2, \infty)$ üzerinde $f = a - x$, $f(2^+) = a - 2$. Limit için $a - 2 = 5$, yani $a = 7$ gerekir ve yeter. Cevap: $a = 7$, $b = 1$. Bu değerlerle $f(x) = 7x + 1$ ($x < 0$), $x^2 + 1$ ($0 \leq x < 2$), $7 - x$ ($x \geq 2$) olur ve $\lim_{x \rightarrow 0} f = 1 = f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f = 5 = f(2)$.

e) $\{f(x) : x \in (\alpha, \beta)\}$ kümesi boş değildir ve hipotez gereği üstten sınırlıdır; Bölüm 10.4 ile L vardır. Ön koşul: $(\alpha, \beta) \cap (-\infty, \beta) = (\alpha, \beta)$ ve her $\delta > 0$ için $(\beta - \delta, \beta) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ (örneğin $\beta - \frac{1}{2} \min\{\delta, \beta - \alpha\}$ bu kesişimdedir). $\varepsilon > 0$ verilsin. **Teorem 10.1** gereği $f(x_0) > L - \varepsilon$ olan bir $x_0 \in (\alpha, \beta)$ vardır. $\delta = \beta - x_0 > 0$ alalım. $\beta - \delta < x < \beta$ ise $x_0 < x < \beta$, $x \in (\alpha, \beta)$; artanlıktan $f(x_0) \leq f(x)$ ve L üst sınır olduğundan $f(x) \leq L$. Böylece $L - \varepsilon < f(x) \leq L$, yani $|f(x) - L| < \varepsilon$. Bu, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = L$ demektir. İspat, **Teorem 31.3**'in sol limit kısmının aynısıdır; tek fark, üst sınırın $f(\beta)$ gibi bir değerden değil hipotezden gelmesidir. f üstten sınırlı **değilse** sonlu sol limit olamaz; bu durumda fonksiyon β 'ya soldan yaklaşırken her sınırı aşar — sonraki bölümün konusu.

■

Tek yönlü limitler, limit kavramını “hangi yönden” sorusuyla inceltti: limit vardır ancak ve ancak iki yön anlaşıp, monoton fonksiyonlarda ise iki yön her zaman kendi hedefine ulaşır. Geriye, limitin sonlu bir sayı olmadığı durumlar kaldı: fonksiyon bir noktaya yaklaşırken sınırsızca büyüyebilir ya da x sınırsızca büyürken fonksiyon bir değere yerleşebilir. Bunları ve grafiklerdeki karşılıkları olan asimptotları bir sonraki bölümde inceliyoruz: **Sonsuz Limitler ve Sonsuzdaki Limitler**.

32. Sonsuz Limitler ve Sonsuzdaki Limitler

Şimdiye kadar “limit” dediğimizde iki şey hep sonluydu: x ’in yaklaştığı a noktası bir reel sayıydı ve $f(x)$ ’in yaklaştığı ℓ değeri de bir reel sayıydı. Oysa $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonu 0’a yaklaştıkça her sınırı aşar; $\frac{1}{x}$ fonksiyonu ise x sonsuzsıca büyürken 0’a yerleşir. İlk durumda **değer** sonsuza kaçar, ikincisinde **değişken** sonsuza gider. Diziler bölümünde $+\infty$ ’a ıraksamayı (Tanım 22.1) tanımlarken aynı ihtiyacı duymuştuk; burada aynı fikri fonksiyonlara taşıyoruz.

Bu bölümde iki yeni limit türü tanımlayacağız: bir noktada **sonsuz limit** ($x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow \pm\infty$) ve **sonsuzdaki limit** ($x \rightarrow \pm\infty$ iken $f(x) \rightarrow \ell$ ya da $\pm\infty$). Sonra hepsi için ortak bir dizisel ölçüt kuracak, sonsuzla yapılan işlemlerin kurallarını ispatlayacak, rasyonel fonksiyonların sonsuzdaki davranışını tümüyle çözecek ve grafiklerdeki karşılığı olan **asimptotları** tanımlayacağız.

32.1 Bir Noktada Sonsuz Limit

Teorem 29.1, limiti olan bir fonksiyonun limit noktasının bir delinmiş komşuluğunda sınırlı olduğunu söylüyordu; bu yüzden $1/x^2$ ’nin 0’da (sonlu) limiti yoktur. Ama “limit yok” demek, $1/x^2$ ’yi $\sin(1/x)$ ile aynı kefeye koymaktır. Oysa $1/x^2$ son derece düzenli davranır: x , 0’a yaklaştıkça $1/x^2$ istediğimiz her M eşliğini aşar ve **aşmaya devam eder**. Tanım bu cümleyi ε - δ kalıbına döker: ε toleransının yerini M eşliği alır.

Tanım 32.1 (Bir Noktada Sonsuz Limit). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a , A kümesinin bir yığılma noktası olsun (Tanım 17.1).

1. Her $M > 0$ için

$$x \in A, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa, f ’nin a noktasında **$+\infty$ ’a ıraksadığı** (diverges to $+\infty$) ya da a ’daki **limitinin $+\infty$ olduğu** söylenir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ yazılır.

2. Her $M > 0$ için $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) < -M$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ yazılır.
3. **Tek yönlü sürümler.** a , $A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktasıysa ve her $M > 0$ için $x \in A$, $a < x < a + \delta$ iken $f(x) > M$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (kısaca $f(a^+) = +\infty$) yazılır. $f(a^+) = -\infty$, $f(a^-) = +\infty$ ve $f(a^-) = -\infty$ benzer biçimde tanımlanır (Tanım 31.1 ile karşılaştırın).

Niceleyicilerle, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$:

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Tanımı Tanım 27.1 ile yan yana koyalım. Sonlu limitte hedef, ℓ ’nin $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ komşuluğuydu; burada hedef (M, ∞) ışınıdır. “ ε ne kadar küçük olursa olsun” yerine “ M ne kadar büyük olursa olsun” deriz; gerisi aynıdır: a ’ya yeterince yakın (ama a ’dan farklı) **her** x , hedefe düşmelidir. a ’nın A ’da olup olmaması ve $f(a)$ ’nın değeri yine önemsizdir.

⚠ Sonsuz sayı değildir

$+\infty$ ve $-\infty$ reel sayı değildir; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ yazımı, “ f ’nin a ’da limiti vardır ve $+\infty$ adlı bir sayıya eşittir” anlamına **gelmez**. Bu bir kısaltmadır: fonksiyonun a yakınında sonsuzsıca büyüdüğünü tek satırda söyler. Bu kitapta “limit vardır” cümlesi her zaman sonlu bir $\ell \in \mathbb{R}$ için kullanılır; sonsuz durumda “ıraksar” ya da “sonsuz limiti vardır” deriz. Aşağıdaki önerme iki durumun birbirini dışladığını gösterir.

Önerme 32.1 (Sonsuz Limit ile Sonlu Limit Bağdaşmaz). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ise

1. f , a 'nın hiçbir delinmiş komşuluğunda üstten sınırlı değildir; dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ sonlu bir sayı olamaz;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ da olamaz.

Aynı ifadeler $-\infty$ için ve tek yönlü sürümler için de geçerlidir.

İspat.

(1) $\delta_0 > 0$ ve $M > 0$ verilsin; $A \cap B^*(a, \delta_0)$ içinde $f(x) > M$ olan bir x bulacağız. Tanımdan M için bir $\delta > 0$ vardır: $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) > M$. $\delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$ alalım; a yığılma noktası olduğundan $A \cap B^*(a, \delta')$ boş değildir ve buradaki her x hem $B^*(a, \delta_0)$ 'dadır hem de $f(x) > M$ sağlar. M keyfi olduğundan f , $B^*(a, \delta_0)$ üzerinde üstten sınırlı değildir. Sonlu limit olsaydı [Teorem 29.1](#) gereği f bir delinmiş komşulukta sınırlı olurdu; çelişki.

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ da olsaydı $M = 1$ için iki δ_1, δ_2 bulunur, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ile $A \cap B^*(a, \delta)$ 'daki bir x (yığılma noktası olduğundan vardır) hem $f(x) > 1$ hem $f(x) < -1$ sağlardı; olanaksız.

■

Örnek 32.1 (Bir Bölü x Kare Sıfırda Sonsuza Iraksar). $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

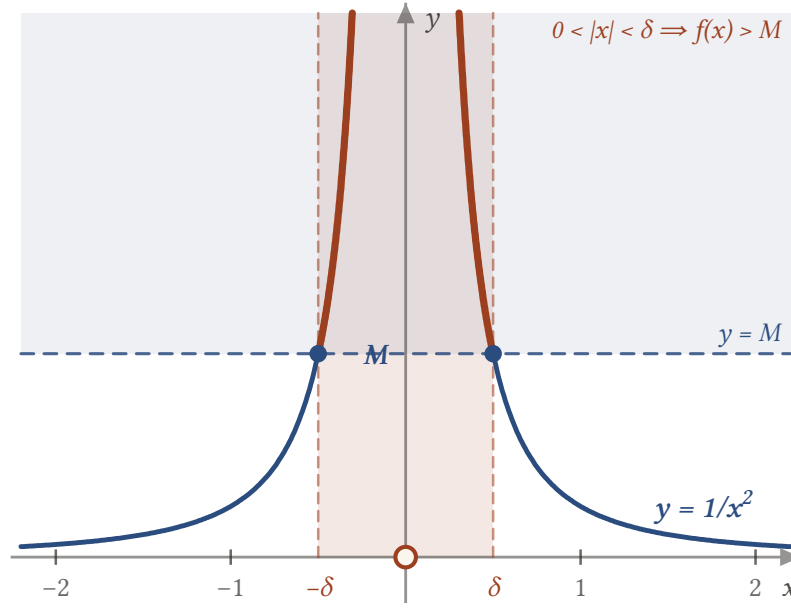
$0, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinin yığılma noktasıdır (her $\delta > 0$ için $\delta/2$ bu kümededir ve $B^*(0, \delta)$ içindedir). $M > 0$ verilsin. $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ seçelim (karekökün varlığı için [Teorem 13.2](#)). $0 < |x| < \delta$ olsun. Negatif olmayan sayılarda kare alma sıralamayı korur ([Önerme 7.12](#)), dolayısıyla

$$x^2 = |x|^2 < \delta^2 = \frac{1}{M}.$$

Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirir: $0 < u < v$ ise $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{uv} > 0$ 'dır. Bunu $u = x^2$, $v = 1/M$ ile uygularsak

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{1/M} = M.$$

Yani $0 < |x| < \delta$ iken $f(x) > M$; tanım sağlanır. M büyüdükçe $\delta = 1/\sqrt{M}$ küçülür: daha yüksek bir eşiği aşmak için 0'a daha çok yaklaşmak gerekir.



Şekil 32.1: $x \rightarrow 0$ iken $1/x^2 \rightarrow +\infty$; hangi M verilirse verilsin, $\delta = 1/\sqrt{M}$ alınınca $0 < |x| < \delta$ penceresindeki her x için $f(x) > M$ olur. Şekilde $M = 4$ ve $\delta = 0,5$; pencere içindeki grafik parçası tümüyle $y = M$ çizgisinin üstündedir. M büyüdükçe pencere daralır.

■

Sonsuz limitlerde tek yönlü sürümlerin ne kadar gerekli olduğunu $1/x$ gösterir: fonksiyon 0'ın iki yanında zıt yönlerde kaçır.

Örnek 32.2 (Bir Bölü x 'in Sıfırdaki Tek Yönlü Sonsuz Limitleri). $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) için $f(0^+) = +\infty$ ve $f(0^-) = -\infty$ olduğunu, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 'in ise ne sonlu ne de sonsuz olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Sağ limit. $M > 0$ verilsin; $\delta = \frac{1}{M}$ alalım. $0 < x < \delta$ ise ters alma sıralamayı çevirdiğinden $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M$. Yani $f(0^+) = +\infty$.

Sol limit. Aynı δ ile $-\delta < x < 0$ olsun. O zaman $0 < -x < \delta$, dolayısıyla $\frac{1}{-x} > M$, yani $\frac{1}{x} < -M$. Böylece $f(0^-) = -\infty$.

İki yönlü limit. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ olsaydı $M = 1$ için bir δ bulunur ve $x = -\delta/2$ noktası $0 < |x| < \delta$ sağladığı hâlde $f(x) = -2/\delta < 0 < 1$ olurdu; çelişki. Aynı biçimde $x = \delta/2$ noktası $-\infty$ seçeneğini dışlar. Sonlu limit de yoktur: sağ limit $+\infty$ olduğundan **Önerme 32.1**'in (1) maddesindeki akıl yürütme f 'yi 0'ın her delinmiş komşuluğunda her M 'nin üstüne çıkarır ve **Teorem 29.1** ile çelişir. Öte yandan $|f(x)| = \frac{1}{|x|}$ için $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = +\infty$ 'dur: $0 < |x| < \delta = 1/M$ iken $\frac{1}{|x|} > M$.

■

Örnekteki “iki yön anlaşıyor” akıl yürütmesi geneldir; **Teorem 31.1**'in sonsuz limitler için karşılığını yazalım.

Önerme 32.2 (Sonsuz Limit ve Tek Yönlü Sonsuz Limitler). a , hem $A \cap (a, \infty)$ hem $A \cap (-\infty, a)$ kümesinin yığılma noktası olsun. O zaman

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(a^+) = +\infty \text{ ve } f(a^-) = +\infty.$$

$-\infty$ için de aynı denklik geçerlidir.

İspat.

($\Rightarrow$) $M > 0$ için tanımın verdiği δ , $a < x < a + \delta$ olan x 'lerde de $a - \delta < x < a$ olan x 'lerde de $0 < |x - a| < \delta$ sağlandığından $f(x) > M$ verir.

($\Leftarrow$) $M > 0$ verilsin. Sağ limitten δ_1 , sol limitten δ_2 alalım: $x \in A$ için $a < x < a + \delta_1$ iken ve $a - \delta_2 < x < a$ iken $f(x) > M$. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta$ ise ya $a < x < a + \delta \leq a + \delta_1$ ya da $a - \delta_2 \leq a - \delta < x < a$; her iki hâlde $f(x) > M$.

■

32.2 Sonsuzdaki Limitler

Şimdi değişkeni sonsuza gönderelim. “ $x \rightarrow +\infty$ ” demenin anlamlı olması için A tanım kümesinin sağa doğru sınırsız uzanması gerekir: her K için K 'dan büyük bir $x \in A$ bulunmalıdır. Bu, “ $+\infty$, A 'nın bir yığılma noktasıdır” cümlesinin karşılığıdır; yığılma noktası tanımındaki $B^*(a, \delta)$ komşuluğunun yerini (K, ∞) ışıını alır.

Tanım 32.2 (Sonsuzdaki Limit). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\ell \in \mathbb{R}$ olsun.

1. A üstten sınırlı olmasın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in A, \quad x > K \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $K > 0$ varsa, f 'nin $+\infty$ 'daki **limiti** (limit at infinity) ℓ 'dir denir ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ yazılır.

2. A alttan sınırlı olmasın. Her $\varepsilon > 0$ için $x \in A$, $x < -K$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $K > 0$ varsa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ yazılır.
3. **Sonsuzda sonsuz limit.** A üstten sınırlı olmasın. Her $M > 0$ için $x \in A$, $x > K$ iken $f(x) > M$ olacak biçimde bir $K > 0$ varsa $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) < -M$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ yazılır. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ benzer biçimde ($x < -K$ koşuluyla) tanımlanır.

Niceleyicilerle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \in A : x > K \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$K > 0$ koşulu bir kısıtlama değildir: $x > K$ için işe yarayan bir K bulunmuşsa $\max\{K, 1\}$ de işe yarar. Tanımın bir okuması daha var: $A = \mathbb{N}$ ve $f(n) = a_n$ alınırsa “ $x > K$ ” koşulu “ $n \geq n_\varepsilon$ ” koşuluna dönüşür ve Tanım 20.1 aynen ortaya çıkar. Yani **dizi limiti, sonsuzdaki limitin özel hâlidir**; dizilerde $+\infty$ 'a ıraksama (Tanım 22.1) da 3. maddenin özel hâlidir.

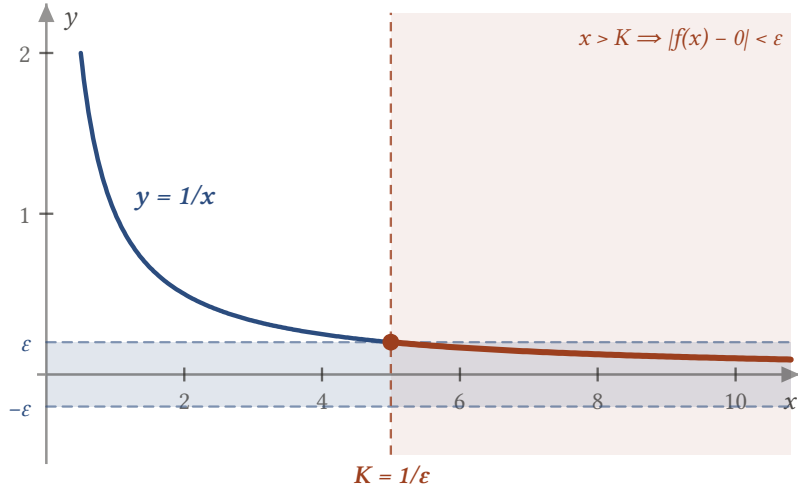
Örnek 32.3 (Bir Bölü x Sonsuzda Sıfıra Gider). $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) için $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne üstten ne alttan sınırlıdır; iki limit de anlamlıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $K = \frac{1}{\varepsilon}$ alalım. $x > K$ ise $x > 0$ ve ters alma sıralamayı çevirdiğinden

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{K} = \varepsilon.$$

$x < -K$ ise $-x > K$, dolayısıyla $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{-x} < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Her iki limit de 0'dır.



Şekil 32.2: $x \rightarrow +\infty$ iken $1/x \rightarrow 0$: verilen ε için $K = 1/\varepsilon$ alınınca $x > K$ olan her x 'te $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olur. Şekilde $\varepsilon = 0,2$ ve $K = 5$; K 'nın sağındaki grafik parçası $(-\varepsilon, \varepsilon)$ bandının içinde kalır, solundaki parça bandın üstündedir. Daha küçük ε daha büyük K ister.

■

Kuvvet fonksiyonlarının sonsuzdaki davranışı sonraki her hesabın yapı taşıdır.

Önerme 32.3 (Kuvvet Fonksiyonlarının Sonsuzdaki Limitleri). $k \in \mathbb{N}$ olsun.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$.
2. k çift ise $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$; k tek ise $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

İspat.

Önce küçük bir gözlem: $x \geq 1$ ise $x^k \geq x$. Tümevarımla: $k = 1$ için eşitlik vardır; $x^k \geq x \geq 1$ ise $x^{k+1} = x^k \cdot x \geq 1 \cdot x = x$, çünkü pozitif x ile çarpma sıralamayı korur (Bölüm 7.1).

(1) $M > 0$ verilsin; $K = \max\{1, M\}$ alalım. $x > K$ ise $x \geq 1$, dolayısıyla $x^k \geq x > K \geq M$.

(2) K yukarıdaki gibi olsun ve $x < -K$ alalım. $t = -x > K$ için (1) gereği $t^k > M$. $x^k = (-t)^k = (-1)^k t^k$ olduğundan k çiftse $x^k = t^k > M$, k tekse $x^k = -t^k < -M$.

(3) $\varepsilon > 0$ verilsin. (1)'i $M = 1/\varepsilon$ ile uygulayalım: $x > K$ iken $x^k > 1/\varepsilon > 0$, dolayısıyla ters alma ile $0 < \frac{1}{x^k} < \varepsilon$. $x \rightarrow -\infty$ için: $x < -K$ iken $t = -x > K$ ve $|\frac{1}{x^k}| = \frac{1}{t^k} < \varepsilon$.

■

Bu bölümde artık beş ayrı “yaklaşma süreci” var: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$; üç ayrı “hedef” var: ℓ , $+\infty$, $-\infty$. On beş tanımı tek tek yazmak yerine ortak kalıbı görelim; sonraki teoremleri bir kez ispatlayıp hepsine uygulayacağız.

i Beş yaklaşma süreci, tek kalıp

Bir yaklaşma sürecini $x \rightarrow p$ ile gösterelim; p , aşağıdaki beş seçenekten biridir. Her sürecin bir **ön koşulu** ve bir **yakınlık koşulu** vardır:

Süreç	Ön koşul	" x, p 'ye yeterince yakın" ($r > 0$ için)
$x \rightarrow a$	a, A 'nın yığılma noktası	$x \in A, 0 < x - a < r$
$x \rightarrow a^+$	$a, A \cap (a, \infty)$ 'un yığılma noktası	$x \in A, a < x < a + r$
$x \rightarrow a^-$	$a, A \cap (-\infty, a)$ 'nın yığılma noktası	$x \in A, a - r < x < a$
$x \rightarrow +\infty$	A üstten sınırsız	$x \in A, x > r$
$x \rightarrow -\infty$	A alttan sınırsız	$x \in A, x < -r$

Hedef L için de üç seçenek vardır: $L = \ell \in \mathbb{R}$ için " $f(x)$ hedefe düşer" demek $|f(x) - \ell| < \varepsilon$; $L = +\infty$ için $f(x) > M$; $L = -\infty$ için $f(x) < -M$ demektir.

Bütün tanımlar şu tek cümledir: **$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ demek, hedefin her seçimi (ε ya da M) için, p 'ye yeterince yakın her x 'te $f(x)$ 'in hedefe düşmesidir.** İlk satırda $L = \ell$ alınırsa [Tanım 27.1](#), $L = \pm\infty$ alınırsa [Tanım 32.1](#); ikinci ve üçüncü satırlarda [Tanım 31.1](#) ve sonsuz tek yönlü sınırları; son iki satırda [Tanım 32.2](#) elde edilir.

Bundan sonra " **p 'ye yeterince yakın her x için $P(x)$ sağlanır**" cümlesi, "öyle bir $r > 0$ vardır ki tablodaki yakınlık koşulunu sağlayan her x için $P(x)$ doğrudur" anlamına gelecek. İki önemli gözlem:

- Bu türden iki koşul aynı anda sağlanabilir: r_1 ve r_2 işe yarıyorsa, $x \rightarrow a$ türü süreçlerde $\min\{r_1, r_2\}$, $x \rightarrow \pm\infty$ süreçlerinde $\max\{r_1, r_2\}$ ikisini birden sağlar. Sonlu sayıda koşul için de aynı.
- Ön koşul sayesinde, p 'ye yeterince yakın x 'ler kümesi hiçbir zaman boş değildir; dolayısıyla " p 'ye yeterince yakın her x için $f(x) > M$ " cümlesi boş yere doğru olamaz.

32.3 Bütün Süreçler için Dizisel Ölçüt

[Teorem 28.1](#) ve [Teorem 31.2](#), fonksiyon limitini dizi diline çevirmişti. Aynı çeviri on beş durumun hepsi için geçerlidir ve ispatı da aynıdır. Önce " $dizi p$ 'ye yaklaşır" ne demek, onu söyleyelim. (x_n) , A 'da bir dizi olsun. $p = a$ için $x_n \neq a$ ve $x_n \rightarrow a$; $p = a^+$ için $x_n > a$ ve $x_n \rightarrow a$; $p = a^-$ için $x_n < a$ ve $x_n \rightarrow a$; $p = +\infty$ için $x_n \rightarrow +\infty$; $p = -\infty$ için $x_n \rightarrow -\infty$ ([Tanım 22.1](#)) istenir. Böyle bir diziyeye **p 'ye uygun dizi** diyelim. " $f(x_n) \rightarrow L$ " ise $L = \ell$ için dizi yakınsaklığı, $L = \pm\infty$ için $\pm\infty$ 'a ıraksama anlamındadır.

Teorem 32.1 (Genel Dizisel Ölçüt). $x \rightarrow p$ beş süreçten biri, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow p \text{ 'ye uygun her } (x_n) \text{ dizisi için } f(x_n) \rightarrow L.$$

İspat.

On beş durumun ispatı aynı kalıptadır; kalıbı önce genel olarak, sonra iki somut durumda yazacağız.

($\Rightarrow$) Hedefin bir seçimi (ε ya da M) verilsin. Tanım gereği p 'ye yeterince yakın her x 'te $f(x)$ hedefe düşer; bunu sağlayan yakınlık yarıçapı r olsun. (x_n) , p 'ye uygun bir dizi olsun. $x_n \rightarrow p$ olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır: $n \geq N$ iken x_n , p 'ye r kadar yakındır (aşağıda açıklıyoruz). O hâlde $n \geq N$ için $f(x_n)$ hedefe düşer; bu da $f(x_n) \rightarrow L$ demektir.

" x_n , p 'ye r kadar yakındır" adımı. $p = a$ ise $x_n \rightarrow a$ tanımından ([Tanım 20.1](#)) $n \geq N$ için $|x_n - a| < r$; $x_n \neq a$ olduğundan $0 < |x_n - a| < r$. $p = a^+$ ise ek olarak $x_n > a$, yani $a < x_n < a + r$. $p = +\infty$ ise $x_n \rightarrow +\infty$ tanımından $n \geq N$ için $x_n > r$. Diğer iki durum simetriktir.

($\Leftarrow$) Olmayana ergi ile. Sağ taraf doğru ama $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ yanlış olsun. Tanımın olumsuzlaması: hedefin öyle bir seçimi vardır ki **her** $r > 0$ için p 'ye r kadar yakın olup $f(x)$ 'i hedefe düşürmeyen bir $x \in A$ bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $r = \frac{1}{n}$ (p sonluyrsa) ya da $r = n$ ($p = \pm\infty$ ise) alıp böyle bir noktayı x_n diye

adlandıralım. Böylece $f(x_n)$ hiçbir n için hedefe düşmez; demek ki $f(x_n) \rightarrow L$ olamaz. Öte yandan (x_n) , p 'ye uygundur: $p = a$ için $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan sıkıştırma (Teorem 21.6) $x_n \rightarrow a$ verir, ayrıca $x_n \neq a$ 'dır; $p = a^\pm$ için x_n ek olarak doğru taraftadır; $p = +\infty$ için $x_n > n$ ve (n) dizisi $+\infty$ 'a ıraksadığından ($M > 0$ verildiğinde Sonuç 12.1 ile $n_M > M$ olan bir n_M vardır ve $n \geq n_M$ iken $n > M$) Teorem 22.4 gereği $x_n \rightarrow +\infty$; $p = -\infty$ simetriktir. Hipotez $f(x_n) \rightarrow L$ der; çelişki.

Somut durum 1: $p = +\infty$, $L = \ell$. $(\Rightarrow) \varepsilon > 0$ verilsin; $x > K$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde K vardır. $x_n \rightarrow +\infty$ olduğundan bir N için $n \geq N$ iken $x_n > K$, dolayısıyla $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. $(\Leftarrow)$ Limit ℓ değilse bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır: her K için $x > K$ ve $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$ olan bir $x \in A$ bulunur. $K = n$ alıp x_n seçelim: $x_n > n$ ve $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. $x_n \rightarrow +\infty$ olduğu hâlde $f(x_n) \rightarrow \ell$ sağlanmaz; çelişki.

Somut durum 2: $p = a$, $L = +\infty$. $(\Rightarrow) M > 0$ verilsin; $0 < |x - a| < \delta$ iken $f(x) > M$ olacak biçimde δ vardır. $x_n \rightarrow a$ ve $x_n \neq a$ olduğundan bir N için $n \geq N$ iken $0 < |x_n - a| < \delta$, dolayısıyla $f(x_n) > M$; yani $f(x_n) \rightarrow +\infty$. $(\Leftarrow)$ Limit $+\infty$ değilse bir $M_0 > 0$ vardır: her δ için $0 < |x - a| < \delta$ ve $f(x) \leq M_0$ olan bir $x \in A$ bulunur. $\delta = \frac{1}{n}$ ile x_n seçelim; $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, ama $f(x_n) \leq M_0$ olduğundan ($f(x_n)$) hiçbir zaman M_0 'ı aşmaz, $+\infty$ 'a ıraksayamaz; çelişki.

■

Teorem, dizilerle ilgili bildiğimiz her şeyi fonksiyonlara taşıyan bir köprüdür. İlk iki kullanımını hemen yazalım.

Sonuç 32.1 (Dizisel Ölçütün İki Sonucu).

1. **Limitin yokluğu.** p 'ye uygun iki dizi (x_n) , (y_n) için $f(x_n) \rightarrow L_1$, $f(y_n) \rightarrow L_2$ ve $L_1 \neq L_2$ ise $(L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$, $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ hiçbir L 'ye eşit değildir: ne sonlu ne sonsuz.
2. **Fonksiyondan diziyeye.** $\mathbb{N} \subseteq A$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ise $a_n = f(n)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 'dir.

İspat.

(1) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ olsaydı Teorem 32.1 gereği $f(x_n) \rightarrow L$ ve $f(y_n) \rightarrow L$ olurdu. Bir dizinin hedefi tektir: sonlu limitin tekliği Teorem 20.1'nden; $+\infty$ 'a ıraksayan bir dizinin üstten sınırsız olduğu için yakınsak olamayacağı Önerme 22.1 ve Teorem 20.2'den; aynı dizinin $-\infty$ 'a da ıraksayamayacağı ($M = 1$ için hem $a_n > 1$ hem $a_n < -1$ olamaz) tanımdan görülür. O hâlde $L_1 = L = L_2$; çelişki.

(2) $x_n = n$ dizisi $\mathbb{N} \subseteq A$ içinde kalır ve $+\infty$ 'a ıraksar: $M > 0$ verildiğinde Sonuç 12.1 ile $n_M > M$ olan bir $n_M \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \geq n_M$ iken $n > M$. Yani (n) , $+\infty$ 'a uygun bir dizidir; teorem $f(n) \rightarrow L$ verir.

■

(2)'nin karşıtı yanlışdır: dizinin limiti fonksiyonun limitini vermez.

Örnek 32.4 (Dizi Yakınsar, Fonksiyonun Limiti Yoktur). $f(x) = \sin(\pi x)$ olsun. $a_n = f(n)$ dizisi 0'a yakınsar ama $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ yoktur; gösterelim.

Çözüm.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin(n\pi) = 0$, yani (a_n) sabit 0 dizisidir ve 0'a yakınsar. Şimdi $y_n = 2n + \frac{1}{2}$ alalım; $y_n > n$ ve (n) dizisi $+\infty$ 'a ıraksadığından (Sonuç 32.1 ispatındaki gibi) Teorem 22.4 gereği $y_n \rightarrow +\infty$; yani (y_n) , $+\infty$ 'a uygun bir dizidir. Ama

$$f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

yani $f(y_n) \rightarrow 1$. $(x_n) = (n)$ dizisi de uygundur ve $f(x_n) \rightarrow 0$. $0 \neq 1$ olduğundan Sonuç 32.1 gereği f 'nin $+\infty$ 'da limiti yoktur. Fonksiyon x büyürken -1 ile 1 arasında salınmaya devam eder; tam sayılarda hep 0 olması bunu gizler.

■

32.4 Sonsuz Limitlerle İşlemler

Sonlu limitlerin aritmetiğini (Teorem 29.2) $x \rightarrow a$ için ispatlamıştık. Şimdi hem bunu $x \rightarrow \pm\infty$ 'a genişletecek hem de sonsuz limitlerle toplama, çarpma ve ters almanın kurallarını yazacağız. Kural listesi uzun görünür ama hepsi aynı sezgiye dayanır: “büyük + sınırlı = büyük”, “büyük $\times$ pozitif = büyük”, “büyüğün tersi = küçük”.

Teorem 32.2 (Limit Kuralları: Sonsuzdaki Limitler ve Sonsuz Limitler). $x \rightarrow p$ beş süreçten biri, $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bütün limitler $x \rightarrow p$ içindir.

1. **Sonlu aritmetik.** $f \rightarrow \ell_1$ ve $g \rightarrow \ell_2$ ise $f + g \rightarrow \ell_1 + \ell_2$, $fg \rightarrow \ell_1 \ell_2$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $cf \rightarrow c\ell_1$. Ayrıca $\ell_2 \neq 0$ ve p 'ye yeterince yakın her x için $g(x) \neq 0$ ise $f/g \rightarrow \ell_1/\ell_2$.
2. **Sıralama ve sıkıştırma.** p 'ye yeterince yakın her x için $f(x) \leq g(x)$ ve $f \rightarrow \ell_1$, $g \rightarrow \ell_2$ ise $\ell_1 \leq \ell_2$. p 'ye yeterince yakın her x için $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ve $f \rightarrow \ell$, $h \rightarrow \ell$ ise $g \rightarrow \ell$.
3. **Sonsuzla toplama.** $f \rightarrow +\infty$ ve g, p 'ye yeterince yakın x 'lerde alttan sınırlıysa $f + g \rightarrow +\infty$. Özel olarak $g \rightarrow +\infty$ ya da $g \rightarrow \ell$ ise $f + g \rightarrow +\infty$. ($f \rightarrow -\infty$ ve g üstten sınırlıysa $f + g \rightarrow -\infty$.)
4. **Sonsuzla çarpma.** $f \rightarrow +\infty$ olsun. $g \rightarrow \ell > 0$ ya da $g \rightarrow +\infty$ ise $fg \rightarrow +\infty$; $g \rightarrow \ell < 0$ ya da $g \rightarrow -\infty$ ise $fg \rightarrow -\infty$.
5. **Ters alma.** $f \rightarrow +\infty$ ya da $f \rightarrow -\infty$ ise $\frac{1}{f} \rightarrow 0$. $f \rightarrow 0$ ve p 'ye yeterince yakın her x için $f(x) > 0$ ise $\frac{1}{f} \rightarrow +\infty$; $f(x) < 0$ ise $\frac{1}{f} \rightarrow -\infty$.
6. **Sonsuz limitte sıralama.** p 'ye yeterince yakın her x için $f(x) \leq g(x)$ olsun. $f \rightarrow +\infty$ ise $g \rightarrow +\infty$; $g \rightarrow -\infty$ ise $f \rightarrow -\infty$.

İspat.

(1) ve (2)'yi dizi sel ölçüt ile dizilere aktaracağız; (3)–(6)'yı doğrudan tanımdan ispatlayacağız. Boyunca “yeterince yakın” dilini ve iki yakınlık koşulunun birleştirilebildiğini (yukarıdaki not) kullanıyoruz.

(1) (x_n) , p 'ye uygun herhangi bir dizi olsun. Teorem 32.1'in $(\Rightarrow)$ yönüyle $f(x_n) \rightarrow \ell_1$ ve $g(x_n) \rightarrow \ell_2$. Diziler için limit aritmetiği (Teorem 21.1) gereği $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell_1 + \ell_2$, $(fg)(x_n) \rightarrow \ell_1 \ell_2$ ve $(cf)(x_n) \rightarrow c\ell_1$. Uygun dizi keyfi olduğundan $(\Leftarrow)$ yönü $f + g \rightarrow \ell_1 + \ell_2$, $fg \rightarrow \ell_1 \ell_2$, $cf \rightarrow c\ell_1$ verir. Bölüm için: f/g fonksiyonunun tanım kümesi $A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ 'dır; hipotez gereği p 'ye yeterince yakın her x A_0 'dadır, dolayısıyla p süreci A_0 için de ön koşulu sağlar ve A_0 'daki p 'ye uygun her dizi A 'da da uygundur. Böyle bir dizi için her n 'de $g(x_n) \neq 0$ ve $g(x_n) \rightarrow \ell_2 \neq 0$; Teorem 21.1'nin bölüm kuralı $f(x_n)/g(x_n) \rightarrow \ell_1/\ell_2$ verir.

(2) (x_n) uygun olsun. $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliği p 'ye r kadar yakın x 'lerde geçerliyse, $x_n \rightarrow p$ olduğundan bir N 'den sonra x_n bu yakınlıktadır ve $n \geq N$ için $f(x_n) \leq g(x_n)$. Kuyruk dizileri $(f(x_n))_{n \geq N}$ ve $(g(x_n))_{n \geq N}$ aynı ℓ_1, ℓ_2 limitlerine sahiptir (Teorem 24.3); Teorem 21.3 $\ell_1 \leq \ell_2$ verir. Sıkıştırma da aynı biçimde Teorem 21.6'den gelir: $n \geq N$ için $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ ve uçlar ℓ 'ye gittiğinden $g(x_n) \rightarrow \ell$; uygun dizi keyfi olduğundan $g \rightarrow \ell$.

(3) g, p 'ye yeterince yakın x 'lerde alttan sınırlı olsun: bir $m \in \mathbb{R}$ için $g(x) \geq m$. $M > 0$ verilsin. $f \rightarrow +\infty$ olduğundan $M' = \max\{M - m, 1\} > 0$ eşiği için p 'ye yeterince yakın her x 'te $f(x) > M'$. İki koşulu birleştirelim: p 'ye yeterince yakın her x için

$$f(x) + g(x) > M' + m \geq (M - m) + m = M.$$

Bu, $f + g \rightarrow +\infty$ demektir. $g \rightarrow +\infty$ ise ($M = 1$ ile) p 'ye yeterince yakın x 'lerde $g(x) > 1$, yani g alttan sınırlıdır; $g \rightarrow \ell$ ise ($\varepsilon = 1$ ile) $g(x) > \ell - 1$, yine alttan sınırlıdır. $-\infty$ durumu için $-f$ ve $-g$ 'ye geçilir: $f \rightarrow -\infty$ demek, tanımlar karşılaştırılınca, $-f \rightarrow +\infty$ demektir.

(4) Önce g 'nin p yakınında pozitif bir sabitin üstünde kaldığını görelim. $g \rightarrow \ell > 0$ ise $\varepsilon = \ell/2$ ile p 'ye yeterince yakın x 'lerde $|g(x) - \ell| < \ell/2$, dolayısıyla $g(x) > \ell/2 =: m > 0$. $g \rightarrow +\infty$ ise $M = 1$ ile $g(x) > 1 =: m$. Şimdi $M > 0$ verilsin; $f \rightarrow +\infty$ olduğundan p 'ye yeterince yakın x 'lerde $f(x) > M/m > 0$. Koşulları birleştirenince, $f(x) > M/m > 0$ ve $g(x) \geq m > 0$ olduğundan

$$f(x)g(x) > \frac{M}{m} g(x) \geq \frac{M}{m} \cdot m = M.$$

Yani $fg \rightarrow +\infty$. Negatif durumda $-g \rightarrow -\ell > 0$ ((1)'de $c = -1$) ya da $-g \rightarrow +\infty$; az önce ispatlanan kısım $f \cdot (-g) \rightarrow +\infty$ verir ve $fg = -(f \cdot (-g)) \rightarrow -\infty$.

(5) $f \rightarrow +\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $M = 1/\varepsilon$ için p 'ye yeterince yakın her x 'te $f(x) > 1/\varepsilon > 0$; bu x 'lerde $1/f$ tanımlıdır ve ters alma sıralamayı çevirdiğinden $0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$, yani $|\frac{1}{f(x)} - 0| < \varepsilon$. Böylece $1/f \rightarrow 0$. $f \rightarrow -\infty$ ise $-f \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{-f} \rightarrow 0$ ve $\frac{1}{f} = -\frac{1}{-f} \rightarrow 0$ ((1)'de $c = -1$).

Şimdi $f \rightarrow 0$ ve p 'ye yeterince yakın x 'lerde $f(x) > 0$ olsun. $M > 0$ verilsin; $\varepsilon = 1/M$ için p 'ye yeterince yakın her x 'te $|f(x)| < 1/M$. Pozitiflikle birleştirenince $0 < f(x) < 1/M$, dolayısıyla $\frac{1}{f(x)} > M$. Yani $1/f \rightarrow +\infty$. Negatif durum $-f$ ile aynıdır.

(6) $M > 0$ verilsin. $f \rightarrow +\infty$ olduğundan p 'ye yeterince yakın x 'lerde $f(x) > M$; eşitsizlik koşuluyla birleştirince $g(x) \geq f(x) > M$. Yani $g \rightarrow +\infty$. İkinci ifade, $-f$ ve $-g$ ile ilkinе döner.

■

Teoremin (1) ve (2) maddeleri, $x \rightarrow a$ için bildiğimiz kuralların (Teorem 29.2, Teorem 30.4, Teorem 30.5) artık tek yönlü limitler ve $x \rightarrow \pm\infty$ için de kullanılabileceğini söyler; önceki bölümde tek yönlü sürümleri kısıtlama yoluyla görmüştük, şimdi hepsi tek ispatta toplandı. (3)–(6) ise sonsuzla hesap yapmanın iznli yollarıdır; kısaca

$$(+\infty) + (\text{alttan sınırlı}) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (\text{pozitif}) = +\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Bu kısaltmalar yalnızca teoremin söylediği kadarını söyler; sonsuzla aritmetik yapılmaz, teorem uygulanır.

⚠ Belirsiz biçimler

Teoremdе **olmayan** durumlar da öğreticidir. $f \rightarrow +\infty$ ve $g \rightarrow -\infty$ ise $f + g$ hakkında hiçbir şey söylenemez (" $\infty - \infty$ "); $f \rightarrow \pm\infty$ ve $g \rightarrow 0$ ise fg hakkında da (" $0 \cdot \infty$ "). $x \rightarrow +\infty$ için örnekler:

- $x^2 - x = x(x - 1) \rightarrow +\infty$ ((4) ile: $x \rightarrow +\infty$ ve $x - 1 \rightarrow +\infty$), ama $x - x^2 \rightarrow -\infty$ ve $(x + 1) - x = 1 \rightarrow 1$.
- $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \rightarrow 1$, $x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \rightarrow +\infty$, $x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$; her çarpımda ilk çarpan $+\infty$ 'a, ikincisi 0'a gider.

Aynı biçimde " ∞/∞ " ve " $0/0$ " biçimleri de belirsizdir: $\frac{x^2}{x}$, $\frac{x}{x^2}$, $\frac{2x}{x}$ sırasıyla $+\infty$, 0, 2'ye gider. Belirsizlik "limit yok" demek değildir; "bu bilgiyle karar verilemez, ifadeyi dönüştürüp yeniden bak" demektir. Bir sonraki teorem, " ∞/∞ " biçiminin en önemli sınıfını tümüyle çözer.

32.5 Rasyonel Fonksiyonların Sonsuzdaki Limitleri

Polinom bölümlerinin $x \rightarrow \pm\infty$ iken davranışı yalnızca **en yüksek dereceli terimlere** bağlıdır. Önce polinomların kendisine bakalım.

Lemma 32.1 (Polinomun Sonsuzdaki Davranışı). $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$ ve $a_n \neq 0$ olsun. $x \neq 0$ için

$$p(x) = x^n P(x), \quad P(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

yazılır ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_n$ 'dir. Sonuç olarak $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$, $a_n > 0$ ise $+\infty$, $a_n < 0$ ise $-\infty$ 'dur; $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$ ise $a_n(-1)^n$ pozitifse $+\infty$, negatifse $-\infty$ 'dur.

İspat.

Çarpanlara ayırma, $x^n \cdot \frac{a_k}{x^{n-k}} = a_k x^k$ özdeşliğinin terim terim uygulanmasıdır. **Önerme 32.3** (3) gereği her $k \geq 1$ için $\frac{1}{x^k} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$); **Teorem 32.2** (1) ile $\frac{a_{n-k}}{x^k} = a_{n-k} \cdot \frac{1}{x^k} \rightarrow 0$ ve sonlu toplam $P(x) \rightarrow a_n + 0 + \dots + 0 = a_n$.

$x \rightarrow +\infty$ için $x^n \rightarrow +\infty$ (**Önerme 32.3** (1)) ve $P \rightarrow a_n \neq 0$; **Teorem 32.2** (4) gereği $p = x^n P$, a_n 'nin işaretine göre $+\infty$ ya da $-\infty$ 'a gider. $x \rightarrow -\infty$ için n çiftse $x^n \rightarrow +\infty$ ve aynı akıl yürütme geçerlidir. n tekse $x^n \rightarrow -\infty$, yani $-x^n \rightarrow +\infty$; (4) ile $(-x^n)P$, a_n 'nin işaretine göre $\pm\infty$ 'a gider ve $p = -[(-x^n)P]$ ters işaretle gider. Her durumda işaret $a_n(-1)^n$ 'in işaretidir.

■

Teorem 32.3 (Rasyonel Fonksiyonun Sonsuzdaki Limiti). $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$) ve $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ ($b_m \neq 0$) polinomlar ve $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ($q(x) \neq 0$ olan x 'lerde) olsun. $x \rightarrow +\infty$ iken:

1. $n < m$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = 0$;
2. $n = m$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$;
3. $n > m$ ise $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x)$, $\frac{a_n}{b_m} > 0$ ise $+\infty$, $\frac{a_n}{b_m} < 0$ ise $-\infty$ 'dur.

$x \rightarrow -\infty$ iken (1) ve (2) aynen geçerlidir; (3)'te işaret, $\frac{a_n}{b_m}(-1)^{n-m}$ 'in işaretidir.

İspat.

Lemma 32.1'daki gibi $x \neq 0$ için $p(x) = x^n P(x)$ ve $q(x) = x^m Q(x)$ yazalım; $P \rightarrow a_n$ ve $Q \rightarrow b_m$ ($x \rightarrow \pm\infty$). ($m = 0$ ise $Q = b_0$ sabittir; $n = 0$ ise $P = a_0$; ispat değişmez.)

Payda sıfırdan uzak kalır. $\varepsilon = |b_m|/2$ için, yeterince büyük her x 'te $|Q(x) - b_m| < |b_m|/2$; ters üçgen eşitsizliği (**Sonuç 8.3**) ile $|Q(x)| \geq |b_m| - |Q(x) - b_m| > |b_m|/2 > 0$. Dolayısıyla yeterince büyük x 'lerde $Q(x) \neq 0$ ve $q(x) = x^m Q(x) \neq 0$; r bu x 'lerde tanımlıdır ve $x \rightarrow +\infty$ süreci r 'nin tanım kümesi için ön koşulu sağlar. Bu x 'lerde

$$r(x) = \frac{x^n P(x)}{x^m Q(x)} = x^{n-m} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \frac{a_n}{b_m} \neq 0$$

(**Teorem 32.2** (1), bölüm kuralı).

(1) $n < m$: $x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0$ (**Önerme 32.3** (3)); çarpım kuralı ile $r(x) \rightarrow 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0$.

(2) $n = m$: $x^0 = 1$, dolayısıyla $r(x) = P(x)/Q(x) \rightarrow a_n/b_m$.

(3) $n > m$: $x^{n-m} \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$; **Önerme 32.3** (1)) ve $P/Q \rightarrow a_n/b_m \neq 0$; **Teorem 32.2** (4) gereği $r = x^{n-m} \cdot (P/Q)$, a_n/b_m 'nin işaretine göre $+\infty$ ya da $-\infty$ 'a gider.

$x \rightarrow -\infty$ için (1) ve (2)'de kullanılan limitler aynıdır. (3)'te x^{n-m} , $n - m$ çiftse $+\infty$ 'a, tekse $-\infty$ 'a gider (**Önerme 32.3** (2)); tek durumda $-x^{n-m} \rightarrow +\infty$ ile (4) uygulanıp işaret çevrilir. Sonuç: işaret, $\frac{a_n}{b_m}(-1)^{n-m}$ 'in işaretidir.

■

🔍 Hesap reçetesi: en yüksek dereceye böl

Uygulamada ispattaki adım yeniden yapılır: pay ve paydayı paydanın en yüksek kuvveti x^m 'e bölün; $\frac{1}{x^k} \rightarrow 0$ olduğundan geriye yalnızca baş katsayılar (ve $n > m$ ise bir x^{n-m} çarpanı) kalır. Bu, diziler için **Teorem 21.1**'nin ardından kullandığımız yöntemin aynısıdır. Sonlu bir a noktasındaki limit için ise bu teorem değil **Sonuç 29.4** kullanılır: $q(a) \neq 0$ ise $r(a)$ yerine konur.

Örnek 32.5 (Sonsuzda Rasyonel Fonksiyon Hesapları). Aşağıdaki limitleri bulalım.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$.
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}$.
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$.

Çözüm.

a) $n = m = 2$; **Teorem 32.3** (2) gereği her iki limit de $\frac{3}{2}$ 'dir. Reçeteyle: $x \neq 0$ için

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^2}} \rightarrow \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

b) $n = 3 > m = 2$ ve $a_n/b_m = 1 > 0$. $x \rightarrow +\infty$ için limit $+\infty$; $x \rightarrow -\infty$ için işaret $1 \cdot (-1)^{3-2} = -1$, limit $-\infty$. Doğrudan görmek için: $\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} = x \cdot \frac{1 - 2/x^2}{1 + 1/x^2}$; ikinci çarpan 1'e giderken ilki $\pm\infty$ 'a gider ve **Teorem 32.2** (4) uygulanır.

c) $n = 1 < m = 2$; her iki limit de 0'dır: $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + 1/x^2} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$.

■

Rasyonel olmayan ifadelerde de aynı fikir – “baskın terimi öne çıkar” – çalışır; ama bazen önce bir cebirsel dönüşüm gerekir.

Örnek 32.6 (Karekök Farkı: Bir Belirsizliği Çözmek). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ limitlerini bulalım. (Fonksiyon $x^2 + x = x(x + 1) \geq 0$ olan, yani $x \geq 0$ ya da $x \leq -1$ olan x 'lerde tanımlıdır.)

Çözüm.

$x \rightarrow +\infty$. $\sqrt{x^2 + x} \geq \sqrt{x^2} = x \rightarrow +\infty$ ve $x \rightarrow +\infty$; fark bir “ $\infty - \infty$ ” belirsizliğidir. Eşlenikle çarpalım: $x > 0$ için

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

Pay ve paydayı $x > 0$ 'a bölelim; $x > 0$ için $\sqrt{x^2} = x$ olduğundan $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + 1/x}$ ve

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Geriye $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 1/x} = 1$ kaldı. $u = 1/x > 0$ için

$$|\sqrt{1+u} - 1| = \frac{(\sqrt{1+u} - 1)(\sqrt{1+u} + 1)}{\sqrt{1+u} + 1} = \frac{u}{\sqrt{1+u} + 1} \leq u,$$

çünkü payda 1'den büyüktür. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $x > K = 1/\varepsilon$ için $u = 1/x < \varepsilon$, dolayısıyla $|\sqrt{1 + 1/x} - 1| < \varepsilon$; yani $\sqrt{1 + 1/x} \rightarrow 1$. **Teorem 32.2** (1) ile payda $1 + 1 = 2$ 'ye, bölüm $\frac{1}{2}$ 'ye gider:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}.$$

$x \rightarrow -\infty$. Burada belirsizlik yoktur: $x \leq -1$ için $\sqrt{x^2 + x} \geq 0$ ve $-x > 0$, dolayısıyla

$$\sqrt{x^2 + x} - x \geq -x.$$

$x \rightarrow -\infty$ iken $-x \rightarrow +\infty$ (**Önerme 32.3** (2), $k = 1$, işareti çevrilmiş) olduğundan **Teorem 32.2** (6) gereği $\sqrt{x^2 + x} - x \rightarrow +\infty$.

Ders: aynı ifade iki yönde bambaşka davranabilir; $\sqrt{x^2}$ 'yi x sanmak ($|x|$ yerine) bu örnekte $x \rightarrow -\infty$ için yanlış cevap verir.

■

32.6 Asimptotlar

Sonsuz limitlerin ve sonsuzdaki limitlerin grafik dilinde bir karşılığı vardır: fonksiyonun grafiği, belli bir doğruya sınırsızca yaklaşır. Böyle doğrulara asimptot denir.

Tanım 32.3 (Düşey ve Yatay Asimptot). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

1. $a \in \mathbb{R}$ için, anlamlı olan $f(a^+)$ ve $f(a^-)$ tek yönlü limitlerinden en az biri $+\infty$ ya da $-\infty$ ise $x = a$ doğrusuna f 'nin grafiğinin bir **düşey asimptotu** (vertical asymptote) denir.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ya da $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ise ($\ell \in \mathbb{R}$) $y = \ell$ doğrusuna f 'nin grafiğinin bir **yatay asimptotu** (horizontal asymptote) denir.

Geometrik anlam: yatay asimptotta $|f(x) - \ell|$, grafik noktası $(x, f(x))$ 'in $y = \ell$ doğrusuna uzaklığıdır ve $x \rightarrow \pm\infty$ iken 0'a gider. Düşey asimptotta ise $x \rightarrow a$ iken grafik noktasının $x = a$ doğrusuna uzaklığı $|x - a|$ sifıra giderken $|f(x)|$ sınırsızca büyür; grafik doğruya yaslanarak yukarı ya da aşağı kaçır. Bir fonksiyonun en çok iki yatay asimptotu olabilir (biri $+\infty$, biri $-\infty$ yönünde; sonsuzdaki limit de tektir, çünkü dizisel ölçütle bu, dizi limitinin tekliliğine iner), ama düşey asimptotları sonsuz çoklukta olabilir: $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$ ($x \notin \mathbb{Z}$) fonksiyonu için her $k \in \mathbb{Z}$ 'de, $k < x < k + 1$ iken $[x] = k$ olduğundan (**Tanım 12.1**) $x \rightarrow k^+$ iken $x - [x] = x - k \rightarrow 0$ ve pozitifdir; **Teorem 32.2** (5) ile $f(k^+) = +\infty$. Her tam sayıda bir düşey asimptot vardır.

i Grafik yatay asimptotu kesebilir

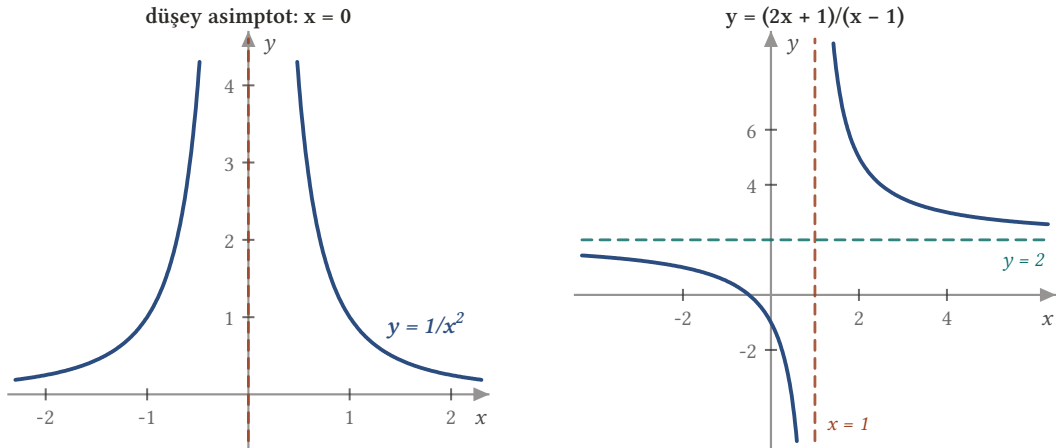
“Asimptota yaklaşır ama ona hiç değmez” cümlesi dikey asimptot için doğrudur (orada fonksiyon ya tanımsızdır ya da değeri limitle ilgisizdir), yatay asimptot için **yanlıştır**. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ için $y = 0$ yatay asimptottur (Örnek 32.5, c) ama $f(0) = 0$: grafik asimptotun tam üstünden geçer. Yatay asimptot, “büyük $|x|$ ’lerde” davranışı tarif eder; sonlu bölgede ne olduğunu söylemez.

Örnek 32.7 (Asimptot Bulma). $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ve $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ fonksiyonlarının dikey ve yatay asimptotlarını bulalım.

Çözüm.

$f(x) = 1/x^2$. Örnek 32.1 gereği $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; özel olarak $f(0^+) = f(0^-) = +\infty$ (Önerme 32.2) ve $x = 0$ dikey asimptottur. Önerme 32.3 (3) ile $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ yatay asimptottur. Başka dikey asimptot yoktur: $a \neq 0$ için f ’nin a ’da sonlu limiti $1/a^2$ ’dir (Sonuç 29.4); tek yönlü limitler de bu sayıya eşittir (Teorem 31.1) ve sonsuz olamazlar (Önerme 32.1).

$g(x) = (2x+1)/(x-1)$. Yatay: $n = m = 1$; Teorem 32.3 (2) ile $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$; $y = 2$ yatay asimptottur. Dikey: $x = 1$ ’de payda sıfırlanır. $g(x) = (2x+1) \cdot \frac{1}{x-1}$ yazalım. $x \rightarrow 1^+$ iken $x-1 \rightarrow 0$ ve $x > 1$ için $x-1 > 0$; Teorem 32.2 (5) ile $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$. $2x+1 \rightarrow 3 > 0$ (Sonuç 29.3); (4) ile $g(1^+) = +\infty$. $x \rightarrow 1^-$ iken $x-1 < 0$, dolayısıyla $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ ve $-\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$; $2x+1 \rightarrow 3 > 0$ ile (4) $-g \rightarrow +\infty$ verir, yani $g(1^-) = -\infty$. $x = 1$ dikey asimptottur; grafik sağdan yukarı, soldan aşağı kaçır. $a \neq 1$ için g ’nin sonlu limiti vardır; başka dikey asimptot yoktur.



Şekil 32.3: Solda $y = 1/x^2$: $x \rightarrow 0$ iken değerler sınırsız büyür, grafik $x = 0$ doğrusuna yaslanır (dikey asimptot); $x \rightarrow \pm\infty$ iken de 0’a yaklaşır. Sağda $y = (2x+1)/(x-1)$: $x = 1$ ’de dikey asimptot vardır; $x \rightarrow \pm\infty$ iken limit 2 olduğundan $y = 2$ doğrusu yatay asimptottur.

Yatay asimptotu bir de “uzaklık” diliyle görelim: $g(x) - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$; $x \rightarrow \pm\infty$ iken $\frac{3}{x-1} \rightarrow 0$, yani grafik $y = 2$ doğrusuna sınırsızca yaklaşır ($x > 1$ için üstten, $x < 1$ için alttan).

Rasyonel fonksiyonlar için yatay asimptot sorusu Teorem 32.3 ile tümüyle cevaplanır.

Sonuç 32.2 (Rasyonel Fonksiyonun Asimptotları). $r = p/q$, dereceleri n ve m , baş katsayıları a_n ve b_m olan polinomların bölümü olsun.

1. $n < m$ ise $y = 0$ tek yatay asimptottur.
2. $n = m$ ise $y = a_n/b_m$ tek yatay asimptottur.
3. $n > m$ ise yatay asimptot yoktur.

Ayrıca $q(a) = 0, p(a) \neq 0$ ve a, r 'nin tanım kümesi $\{x : q(x) \neq 0\}$ 'in bir yığılma noktası ise (bir polinomun sonlu sayıda kökü olduğundan bu her zaman böyledir; burada ispatlamıyoruz) $\lim_{x \rightarrow a} |r(x)| = +\infty$ 'dur; dolayısıyla r 'nin a 'da sonlu limiti yoktur.

İspat.

(1)–(3), **Teorem 32.3**'ün yeniden ifadesidir: iki yönde de limit aynı sonlu sayıdır ya da iki yönde de sonsuzdur; ikinci durumda hiçbir ℓ için yatay asimptot tanımı sağlanmaz, çünkü **Önerme 32.1**'in $x \rightarrow \pm\infty$ sürümü aynı ispatla geçerlidir ($f \rightarrow +\infty$ ise yeterince büyük x 'lerde f üstten sınırsızdır, sonlu limitte $\varepsilon = 1$ ile sınırlılık verir).

Son iddia için: $|r(x)| = |p(x)| \cdot \frac{1}{|q(x)|}$. $x \rightarrow a$ iken $|q(x)| \rightarrow |q(a)| = 0$ (**Sonuç 29.3** ve **Teorem 30.1**) ve r 'nin tanım kümesinde $|q(x)| > 0$; **Teorem 32.2** (5) ile $\frac{1}{|q(x)|} \rightarrow +\infty$. $|p(x)| \rightarrow |p(a)| > 0$; (4) ile $|r(x)| \rightarrow +\infty$. r 'nin a 'da sonlu bir limiti olsaydı $|r|$ 'nin de sonlu limiti olurdu (**Teorem 30.1**); bu, **Önerme 32.1** ile çelişir.

■

Hangi yönde ($+\infty$ mu, $-\infty$ mu) kaçtığı ise paydanın a 'nın iki yanındaki işaretine bakılarak, örnekteki gibi bulunur. Son bir not: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - (mx + b) \right) = 0$ ise $y = mx + b$ doğrusuna **eğik asimptot** (oblique asymptote) denir; örneğin $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ için $y = x$ böyledir, çünkü fark $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. Bu kavramı burada daha ileri götürmeyeceğiz.

32.7 Alıştırmalar

Alıştırma 32.1 (Sonsuz Limitler ve Asimptotlar). a) Tanımla (ε - K) gösterin: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+2} = 3$.

b) Tanımla (M - δ) gösterin: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$.

c) $h(x) = \frac{x}{x-2}$ için $h(2^+)$ ve $h(2^-)$ 'yi kurallarla bulun; h 'nin bütün asimptotlarını yazın.

d) Limitleri bulun: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{5x^2-x}$; (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+1}{x^3-1}$; (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

e) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\ell \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ olması için gerek ve yeter koşulun $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = \ell$ olduğunu gösterin. (Bu, sonsuzdaki limitleri 0'daki sağ limitlere çeviren bir "değişken değiştirme"dir.)

Çözüm.

a) $x > 0$ için

$$\left| \frac{3x+1}{x+2} - 3 \right| = \left| \frac{3x+1-3x-6}{x+2} \right| = \frac{5}{x+2} < \frac{5}{x}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin; $K = \frac{5}{\varepsilon}$ alalım. $x > K$ ise $\frac{5}{x} < \frac{5}{K} = \varepsilon$, dolayısıyla $\left| \frac{3x+1}{x+2} - 3 \right| < \varepsilon$. (Teoremler: $n = m = 1$, limit $3/1 = 3$.)

b) $M > 0$ verilsin; $\delta = \frac{1}{M}$ alalım. $0 < |x-3| < \delta$ ise ters alma sıralamayı çevirdiğinden $\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{\delta} = M$. Tanım sağlanır. (Buna karşılık $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ ne sonlu ne sonsuzdur: sağdan $+\infty$, soldan $-\infty$; bu, **Örnek 32.2**'ün 3 birim sağa kaydırılmış hâlidir.)

c) $h(x) = x \cdot \frac{1}{x-2}$ yazalım. $x \rightarrow 2^+$ iken $x-2 \rightarrow 0$ ve $x > 2$ için pozitifdir; **Teorem 32.2** (5) ile $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$. İlk çarpan için $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 > 0$ olduğundan (4) ile $h(2^+) = +\infty$. $x \rightarrow 2^-$ iken $x-2 < 0$, dolayısıyla $\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty$ ve $-\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$; yine $\lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 > 0$ ile (4), $-h \rightarrow +\infty$ verir, yani $h(2^-) = -\infty$. Asimptotlar: $x = 2$ düşey asimptottur; $n = m = 1$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 1$ ve $y = 1$ yatay asimptottur (**Sonuç 32.2**). Başka yoktur: $a \neq 2$ için h 'nin a 'daki limiti sonlu $\frac{a}{a-2}$ sayıdır (**Sonuç 29.4**).

d) (i) $n = m = 2$: limit $\frac{2}{5}$. (ii) $n = 4 > m = 3$, $a_n/b_m = 1$, $x \rightarrow -\infty$ için işaret $(-1)^{4-3} = -1$: limit $-\infty$. Doğrudan: $\frac{x^4+1}{x^3-1} = x \cdot \frac{1+1/x^4}{1-1/x^3}$; ikinci çarpan 1'e, ilki $-\infty$ 'a gider. (iii) Eşlenik: $x > 0$ için

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}((x+1) - x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Son adımda pay ve payda $\sqrt{x} > 0$ 'a bölündü ve $\sqrt{x+1}/\sqrt{x} = \sqrt{1 + 1/x}$ kullanıldı. **Örnek 32.6**'da $\sqrt{1 + 1/x} \rightarrow 1$ gösterilmişti; bölüm kuralıyla limit $\frac{1}{2}$ 'dir.

e) Önce ön koşullar: $(0, \infty)$ üstten sınırsızdır; $g(t) = f(1/t)$ fonksiyonu her $t \in (0, \infty)$ için tanımlıdır ve 0, $(0, \infty)$ kümesinin yığılma noktasıdır; yani $t \rightarrow 0^+$ süreci anlamlıdır.

($\Rightarrow$ yönü) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ olsun; $\varepsilon > 0$ verilsin. $x > K$ iken $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $K > 0$ vardır. $\delta = \frac{1}{K}$ alalım. $0 < t < \delta$ ise $x = \frac{1}{t} > \frac{1}{\delta} = K$, dolayısıyla $|g(t) - \ell| = |f(1/t) - \ell| < \varepsilon$. Yani $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \ell$.

($\Leftarrow$ yönü) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \ell$ olsun; $\varepsilon > 0$ verilsin. $0 < t < \delta$ iken $|g(t) - \ell| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. $K = \frac{1}{\delta}$ alalım. $x > K$ ise $t = \frac{1}{x}$ için $0 < t < \frac{1}{K} = \delta$, dolayısıyla $|f(x) - \ell| = |g(t) - \ell| < \varepsilon$. Yani $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Aynı akıl yürütme ℓ yerine $\pm\infty$ için de (ε yerine M ile) geçerlidir. Örneğin $f(x) = 1/x$ için $g(t) = t$ 'dir; **Örnek 32.3**'daki $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ sonucu, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0$ 'ın bu yolla çevrilmiş hâlidir.

■

Bununla limit kavramının bütün biçimlerini elden geçirdik: sonlu noktada sonlu limit, tek yönlü limitler, sonsuz limitler ve sonsuzdaki limitler — hepsi tek bir kalıbın (“hedefin her seçimi için, yeterince yakın her x ”) örnekleri ve hepsi dizisel ölçütle dizilere bağlı. Şimdi limitin en önemli uygulamasına geçiyoruz: bir fonksiyonun bir noktadaki limiti o noktadaki değerine eşitse ne olur? [Süreklilik](#).

33. Süreklilik

Önceki bölümlerde bir fonksiyonun bir noktadaki **limitini** inceledik: x , a 'ya yaklaşırken $f(x)$ hangi sayıya yaklaşır? Limit, fonksiyonun a noktasındaki **değeriyle** ilgilenmez; $f(a)$ tanımlı olmayabilir, tanımlıysa bile limitten farklı olabilir. Bu bölümde yeni bir soru soruyoruz: limit ile değer ne zaman **uyuşur**? Yani x , a 'ya yaklaşırken $f(x)$ ne zaman tam olarak $f(a)$ 'ya yaklaşır?

Bu uyum sağlanıyorsa fonksiyona a noktasında **süreklili** diyeceğiz. Süreklilik, analizin en verimli kavramlarından biridir: sürekli fonksiyonlar ara değerleri atlamaz, kapalı aralıkta en büyük ve en küçük değerlerini alır, limitle yer değiştirebilir. Bu bölümde kavramı kuruyor ve temel araçları hazırlıyoruz; sonraki bölümlerde büyük teoremleri ispatlayacağız.

33.1 Bir Noktada Süreklilik

Lisede süreklilik çoğu zaman “grafiği kalem kaldırmadan çizilebilen fonksiyon” diye anlatılır. Bu sezgi yararlıdır ama yetersizdir. Dirichlet fonksiyonu gibi grafiği hiç çizilemeyen fonksiyonlar vardır; tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan bir fonksiyonun grafiği ise ayrık noktalardan oluşur, kalemle “çizmek” anlamsızdır. Bize kalem değil, ε ve δ gerekir.

Fikir şudur: f 'nin a 'da sürekli olması, $f(x)$ 'i $f(a)$ 'ya **istediğimiz kadar** yakın yapabilmemiz demektir; yeter ki x 'i a 'ya **yeterince** yakın seçelim. “İsteddiğimiz kadar” ε ile, “yeterince” δ ile ölçülür.

Tanım 33.1 (Bir Noktada Süreklilik). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in A \text{ ve } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

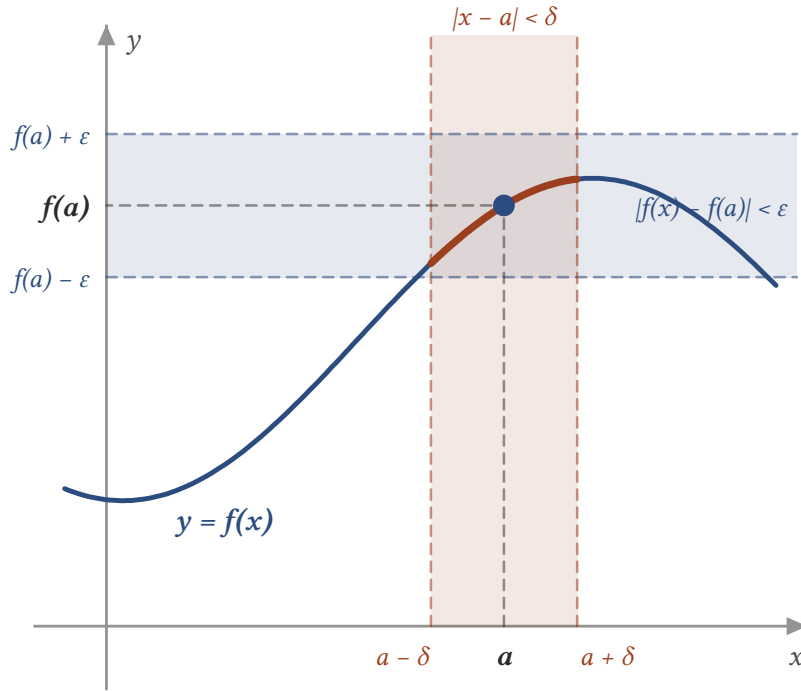
olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f 'ye a **noktasında sürekli** (continuous at a) denir. Sembolik olarak:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f , a noktasında sürekli değilse f 'ye a **noktasında süreksiz** (discontinuous at a) denir.

Komşuluk diliyle (Tanım 15.1) tanım şöyle okunur: $f(a)$ 'nın her $B(f(a), \varepsilon)$ komşuluğu için, a 'nın öyle bir $B(a, \delta)$ komşuluğu vardır ki $f, A \cap B(a, \delta)$ kümesini $B(f(a), \varepsilon)$ içine götürür:

$$f (A \cap B(a, \delta)) \subseteq B (f(a), \varepsilon) .$$



Şekil 33.1: Süreklilik tanımının resmi: $f(a)$ 'nın ε komşuluğu (yatay bant) verilince, a 'nın öyle bir δ komşuluğu (düşey pencere) bulunur ki pencerenin tamamı, a 'nın kendisi dâhil, bantta taşınır. Limit resminden farkı, a noktasının artık delinmemesi ve hedef değerin $f(a)$ olmasıdır.

i Limit tanımından üç fark

Süreklilik tanımını [Tanım 27.1](#) ile yan yana koyalım. Üç fark vardır:

1. Limit tanımında a 'nın A 'da olması gerekmez; süreklilik tanımında $a \in A$ **zorunludur**, çünkü $f(a)$ değeri işin içindedir.
2. Limit tanımında $0 < |x - a| < \delta$ yazılır, yani $x = a$ noktası dışlanır. Süreklilikte dışlamaya gerek yoktur: $x = a$ için $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ zaten sağlanır.
3. Limit tanımında a 'nın A 'nın bir yığılma noktası ([Tanım 17.1](#)) olması istenir. Süreklilik tanımında böyle bir koşul yoktur; a , A 'nın izole bir noktası da olabilir.

Bu farklara rağmen, a bir yığılma noktasıysa süreklilik tam olarak “limit, değere eşittir” demektir.

Önerme 33.1 (Yığılma Noktasında Süreklilik ve Limit). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. a aynı zamanda A 'nın bir yığılma noktasıysa ($a \in A \cap A'$),

$$f, a \text{ noktasında süreklidir} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) f , a 'da sürekli olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Tanımdan, $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Özel olarak $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ iken de $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur; bu, [Tanım 27.1](#) gereği $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ demektir.

($\Leftarrow$ yönü) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımından, $x \in A$ ve $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ olan herhangi bir x alalım. $x \neq a$ ise $0 < |x - a| < \delta$ olur ve $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sağlanır. $x = a$ ise $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ zaten doğrudur. Her iki durumda da süreklilik koşulu sağlanır.

■

Bu önerme sayesinde, tanım kümesi bir aralık olan fonksiyonlar için (aralığın her noktası yığılma noktasıdır) süreklilik, önceki bölümlerde geliştirdiğimiz bütün limit araçlarıyla incelenebilir. Yığılma noktası olmayan noktalarda ise durum daha da basittir.

Önerme 33.2 (İzole Noktada Süreklilik). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $a \in A$, A 'nın bir izole noktasıysa ([Tanım 17.3](#)) f , a noktasında süreklidir.

İspat.

a izole nokta olduğundan, izole nokta ölçütü ([Önerme 17.3](#)) gereği $A \cap B(a, \delta_0) = \{a\}$ olacak biçimde bir $\delta_0 > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = \delta_0$ alalım. $x \in A$ ve $|x - a| < \delta_0$ ise $x \in A \cap B(a, \delta_0) = \{a\}$, yani $x = a$ 'dır. O hâlde $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ olur. Tanım sağlanmıştır. ■

Örneğin $\mathbb{N}$ 'nin her noktası izoledir; dolayısıyla $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ biçimindeki her fonksiyon, yani her dizi, tanım kümesinin her noktasında süreklidir. Bu, sürekliliğin “kalemi kaldırmama” sezgisinden ne kadar farklı olduğunu gösterir: süreklilik fonksiyonun a 'ya yakın noktalardaki davranışıyla ilgilidir; yakında başka nokta yoksa söylenecek bir şey de yoktur.

Süreklilik bir noktada tanımlandı; bir fonksiyonun “sürekli olduğunu” söylemek ise bunun tanım kümesinin her noktasında sağlanması demektir.

Tanım 33.2 (Bir Küme Üzerinde Süreklilik). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $B \subseteq A$ olsun. f , B 'nin her noktasında sürekliyse f 'ye B üzerinde sürekli denir. f , A 'nın her noktasında sürekliyse kısaca f **süreklidir** denir.

⚠ Sürekliliğin olumsuzlanması

f 'nin $a \in A$ noktasında süreksiz olması, tanımdaki önermenin olumsuzudur. [Teorem 2.1](#) ile niceleyiciler tek tek çevrilir:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - a| < \delta \text{ ve } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Yani “kötü” bir ε_0 vardır: a 'ya ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım, görüntüsü $f(a)$ 'dan en az ε_0 uzakta kalan bir x bulunur. Süreksizliği göstermek için bir ε_0 seçip her δ için böyle bir x üretmek gerekir.

Örnek 33.1 (Sabit, Birim ve Kare Fonksiyonları). Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu ε - δ tanımıyla gösteriniz.

- a) $f(x) = c$ (sabit fonksiyon)
- b) $f(x) = x$ (birim fonksiyon)
- c) $f(x) = x^2$

Çözüm.

Her şıkta keyfi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ alıyoruz; uygun bir δ bulmalıyız.

a) $\delta = 1$ alalım. $|x - a| < 1$ olan her x için $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Aslında herhangi bir δ işe yarar.

b) $\delta = \varepsilon$ alalım. $|x - a| < \delta$ ise $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

c) Önce $|f(x) - f(a)|$ ifadesini $|x - a|$ cinsinden kontrol altına alalım:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|.$$

Sağdaki $|x + a|$ çarpanı x 'e bağlıdır; onu sınırlamak için önce $|x - a| < 1$ kabul edelim. Üçgen eşitsizliğiyle ([Teorem 8.2](#))

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|.$$

Böylece $|x - a| < 1$ iken

$$|x^2 - a^2| \leq |x - a| (1 + 2|a|)$$

olur. Bunun ε 'dan küçük kalması için $|x - a| < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$ yeterlidir. O hâlde

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|} \right\}$$

alalım. $|x - a| < \delta$ ise hem $|x - a| < 1$ hem de $|x - a| < \varepsilon/(1+2|a|)$ sağlanır; dolayısıyla

$$|x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{1+2|a|} \cdot (1+2|a|) = \varepsilon.$$

Demek ki x^2 her a noktasında süreklidir. Dikkat: burada δ hem ε 'a hem de a 'ya bağlıdır; $|a|$ büyüdükçe aynı ε için daha küçük bir δ gerekir.

■

33.2 Süreklilik için Dizisel Ölçüt

Fonksiyon limitini dizilerle karakterize eden [Teorem 28.1](#), süreklilik için de bir karşılık bulur. Üstelik burada dizilerin a değerini almasını yasaklamaya gerek yoktur.

Teorem 33.1 (Süreklilik için Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. f 'nin a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul şudur: A içinde a 'ya yakınsayan **her** (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi $f(a)$ 'ya yakınsar.

$$f, a \text{ 'da sürekli} \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A : (x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)) .$$

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) f, a 'da sürekli olsun; A içinde $x_n \rightarrow a$ olan bir (x_n) dizisi alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Süreklilikten, $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. $x_n \rightarrow a$ olduğundan bu δ için, $n \geq n_\delta$ iken $|x_n - a| < \delta$ olacak biçimde bir $n_\delta \in \mathbb{N}$ vardır ([Tanım 20.1](#)). $x_n \in A$ olduğundan $n \geq n_\delta$ için $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ elde edilir. Bu, $f(x_n) \rightarrow f(a)$ demektir.

($\Leftarrow$ yönü) Karşıt tersini gösterelim: f, a 'da sürekli **olmasın**; o zaman A içinde a 'ya yakınsayan ama görüntüsü $f(a)$ 'ya yakınsamayan bir dizi bulacağız. Sürekliliğin olumsuzlamasına göre öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için

$$|x - a| < \delta \text{ ve } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

olan bir $x \in A$ bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = 1/n$ alalım ve buna karşılık gelen noktaya x_n diyelim:

$$x_n \in A, \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

$0 \leq |x_n - a| < 1/n$ ve $1/n \rightarrow 0$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle ([Teorem 21.6](#)) $|x_n - a| \rightarrow 0$, yani $x_n \rightarrow a$ olur. Öte yandan her n için $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ olduğundan $(f(x_n))$ dizisi $f(a)$ 'ya yakınsamaz: yakınsasaydı $\varepsilon = \varepsilon_0$ için bir n 'den sonra $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon_0$ olması gerekirdi. Böylece hipotezi bozan bir dizi bulduk; karşıt ters ispatı tamamlanmıştır.

■

Teoremin iki yönü iki farklı işe yarar. $\Rightarrow$ yönü, sürekli bir fonksiyonun **limitle yer değiştirebileceğini** söyler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) .$$

$\Leftarrow$ yönü ise süreksizliği göstermenin en pratik yolunu verir.

Sonuç 33.1 (Dizilerle Süreksizlik). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. A içinde a 'ya yakınsayan öyle bir (x_n) dizisi varsa ki $(f(x_n))$ dizisi $f(a)$ 'ya yakınsamıyorsa (örneğin $f(x_n) \rightarrow \ell \neq f(a)$ ise, ya da $(f(x_n))$ ıraksaksa), f, a noktasında süreksizdir. Özel olarak, a 'ya yakınsayan iki dizinin görüntü dizileri farklı limitlere gidiyorsa f, a 'da süreksizdir.

İspat.

Teorem 33.1 gereği f a 'da sürekli olsaydı, a 'ya yakınsayan her dizinin görüntüsü $f(a)$ 'ya yakınsardı. Hipotezdeki dizi bunu bozar. İki dizi durumunda görüntü dizilerinin limitleri farklı olduğundan en az biri $f(a)$ 'dan farklıdır; o dizi süreksizliği verir.

■

Örnek 33.2 (Dirichlet Fonksiyonu Hiçbir Noktada Sürekli Değildir).

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'nin hiçbir noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

$a \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. Rasyonel sayıların yoğunluğu (Teorem 13.5) gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $(a, a + 1/n)$ aralığında bir q_n rasyonel sayısı vardır; irrasyonellerin yoğunluğu (Teorem 13.6) gereği aynı aralıkta bir i_n irrasyonel sayısı vardır. $a < q_n < a + 1/n$ ve $a + 1/n \rightarrow a$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle $q_n \rightarrow a$; aynı biçimde $i_n \rightarrow a$.

Görüntü dizileri sabittir: her n için $D(q_n) = 1$ ve $D(i_n) = 0$. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(q_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} D(i_n).$$

Sonuç 33.1 gereği D a 'da süreksizdir. a keyfi olduğundan D hiçbir noktada sürekli değildir. (Aynı diziler, Örnek 28.3 içinde D 'nin hiçbir noktada limiti olmadığını göstermişti; burada ek olarak $D(a)$ değerinin de yardımcı olamadığını görüyoruz.)

■

Örnek 33.3 (Yalnızca Bir Noktada Sürekli Fonksiyon). $g(x) = x \cdot D(x)$ olsun; yani

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

g 'nin yalnızca $a = 0$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a = 0$ 'da süreklilik. Her x için $|D(x)| \leq 1$ olduğundan

$$|g(x) - g(0)| = |x \cdot D(x)| \leq |x|.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon$ alalım: $|x - 0| < \delta$ ise $|g(x) - g(0)| \leq |x| < \varepsilon$. Tanım sağlanır.

$a \neq 0$ 'da süreksizlik. Önceki örnekteki gibi a 'ya yakınsayan bir (q_n) rasyonel dizisi ve bir (i_n) irrasyonel dizisi alalım. $g(q_n) = q_n \rightarrow a$ ve $g(i_n) = 0 \rightarrow 0$. $a \neq 0$ olduğundan iki görüntü dizisi farklı limitlere gider; **Sonuç 33.1** gereği g a 'da süreksizdir.

Demek ki sürekli olduğu noktaların kümesi $\{0\}$ olan bir fonksiyon vardır. Süreklilik gerçekten **noktasal** bir kavramdır.

■

33.3 Sürekli Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler

Her fonksiyonun sürekliliğini ε - δ ile göstermek zahmetlidir. Neyse ki süreklilik toplama, çarpma ve bölme altında korunur; böylece birkaç temel fonksiyondan başlayarak geniş bir sürekli fonksiyon ailesi elde ederiz. İspat için dizisel ölçüt ile dizi limitlerinin aritmetiğini (Teorem 21.1) birleştirmek yeterlidir.

Teorem 33.2 (Sürekli Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

1. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları a 'da süreklidir;
2. cf fonksiyonu a 'da süreklidir;

3. fg çarpım fonksiyonu a 'da süreklidir;
 4. $g(a) \neq 0$ ise, $A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ üzerinde tanımlı $\frac{f}{g}$ fonksiyonu a 'da süreklidir.

İspat.

Teorem 33.1 kullanacağız. A içinde $x_n \rightarrow a$ olan keyfi bir (x_n) dizisi alalım. f ve g a 'da sürekli olduğundan, yine dizisel ölçütle,

$$f(x_n) \rightarrow f(a), \quad g(x_n) \rightarrow g(a).$$

(1) ve (2) ve (3): Dizi limitlerinin aritmetiği (**Teorem 21.1**) gereği

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(a) + g(a), \quad f(x_n) - g(x_n) \rightarrow f(a) - g(a), \quad cf(x_n) \rightarrow cf(a), \quad f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(a)g(a).$$

Soldaki diziler sırasıyla $(f + g)(x_n)$, $(f - g)(x_n)$, $(cf)(x_n)$, $(fg)(x_n)$ dizileridir; sağdaki sayılar ise bu fonksiyonların a 'daki değerleridir. (x_n) keyfi olduğundan dizisel ölçüt her birinin a 'da sürekli olduğunu verir.

(4) $g(a) \neq 0$ olduğundan $a \in A_0$ 'dır. Bu kez A_0 içinde $x_n \rightarrow a$ olan keyfi bir dizi alalım. (x_n) aynı zamanda A içinde olduğundan $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ve $g(x_n) \rightarrow g(a)$; ayrıca her n için $g(x_n) \neq 0$ ve $g(a) \neq 0$. Bölüm için dizi limiti kuralı (**Teorem 21.1**) tam bu koşulları ister ve

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$$

verir. Dizisel ölçütle f/g a 'da süreklidir.

■

Teorem, sürekliliği “parçalardan” kurmamızı sağlar: iki sürekli fonksiyonun toplamının sürekli olduğunu her seferinde ε - δ ile göstermek gerekmez. İlk büyük uygulama polinomlardır.

Sonuç 33.2 (Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar Süreklidir).

1. Her $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomu $\mathbb{R}$ 'nin her noktasında süreklidir.
 2. p ve q polinomlar olmak üzere $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rasyonel fonksiyonu, tanım kümesi $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ üzerinde süreklidir.

İspat.

(1) **Örnek 33.1** gereği sabit fonksiyon ve x fonksiyonu her noktada süreklidir. $x^k = x \cdot x^{k-1}$ olduğundan, **Teorem 33.2** (3) ile k üzerinde tümevarım yaparak her x^k ($k \in \mathbb{N}$) fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Aynı teoremin (2) maddesiyle $a_k x^k$ sürekli, (1) maddesiyle de bunların sonlu toplamı olan p süreklidir. Bu sonuca bir de limit yoluyla bakalım: **Sonuç 29.3** her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ der; $a, \mathbb{R}$ 'nin bir yığılma noktası olduğundan **Önerme 33.1** ile bu, sürekliliktir.

(2) $q(a) \neq 0$ olan bir a alalım. p ve q (1) gereği a 'da süreklidir; **Teorem 33.2** (4) ile p/q a 'da süreklidir. (Aynı sonuç **Sonuç 29.4** ile de elde edilir.)

■

Örnek 33.4 (Parçalı Fonksiyonda Süreklilik Koşulu). $k \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k, & x < 1, \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonsiyonu verilsin. f 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için k ne olmalıdır?

Çözüm.

$a \neq 1$ noktaları. $a < 1$ ise $\delta_0 = 1 - a > 0$ alındığında $(a - \delta_0, a + \delta_0)$ aralığında $f(x) = x^2 + k$ 'dir; süreklilik yalnızca a 'ya yakın noktalara baktığından f 'nin a 'daki sürekliliği $x^2 + k$ polinomunun sürekliliğine indirgenir (**Sonuç 33.2**; polinom için bulunan δ 'nın δ_0 'dan küçük olanını almak yeter). $a > 1$ için de aynı gerekçeyle f , $3x - 1$ polinomu gibi davranır ve süreklidir. Bu noktalarda k 'nin bir rolü yoktur.

$a = 1$ noktası. 1, $\mathbb{R}$ 'nin yığılma noktası olduğundan süreklilik $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ demektir (Önerme 33.1). Limitin varlığı için sağ ve sol limitler var ve eşit olmalıdır (Teorem 31.1). $x > 1$ için $f(x) = 3x - 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2,$$

$x < 1$ için $f(x) = x^2 + k$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + k) = 1 + k.$$

(Her iki hesapta polinom limitini Sonuç 29.3 verir.) Limit var ve $f(1) = 2$ 'ye eşit olsun diye $1 + k = 2$, yani $k = 1$ gerekir. Bu değerde f her noktada sürekli; başka her k için f yalnızca 1 noktasında süreksizdir.

■

Polinomlardan sonra en sık kullandığımız fonksiyonlar mutlak değer ve kök fonksiyonlarıdır.

Önerme 33.3 (Mutlak Değer ve Kök Fonksiyonları Sürekli).

1. $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli.
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli.

İspat.

(1) $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) gereği her x için

$$||x| - |a|| \leq |x - a|.$$

$\delta = \varepsilon$ alırsak $|x - a| < \delta$ iken $||x| - |a|| < \varepsilon$ olur.

(2) Kök fonksiyonu Teorem 13.2 ile $[0, \infty)$ üzerinde tanımlıdır. İki durum vardır.

$a = 0$ durumu. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = \varepsilon^2$ alalım. $x \geq 0$ ve $|x - 0| < \delta$ ise $x < \varepsilon^2$; kök alma sıralamayı korur ($\sqrt{x} \geq \varepsilon$ olsaydı kare alarak $x \geq \varepsilon^2$ bulurduk), dolayısıyla $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \varepsilon$.

$a > 0$ durumu. $x \geq 0$ için paydayı eşlenikle genişletelim: $\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0$ olduğundan

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Son adımda $\sqrt{x} \geq 0$ olduğu için payda küçültülmüş, kesir büyütülmüştür. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ alalım: $x \geq 0$, $|x - a| < \delta$ ise $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \delta/\sqrt{a} = \varepsilon$.

(3) $n = 1$ için birim fonksiyon, $n = 2$ için (2) elde edilir; genel n için aynı fikri kullanırız. $u = x^{1/n}$ ve $v = a^{1/n}$ diyelim ($x, a \geq 0$). Çarpanlara ayırma özdeşliği

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

gereği $x - a = (u - v)S$ olur; burada S , parantez içindeki n terimli toplamdır ve her terimi ≥ 0 'dır.

$a = 0$ durumu. $\delta = \varepsilon^n$ alalım. $0 \leq x < \varepsilon^n$ ise, kök alma sıralamayı koruduğundan $x^{1/n} < \varepsilon$; yani $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

$a > 0$ durumu. S 'nin bütün terimleri negatif değildir ve son terimi $v^{n-1} = a^{(n-1)/n} > 0$ 'dır; o hâlde $S \geq a^{(n-1)/n}$ ve

$$|x^{1/n} - a^{1/n}| = |u - v| = \frac{|x - a|}{S} \leq \frac{|x - a|}{a^{(n-1)/n}}.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon a^{(n-1)/n}$ alınırsa $x \geq 0$ ve $|x - a| < \delta$ iken $|x^{1/n} - a^{1/n}| < \varepsilon$ olur.

■

Trigonometrik fonksiyonların sürekliliği için iki olguya ihtiyacımız var. Sinüs ve kosinüs bu derste henüz analitik olarak (kuvvet serileriyle) tanımlanmadı; geometrik tanımlarıyla çalışıyoruz. Aşağıdaki iki olguyu, [Teorem 30.6](#) ispatındaki geometrik karşılaştırmayla aynı düzeyde, **kabul** ediyoruz.

i Kabul edilen trigonometrik olgular

Her $t, x, a \in \mathbb{R}$ için

1. $|\sin t| \leq |t|$ (birim çemberde $|t|$ uzunluğundaki yayın ucundan yatay eksene inen dikmenin boyu $|\sin t|$ 'dir; dikme, yayın kirişinden, kiriş de yayın kendisinden kısadır; $|t| \geq \pi/2$ için ise $|\sin t| \leq 1 < |t|$);
2. toplam–fark özdeşlikleri:

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}, \quad \cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}.$$

Bu olgular Analiz 2’de sinüs ve kosinüs seriyle tanımlandığında ispatlanacaktır.

Önerme 33.4 (Sinüs ve Kosinüs Süreklidir). $\sin$ ve $\cos$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ fonksiyonu, $\cos x \neq 0$ olan her noktada süreklidir.

İspat.

$a \in \mathbb{R}$ olsun. Toplam–fark özdeşliği, $|\cos u| \leq 1$ ve $|\sin t| \leq |t|$ olgularıyla

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon$ alalım: $|x-a| < \delta$ ise $|\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \varepsilon$. Kosinüs için aynı hesap ikinci özdeşlikle yapılır:

$$|\cos x - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|.$$

Tanjant, iki sürekli fonksiyonun bölümüdür; [Teorem 33.2](#) (4) ile paydanın sıfır olmadığı her noktada süreklidir.

■

33.4 Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği

Bileşke için limit teoremi ([Teorem 29.3](#)) dört koşul istiyordu; dördüncüsü, iç fonksiyonun a yakınında b değerini almaması gibi tuhaf bir koşuld. Süreklilikte bu koşul ortadan kalkar: sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir, o kadar.

Teorem 33.3 (Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(A) \subseteq B$ koşulunu sağlasın; böylece $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlıdır. $f, a \in A$ noktasında ve $g, b = f(a) \in B$ noktasında sürekliyse $g \circ f$ de a noktasında süreklidir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. g, b noktasında sürekli olduğundan öyle bir $\eta > 0$ vardır ki

$$y \in B \text{ ve } |y-b| < \eta \implies |g(y)-g(b)| < \varepsilon. \quad (1)$$

f, a noktasında sürekli olduğundan, bu η 'yi “ ε ” olarak kullanıp öyle bir $\delta > 0$ buluruz ki

$$x \in A \text{ ve } |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \eta. \quad (2)$$

Şimdi $x \in A$ ve $|x-a| < \delta$ olsun. (2) gereği $|f(x)-b| < \eta$; ayrıca $f(x) \in f(A) \subseteq B$. O hâlde $y = f(x)$, (1)’in hipotezini sağlar ve

$$|g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu, $g \circ f$ ’nin a ’da sürekliliğidir.

■

İ Limit teoremindeki dördüncü koşul neden gerekmiyor?

Teorem 29.3 ispatında g 'nin b 'deki **limitini** kullanıyorduk; limit tanımı yalnızca $0 < |y - b| < \eta$ olan y 'ler hakkında bilgi verir. $f(x) = b$ olursa $y = f(x)$ bu aralığın dışında kalır ve $g(b)$ değeri limitten farklı olabilir; **Örnek 29.4**'teki karşı örnek tam da buydu: $f \equiv 0$ ve $g(0) = 0$, $g(y) = 1$ ($y \neq 0$).

Süreklilikte ise (1) koşulu $|y - b| < \eta$ olan **bütün** y 'ler için, $y = b$ dâhil, geçerlidir; çünkü süreklilik $g(b)$ 'nin “doğru değer” olmasını zaten garanti eder. Karşı örnekteki g , 0'da sürekli değildir; teoremimiz ona uygulanamaz, dolayısıyla bir çelişki de yoktur.

Sonuç 33.3 (Bileşkeyle Elde Edilen Sürekli Fonksiyonlar). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli olsun.

1. $|f|$ fonksiyonu a 'da sürekli.
2. A üzerinde $f \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt[n]{f}$ fonksiyonu a 'da sürekli.
3. $\sin \circ f$ ve $\cos \circ f$ fonksiyonları a 'da sürekli.

İspat.

Her madde **Teorem 33.3** ile dış fonksiyonun sürekliliğinin birleşimidir. (1)'de dış fonksiyon $|\cdot|$ (**Önerme 33.3** (1)); (2)'de $f(A) \subseteq [0, \infty)$ olduğundan dış fonksiyon $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olan kök fonksiyonudur (**Önerme 33.3** (2), (3)); (3)'te dış fonksiyon $\sin$ ya da $\cos$ 'tur (**Önerme 33.4**).

■

Örnek 33.5 (Bileşke ve Limitle Yer Değiştirme).

- a) $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.
- b) $k(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ fonksiyonunun $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right)$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm.

a) $f(x) = x^2 + 1$ polinomu her noktada sürekli (**Sonuç 33.2**); $g = \sin$ her noktada sürekli (**Önerme 33.4**). $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan bileşke tanımlıdır ve **Teorem 33.3** ile $h = g \circ f$ her $a \in \mathbb{R}$ 'de sürekli.

b) $x \in A$ için $x^2 \geq 1$, yani $x^2 - 1 \geq 0$ 'dır; dolayısıyla $f(x) = x^2 - 1$ polinomu A 'yı $[0, \infty)$ içine götürür. f sürekli (**Sonuç 33.2**), kök fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli (**Önerme 33.3**); **Teorem 33.3** ile k A 'nın her noktasında sürekli.

c) Sürekli fonksiyon limitle yer değiştirir (**Teorem 33.1**, $\Rightarrow$ yönü). $x_n = 4 + 1/n \rightarrow 4$ ve kök fonksiyonu 4'te sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

İkincisi için $y_n = \frac{\pi n}{3n+1} = \frac{\pi}{3+1/n} \rightarrow \frac{\pi}{3}$ (**Teorem 21.1**) ve $\cos, \pi/3$ 'te sürekli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

■

33.5 Sürekli Fonksiyonların Yerel Davranışı

Limit için gösterdiğimiz yerel sınırlılık (Teorem 29.1) ve işaret koruma (Teorem 30.2) özelliklerinin süreklilik sürümleri, delinmiş komşuluk yerine tam komşulukta geçerlidir ve ℓ yerine $f(a)$ geçer. Bu küçük önerme, ileride ara değer teoreminin ispatında kilit rol oynayacaktır.

Önerme 33.5 (Yerel Sınırlılık ve İşaret Koruma). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli olsun.

1. (Yerel sınırlılık) Öyle $\delta > 0$ ve $M > 0$ vardır ki $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken $|f(x)| \leq M$.
2. (İşaret koruma) $f(a) > 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$.
3. $f(a) < 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken $f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$.

İspat.

(1) Süreklilik tanımında $\varepsilon = 1$ alalım: $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < 1$ olacak bir δ vardır. Üçgen eşitsizliğiyle bu x 'ler için

$$|f(x)| = |(f(x) - f(a)) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)|.$$

$M = 1 + |f(a)|$ alınır.

(2) $f(a) > 0$ olduğundan $\varepsilon = f(a)/2 > 0$ alabiliriz. Süreklilikten öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, yani

$$-\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}.$$

Soldaki eşitsizlikten $f(x) > f(a) - f(a)/2 = f(a)/2 > 0$.

(3) $-f$ fonksiyonu a 'da sürekli (Teorem 33.2 (2)) ve $(-f)(a) = -f(a) > 0$. (2)'yi $-f$ 'ye uygularsak $|x - a| < \delta$ iken $-f(x) > -f(a)/2$, yani $f(x) < f(a)/2 < 0$ olur.

■

Kısacası: sürekli bir fonksiyon bir noktada sıfırdan farklıysa, o noktanın bir komşuluğunda **işaret değiş-tirmez**. Tersinden okursak: sürekli bir fonksiyon bir aralıkta işaret değiştiriyorsa arada bir yerde sıfır olmak zorundadır — bu, ileride ispatlayacağımız Bolzano teoreminin özüdür.

33.6 Tek Yönlü Süreklilik

Tek yönlü limitler (Tanım 31.1) gibi tek yönlü süreklilik de tanımlanır. Bu kavram, bir sonraki bölümde süreksizlik türlerini sınıflandırırken ve taban fonksiyonu gibi “basamaklı” fonksiyonları incelerken gerekecek.

Tanım 33.3 (Sağdan ve Soldan Süreklilik). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun.

- Her $\varepsilon > 0$ için, $x \in A$ ve $a \leq x < a + \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f 'ye a 'da **sağdan sürekli** (right-continuous) denir.
- Her $\varepsilon > 0$ için, $x \in A$ ve $a - \delta < x \leq a$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f 'ye a 'da **soldan sürekli** (left-continuous) denir.

a , $A \cap (a, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktasıysa sağdan süreklilik, Önerme 33.1 ispatındaki aynı akıl yürütmeye, $f(a^+) = f(a)$ eşitliğine denktir; benzer biçimde soldan süreklilik $f(a^-) = f(a)$ demektir.

Önerme 33.6 (Süreklilik ve Tek Yönlü Süreklilik). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. f 'nin a 'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul, f 'nin a 'da hem sağdan hem soldan sürekli olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) Süreklilik tanımındaki δ , hem $a \leq x < a + \delta$ hem de $a - \delta < x \leq a$ olan x 'ler için işe yarar; çünkü her iki koşul da $|x - a| < \delta$ 'yı gerektirir.

($\Leftarrow$ yönü) $\varepsilon > 0$ verilsin. Sağdan süreklilikten bir δ_1 , soldan süreklilikten bir δ_2 bulalım ve $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alalım. $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ olsun. $x \geq a$ ise $a \leq x < a + \delta \leq a + \delta_1$; sağdan süreklilikle

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $x < a$ ise $a - \delta_2 \leq a - \delta < x < a$; soldan süreklilikle $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Her durumda süreklilik koşulu sağlanır.

■

Örnek 33.6 (Taban Fonksiyonu Sağdan Süreklidir). $f(x) = \lfloor x \rfloor$ taban fonksiyonunun (Tanım 12.1) her $k \in \mathbb{Z}$ noktasında sağdan sürekli, soldan süreksiz olduğunu gösteriniz. f hangi noktalarda süreklidir?

Çözüm.

Sağdan süreklilik. $k \leq x < k + 1$ için $\lfloor x \rfloor = k = f(k)$ 'dir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = 1$ alalım: $k \leq x < k + 1$ iken $|f(x) - f(k)| = 0 < \varepsilon$.

Soldan süreksizlik. $\varepsilon_0 = 1$ alalım. Herhangi bir $\delta > 0$ için $x = k - \min\{\delta, 1\}/2$ noktası $k - \delta < x < k$ ve $k - 1 < x < k$ koşullarını sağlar; dolayısıyla $\lfloor x \rfloor = k - 1$ ve $|f(x) - f(k)| = 1 \geq \varepsilon_0$. Soldan süreklilik tanımı hiçbir δ için sağlanmaz.

Süreklilik noktaları. Önerme 33.6 gereği f hiçbir tam sayıda sürekli değildir. $a \notin \mathbb{Z}$ ise $k = \lfloor a \rfloor$ için $k < a < k + 1$; $\delta_0 = \min\{a - k, k + 1 - a\} > 0$ alındığında $(a - \delta_0, a + \delta_0) \subseteq (k, k + 1)$ olur ve bu aralıkta f sabit k değerini alır. Sabit fonksiyon sürekli olduğundan f a 'da süreklidir. Sonuç: $\lfloor x \rfloor$ tam olarak $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ üzerinde süreklidir.

■

33.7 Alıştırmalar

Alıştırma 33.1 (Süreklilik Alıştırmaları).

- $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu ε - δ tanımıyla gösteriniz.
- $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $h(0) = 0$ ile tanımlanan $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.
- $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ($x \neq 1$) ve $f(1) = c$ olsun. f 'nin 1 noktasında sürekli olması için c ne olmalıdır?
- $g(x) = x$ ($x \in \mathbb{Q}$) ve $g(x) = -x$ ($x \notin \mathbb{Q}$) fonksiyonunun yalnızca 0 noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun ve her $q \in \mathbb{Q}$ için $f(q) = 0$ sağlansın. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. Buradan, $\mathbb{Q}$ üzerinde çakışan iki sürekli fonksiyonun $\mathbb{R}$ üzerinde eşit olduğunu çıkarınız.

Çözüm.

a) $x \neq 0$ için

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|x| |a|} = \frac{|x - a|}{|x| |a|}.$$

Paydadaki $|x|$ 'i alttan sınırlamak için önce $|x - a| < |a|/2$ kabul edelim. Ters üçgen eşitsizliğiyle $|x| \geq |a| - |x - a| > |a| - |a|/2 = |a|/2$; özellikle $x \neq 0$. O hâlde

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \leq \frac{|x - a|}{(|a|/2) |a|} = \frac{2|x - a|}{a^2}.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$ alalım. $|x - a| < \delta$ ise yukarıdaki kestirim geçerlidir ve $|1/x - 1/a| < 2\delta/a^2 \leq \varepsilon$.

b) $a = 0$ 'da: $x \neq 0$ için $|\sin(1/x)| \leq 1$ olduğundan $|h(x) - h(0)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|$; $x = 0$ için fark sıfırdır. $\delta = \varepsilon$ alınırsa $|x| < \delta$ iken $|h(x) - h(0)| \leq |x| < \varepsilon$.

$a \neq 0$ 'da: $\delta_0 = |a| > 0$ alalım; $|x - a| < \delta_0$ ise ters üçgen eşitsizliğiyle $|x| \geq |a| - |x - a| > 0$, yani $x \neq 0$ 'dır. Demek ki h , a 'nın bu komşuluğunda $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde tanımlı $u(x) = x \sin(1/x)$ fonksiyonuyla çakışır. $1/x$ fonksiyonu a 'da sürekli (a şıkkı), $\sin$ her noktada sürekli (Önerme 33.4), dolayısıyla bileşke $\sin(1/x)$ a 'da süreklidir (Teorem 33.3); x ile çarpımı olan u de a 'da süreklidir (Teorem 33.2 (3)). Süreklilik yerel bir özelliktir: $\varepsilon > 0$ verildiğinde u 'nun sürekliliğinden gelen δ yerine $\min\{\delta, \delta_0\}$ alalım. $x \in \mathbb{R}$ ve $|x - a| < \min\{\delta, \delta_0\}$ ise $x \neq 0$, dolayısıyla $h(x) = u(x)$ ve $h(a) = u(a)$;

böylece $|h(x) - h(a)| = |u(x) - u(a)| < \varepsilon$ olur (Örnek 33.4'de aynı akıl yürütmeyi kullanmıştık). Sonuç olarak h $\mathbb{R}$ 'nin her noktasında süreklidir.

c) 1, $\mathbb{R}$ 'nin yığılma noktası olduğundan süreklilik $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = c$ demektir (Önerme 33.1). $x \neq 1$ için

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

olduğundan ve limit $x = 1$ noktasındaki değere bakmadığından $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$ (Sonuç 29.3). O hâlde $c = 3$ olmalıdır.

d) 0'da: Her x için $|g(x)| = |x|$; dolayısıyla $|g(x) - g(0)| = |x|$ ve $\delta = \varepsilon$ işe yarar.

$a \neq 0$ 'da: Örnek 33.2 içindeki gibi a 'ya yakınsayan bir rasyonel dizi (q_n) ve bir irrasyonel dizi (i_n) alalım. $g(q_n) = q_n \rightarrow a$, $g(i_n) = -i_n \rightarrow -a$ (Teorem 21.1). $a \neq 0$ olduğundan $a \neq -a$; Sonuç 33.1 ile g a 'da süreksizdir.

e) $x \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. Teorem 13.5 gereği her n için $(x, x + 1/n)$ aralığında bir q_n rasyonel sayısı vardır; sıkıştırma ile $q_n \rightarrow x$. f x 'te sürekli olduğundan dizisel ölçütle (Teorem 33.1)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\mathbb{Q}$ üzerinde $f = g$ ise $h = f - g$ süreklidir (Teorem 33.2) ve $\mathbb{Q}$ üzerinde sıfırdır; az önce gösterilenle $h \equiv 0$, yani $f = g$. Sürekli bir fonksiyon, yoğun bir kümedeki değerleriyle tamamen belirlenir.

■

Sürekliliğin tanımını, dizisel ölçütünü ve sürekli fonksiyon üretme araçlarını kurduk. Şimdi madalyonun öbür yüzüne bakalım: bir fonksiyon bir noktada sürekli **değilse** orada ne olur? Süreksizliklerin bir sınıflandırması vardır ve monoton fonksiyonlar için bu sınıflandırma şaşırtıcı derecede kısıtlayıcıdır: **Süreksizlik Çeşitleri**.

34. Süreksizlik Çeşitleri

Önceki bölümde bir fonksiyonun bir noktada **süreklili** olmasının ne demek olduğunu öğrendik ve sürekli fonksiyon üretmenin araçlarını kurduk. Şimdi tersini soruyoruz: bir fonksiyon bir noktada sürekli **değilse** orada tam olarak ne olur? Cevap tek tip değildir. Bazen fonksiyonun yalnızca o noktadaki değeri “yanlıştır” ve değeri düzeltmek yeter; bazen fonksiyon o noktada bir basamak atlar; bazen de sonsuza fırlar ya da durmadan salınır. Bu bölümde süreksizlikleri bu üç davranışa göre sınıflandıracacağız.

Sınıflandırmanın aracı, tek yönlü limitlerdir (Tanım 31.1). Bölümün sonunda monoton fonksiyonlar için çarpıcı bir sonuç ispatlayacağız: monoton bir fonksiyonun süreksizlikleri yalnızca sıçrama biçiminde olabilir ve bu sıçramaların sayısı en çok sayılabilir. Yani monoton bir fonksiyon, ne kadar “kötü” görünürse görünsün, tanım aralığının “neredeyse her” noktasında süreklidir.

34.1 Süreksizlik Noktası

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun. f 'nin a 'da sürekli olmaması, Tanım 33.1'teki koşulun bozulması demektir. a aynı zamanda A 'nın bir yığılma noktasıysa (Tanım 17.1) süreklilik “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ” eşitliğine denktir (Önerme 33.1); dolayısıyla süreksizliğin iki kaynağı olabilir:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vardır ama $f(a)$ 'ya eşit değildir;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.

İkinci durumun kendi içinde de dereceleri vardır: limit yok olsa bile sağ ve sol limitler var olabilir, ya da onlar da yok olabilir. Sınıflandırma bu ayrımlara dayanır.

Bir de f 'nin a 'da **tanımlı olmadığı** ama a 'ya istediğimiz kadar yaklaşabildiğimiz durum vardır: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonu $x = 1$ 'de tanımsızdır. Bu noktalarda da “süreksizlik” sözcüğü kullanılır; tanımda bu duruma da yer vereceğiz.

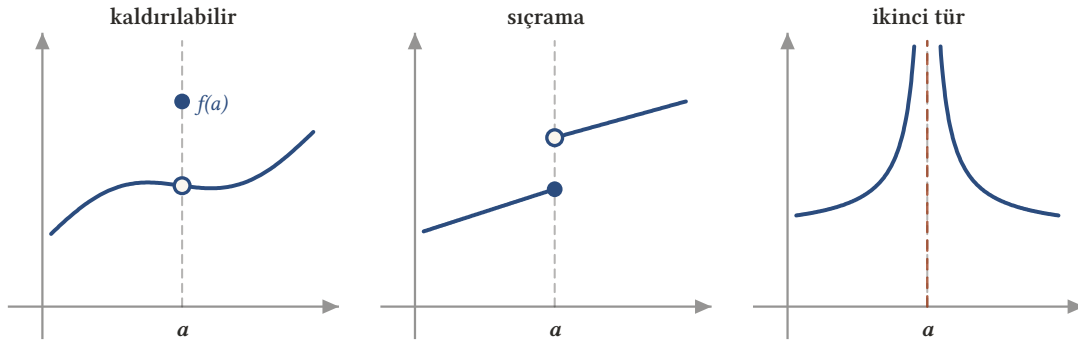
Tek yönlü limitlerin anlamlı olması için a 'ya hem soldan hem sağdan yaklaşabilmeliyiz. Bu bölümde, aksi söylenmedikçe, a noktasının bir delinmiş komşuluğu (Tanım 15.2) tanım kümesinin içinde olacak: bir $r > 0$ için

$$B^*(a, r) = (a - r, a) \cup (a, a + r) \subseteq A.$$

a 'nın kendisi A 'da olabilir de olmayabilir de. Bu koşul, tanım kümesi aralık olan fonksiyonların bütün iç noktalarında sağlanır.

Tanım 34.1 (Süreksizlik Çeşitleri). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun, bir $r > 0$ için $B^*(a, r) \subseteq A$ olsun ve f, a noktasında sürekli olmasın (yani ya $a \notin A$ 'dır ya da $a \in A$ ve f a 'da süreksizdir). Bu durumda a 'ya f 'nin bir **süreksizlik noktası** (point of discontinuity) denir ve süreksizlik şu üç türden biridir:

1. **Kaldırılabilir süreksizlik** (removable discontinuity): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ limiti bir reel sayı olarak vardır, ama ya $a \notin A$ 'dır ya da $f(a) \neq \ell$ 'dir.
2. **Sıçrama süreksizliği** (jump discontinuity; birinci tür süreksizlik): sağ limit $f(a^+)$ ve sol limit $f(a^-)$ birer reel sayı olarak vardır ama birbirine eşit değildir. $f(a^+) - f(a^-)$ farkına f 'nin a 'daki **sıçraması** (jump) denir.
3. **İkinci tür süreksizlik** (discontinuity of the second kind; esaslı süreksizlik): $f(a^+)$ ve $f(a^-)$ tek yönlü limitlerinden en az biri reel sayı olarak **yoktur** — fonksiyon o yönden ya sınırsız büyür ya da hiçbir değere yerleşmeden salınır.



Şekil 34.1: Üç süreksizlik türü. Solda kaldırılabilir süreksizlik: limit vardır ama $f(a)$ ondan farklıdır (ya da tanımsızdır); değer düzeltilirse süreklilik sağlanır. Ortada sıçrama: sağ ve sol limitler vardır ama eşit değildir. Sağda ikinci tür: tek yönlü limitlerden en az biri (burada ikisi de) sonlu bir sayı olarak yoktur.

i Adlandırma üzerine

Bazı kitaplar (1) ve (2) türlerini birlikte **birinci tür süreksizlik** diye adlandırır: her ikisinde de sağ ve sol limitler vardır; fark, eşit olup olmamalarıdır. Sonsuz limitler (Tanım 32.1) bu sınıflandırmada “reel sayı olarak var” sayılmaz; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ olsa da $0, \frac{1}{x}$ için ikinci tür bir süreksizlik noktasıdır. Sıçrama süreksizliğinde $f(a)$ değerinin ne olduğu önemsizdir: $f(a^-)$ 'ye eşit olabilir, $f(a^+)$ 'ya eşit olabilir ya da ikisinden de farklı olabilir.

Tanımdaki üç tür gerçekten bütün olasılıkları kapsar ve birbirini dışlar; bunu kaydedelim.

Önerme 34.1 (Sınıflandırma Tam ve Ayrıktır). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun ve bir $r > 0$ için $B^*(a, r) \subseteq A$ olsun. f, a 'da sürekli değilse a , Tanım 34.1'ndeki üç türden **tam olarak birine** girer.

İspat.

$B^*(a, r) \subseteq A$ olduğundan a , hem $A \cap (a, \infty)$ hem de $A \cap (-\infty, a)$ kümelerinin yığılma noktasıdır; dolayısıyla tek yönlü limitlerden söz edebiliriz ve Teorem 31.1 uygulanabilir.

En az bir türe girer. İki durum vardır.

Durum 1: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ reel sayı olarak vardır. $a \notin A$ ise (1) sağlanır. $a \in A$ ise $f(a) \neq \ell$ olmalıdır; çünkü $f(a) = \ell$ olsaydı Önerme 33.1 gereği f, a 'da sürekli olurdu. Yine (1) sağlanır.

Durum 2: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur. $f(a^+)$ ve $f(a^-)$ 'nin her ikisi de varsa eşit olamazlar; eşit olsalardı Teorem 31.1 gereği limit var olurdu. Bu, (2)'dir. En az biri yoksa (3) sağlanır.

En çok bir türe girer. (1) sağlanıyorsa limit vardır; Teorem 31.1 gereği $f(a^+) = f(a^-) = \ell$ olur, bu yüzden ne (2) ne de (3) sağlanabilir. (2) sağlanıyorsa her iki tek yönlü limit vardır, dolayısıyla (3) sağlanmaz.

■

Şimdi türleri tek tek, örneklerle inceleyelim.

34.2 Kaldırılabilir Süreksizlik

Adı üstünde: bu tür süreksizlik “kaldırılabilir”, çünkü sorun yalnızca a noktasındaki değerdedir. Fonksiyonun a dışındaki bütün değerlerine dokunmadan, a 'daki değerini limite eşitlersek süreksizlik ortadan kalkar.

Önerme 34.2 (Kaldırılabilir Süreksizliğin Kaldırılması). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun, bir $r > 0$ için $B^*(a, r) \subseteq A$ olsun ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ olsun. $A \cup \{a\}$ üzerinde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ \ell, & x = a \end{cases}$$

ile tanımlanan $\tilde{f}$ fonksiyonu a noktasında süreklidir. f , a dışındaki her noktada sürekliyse $\tilde{f}$, $A \cup \{a\}$ üzerinde süreklidir.

İspat.

$B^*(a, r) \subseteq A$ olduğundan a , $A \cup \{a\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır ve $\tilde{f}$, $A \cup \{a\}$ üzerinde tanımlıdır. Limit, fonksiyonun a 'daki değerine bakmaz: [Tanım 27.1](#) yalnızca $0 < |x - a| < \delta$ olan x 'leri kullanır ve bu x 'lerde $\tilde{f}(x) = f(x)$ 'tir. O hâlde

$$\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = \tilde{f}(a).$$

Önerme 33.1 gereği $\tilde{f}$, a 'da süreklidir. a dışındaki bir $b \in A$ noktasında $\tilde{f}$, b 'nin a 'yı içermeyen bir komşuluğunda f ile çakıştığından, f 'nin b 'deki sürekliliği $\tilde{f}$ 'ye aynen geçer.

■

Bu önerme sayesinde “ f 'nin a 'daki süreksizliği kaldırılabilir” cümlesi somut bir anlam kazanır: f , a 'da tanımsızsa **tanımlanarak**, tanımlıysa **değeri değiştirilerek** sürekli hâle getirilebilir. $\tilde{f}$ fonksiyonuna f 'nin a 'ya **sürekli genişlemesi** (continuous extension) denir.

Örnek 34.1 (Kaldırılabilir Süreksizlik Örnekleri). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktada kaldırılabilir süreksizliği olduğunu gösterelim ve sürekli genişlemelerini yazalım.

- a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; nokta $a = 1$.
- b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; nokta $a = 0$.
- c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ ($x \neq 0$) ve $h(0) = 1$; nokta $a = 0$.

Çözüm.

a) $x \neq 1$ için $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ olduğundan $f(x) = x + 1$ 'dir. Limit $x = 1$ değerine bakmadığından

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

([Sonuç 29.3](#)). Limit vardır ama $1 \notin A$; süreksizlik kaldırılabilir. Sürekli genişleme $\tilde{f}(x) = x + 1$ polinomudur ve $\mathbb{R}$ 'nin her noktasında süreklidir ([Sonuç 33.2](#)).

b) **Teorem 30.6** gereği $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 'dir. $0 \notin A$ olduğundan 0 , kaldırılabilir bir süreksizlik noktasıdır. Genişleme

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonudur. $\tilde{g}$, 0 dışında iki sürekli fonksiyonun bölümü olarak ([Önerme 33.4](#), [Teorem 33.2](#)), 0 'da ise [Önerme 34.2](#) gereği süreklidir; yani $\tilde{g}$ bütün $\mathbb{R}$ 'de süreklidir.

c) h , 0 'ın delinmiş komşuluğunda x^2 ile çakışır; dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ([Önerme 29.1](#)). Ama $h(0) = 1 \neq 0$. Limit var, değer yanlış; kaldırılabilir süreksizlik. Düzeltme yalnızca tek bir değeri değiştirir: $\tilde{h}(x) = x^2$.

■

34.3 Sıçrama Süreksizliği

Sıçrama süreksizliğinde fonksiyon a 'nın solunda bir değere, sağında başka bir değere yerleşir; grafikte bir “basamak” görülür. En tanınık örnekler taban fonksiyonu ile işaret fonksiyonudur.

Örnek 34.2 (Taban ve İşaret Fonksiyonlarının Sıçramaları).

- a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ taban fonksiyonunun ([Tanım 12.1](#)) her $k \in \mathbb{Z}$ noktasında sıçrama süreksizliği olduğunu gösterelim ve sıçramayı hesaplayalım.
- b) sgn işaret fonksiyonunun ([Tanım 7.6](#)) 0 'da sıçrama süreksizliği olduğunu gösterelim ve sıçramayı hesaplayalım.

Çözüm.

a) $k \in \mathbb{Z}$ olsun. Taban fonksiyonunun tanımı gereği $k \leq x < k+1$ için $\lfloor x \rfloor = k$ ve $k-1 \leq x < k$ için $\lfloor x \rfloor = k-1$ 'dir.

Sağ limit. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = 1$ alalım. $k < x < k+1$ ise $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$. O hâlde $f(k^+) = k$.

Sol limit. Yine $\delta = 1$ ile, $k-1 < x < k$ ise $|f(x) - (k-1)| = 0 < \varepsilon$; yani $f(k^-) = k-1$.

İki tek yönlü limit de vardır ve $f(k^+) - f(k^-) = k - (k-1) = 1 \neq 0$: her tam sayıda sıçrama 1 olan bir sıçrama süreksizliği. $f(k) = k = f(k^+)$ 'dır; sağ limitin $f(k)$ 'ya eşit olması sağdan sürekliliğe denk olduğundan (Tanım 33.3; aynı $\delta = 1$ seçimi tanımı doğrudan da sağlar) f tam sayılarda sağdan süreklidir – bunu Örnek 33.6'de ε - δ ile göstermiştik. Tam sayı olmayan noktalarda f süreklidir (aynı örnek); demek ki $\lfloor x \rfloor$ 'nin süreksizlik noktaları kümesi tam olarak $\mathbb{Z}$ 'dir ve hepsi sıçramadır.

b) $x > 0$ için $\text{sgn}(x) = 1$, $x < 0$ için $\text{sgn}(x) = -1$. Herhangi bir $\delta > 0$ (örneğin $\delta = 1$) için $0 < x < \delta$ iken $|\text{sgn}(x) - 1| = 0$ ve $-\delta < x < 0$ iken $|\text{sgn}(x) - (-1)| = 0$; dolayısıyla

$$\text{sgn}(0^+) = 1, \quad \text{sgn}(0^-) = -1.$$

Sıçrama $1 - (-1) = 2$ 'dir. $\text{sgn}(0) = 0$ değeri iki tek yönlü limitin hiçbirine eşit değildir; işaret fonksiyonu 0'da ne sağdan ne soldan süreklidir. 0 dışında sgn yerel olarak sabit olduğundan süreklidir.

■

❓ Sıçrama süreksizliğinde değer düzeltilemez

Kaldırılabilir süreksizlikten farklı olarak, sıçrama süreksizliği $f(a)$ değeri değiştirilerek giderilemez. Hangi değeri seçersek seçelim, $f(a^-) \neq f(a^+)$ olduğu sürece limit yoktur (Teorem 31.1) ve f , a 'da sürekli olamaz. Değer seçimiyle elde edebileceğimiz en iyi şey, Örnek 33.6'deki gibi **tek yönlü** sürekliliktir: $f(a) = f(a^+)$ seçilirse sağdan, $f(a) = f(a^-)$ seçilirse soldan süreklilik.

34.4 İkinci Tür Süreksizlik

Sınıflandırmadaki son tür, yani ikinci tür süreksizlik, “onarılamaz” süreksizliktir: en az bir taraftan tek yönlü limit bile yoktur. Bunun iki tipik nedeni vardır: fonksiyon o taraftan **sınırsız** büyür ya da sınırlı kalıp **salınır**. Her ikisini de göreceğiz; süreksizliği göstermenin aracı, tek yönlü limitler için dizisel ölçüttür (Teorem 31.2).

Örnek 34.3 (İkinci Tür Süreksizlik Örnekleri). Aşağıdaki fonksiyonların 0 noktasında ikinci tür süreksizliği olduğunu gösterelim.

a) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $g(0) = 0$.

Çözüm.

a) Sağ limitin var olmadığını gösterelim. Örnek 28.2'teki dizileri kullanalım:

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Her iki dizinin bütün terimleri pozitifdir; paydalar n 'den büyük olduğundan $0 < x_n < \frac{1}{n}$ ve $0 < y_n < \frac{1}{n}$, dolayısıyla sıkıştırma teoremiyle (Teorem 21.6, Örnek 20.1) $x_n \rightarrow 0$ ve $y_n \rightarrow 0$. Görüntüler sabittir:

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \quad f(y_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1.$$

$f(0^+) = \ell$ olsaydı Teorem 31.2 gereği hem $f(x_n) \rightarrow \ell$ hem $f(y_n) \rightarrow \ell$ olurdu; oysa biri 1'e, öbürü -1'e gider ve limit yoktur (Teorem 20.1). Demek ki $f(0^+)$ yoktur. Aynı diziler -1 ile çarpılırsa (sin tek fonksiyondur: $f(-x_n) = -1$, $f(-y_n) = 1$) $f(0^-)$ 'nin de olmadığı görülür. 0, f için ikinci tür bir süreksizlik noktasıdır. Dikkat: f sınırlıdır, $|f(x)| \leq 1$; süreksizliğin nedeni sınırsızlık değil, 0'a yaklaşırken sonsuz kez tekrarlanan -1 ile 1 arasındaki **salınım**dır.

b) $x_n = \frac{1}{n}$ dizisi pozitif terimlidir ve 0'a yakınsar (Örnek 20.1). $g(x_n) = n$ dizisi sınırsızdır; yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 20.2) $(g(x_n))$ hiçbir reel sayıya yakınsamaz. $g(0^+) = \ell$ olsaydı Teorem 31.2 gereği $g(x_n) \rightarrow \ell$ olurdu; çelişki. $g(0^+)$ reel sayı olarak yoktur ve 0 ikinci tür bir süreksizlik noktasıdır. (Sonsuz limit diliyle $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ 'dur; Tanım 32.1. Sonsuz limit, sınıflandırma açısından "limit yok" demektir.) Aynı akıl yürütme $\frac{1}{x^2}$ için de geçerlidir; orada iki taraf da $+\infty$ 'a gider ama süreksizlik yine ikinci türdür.

■

Dirichlet fonksiyonu, ikinci tür süreksizliğin en uç örneğidir: **her** noktada, **her** iki yönden limit yoktur.

Örnek 34.4 (Dirichlet Fonksiyonunun Her Noktası İkinci Türdür). $D(x) = 1$ ($x \in \mathbb{Q}$), $D(x) = 0$ ($x \notin \mathbb{Q}$) Dirichlet fonksiyonunun her $a \in \mathbb{R}$ noktasında ikinci tür süreksizliği olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Örnek 33.2'de D 'nin hiçbir noktada sürekli olmadığını gördük; şimdi türünü belirleyelim. $a \in \mathbb{R}$ olsun. Rasyonellerin (Teorem 13.5) ve irrasyonellerin (Teorem 13.6) yoğunluğu gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $(a, a + \frac{1}{n})$ aralığında bir q_n rasyonel, bir i_n irrasyonel sayı vardır. Her iki dizi de terimleri a 'dan büyük olmak üzere a 'ya yakınsar (sıkıştırma, Teorem 21.6). $D(q_n) = 1 \rightarrow 1$ ve $D(i_n) = 0 \rightarrow 0$ olduğundan Teorem 31.2 gereği $D(a^+)$ yoktur. $(a - \frac{1}{n}, a)$ aralıklarından seçilen dizilerle $D(a^-)$ 'nin de olmadığı görülür. Demek ki her a , ikinci tür bir süreksizlik noktasıdır.

■

34.5 Thomae Fonksiyonu

Dirichlet fonksiyonu rasyonel ile irrasyonel sayıları ayırt ediyor ve hiçbir yerde sürekli olmuyordu. Aynı ayrımı biraz daha incelikte yapan bir fonksiyon, şaşırtıcı biçimde, irrasyonel sayıların **hepsinde** sürekli'dir. Bu fonksiyon Thomae fonksiyonu (Riemann fonksiyonu, "patlamış mısır fonksiyonu") olarak bilinir. Her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = \frac{p}{q}$ biçiminde yazılır (Tanım 11.6 payda için yalnızca $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ der; payda negatifse pay ile paydanın işareti birlikte değiştirilerek $q \in \mathbb{N}$ elde edilir, Önerme 11.4) ve bu yazılışlardaki paydaların en küçüğü vardır (Teorem 9.2). En küçük paydalı yazılışa x 'in **en sade biçimi** diyelim; Önerme 11.5'in ispatı tam bu yazılışı kurar ve p ile q 'nun aralarında asal olduğunu gösterir. En küçük payda q tek olarak belirlidir, dolayısıyla pay $p = xq$ da belirlidir: en sade biçim tektir. $0 = \frac{0}{1}$ 'dir.

Örnek 34.5 (Thomae Fonksiyonu İrrasyonellerde Sürekli, Rasyonellerde Süreksizdir). $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ en sade biçimde,} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Örneğin $T(0) = T(1) = T(-3) = 1$, $T(\frac{1}{2}) = T(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, $T(\frac{2}{6}) = T(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, $T(\sqrt{2}) = 0$.

1. Her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} T(x) = 0$ olduğunu gösterelim.
2. Buradan T 'nin her irrasyonel noktada sürekli, her rasyonel noktada kaldırılabilir süreksizliğe sahip olduğunu çıkaralım.

Çözüm.

1. $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Amaç: $0 < |x - a| < \delta$ iken $|T(x) - 0| = T(x) < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ bulmak. Fikir şudur: $T(x)$ ancak paydası küçük rasyonellerde büyüktür ve a 'nın yakınında paydası küçük **sonlu sayıda** rasyonel vardır; δ 'yı bunların hepsinden kaçınacak kadar küçük seçeceğiz.

Sonuç 12.2 gereği $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şu kümeye bakalım:

$$F = \left\{ x \in (a - 1, a + 1) : x = \frac{p}{q} \text{ en sade biçimde ve } q \leq N \right\}.$$

F sonludur. $q \in \{1, 2, \dots, N\}$ sabit olsun. $\frac{p}{q} \in (a-1, a+1)$ koşulu $q(a-1) < p < q(a+1)$ demektir; uzunluğu $2q$ olan bu açık aralıkta en çok $2q$ tam sayı bulunur (aralıktaki tam sayılar $\lfloor q(a-1) \rfloor + 1, \dots, \lfloor q(a+1) \rfloor$ arasındadır; Tanım 12.1). Her q için sonlu sayıda p olduğundan ve q sonlu sayıda değer aldığından F sonludur; eleman sayısı en çok $2 + 4 + \dots + 2N = N(N+1)$ 'dir.

δ seçimi. $F \setminus \{a\}$ sonlu bir kümedir. Boş değilse, elemanlarının a 'ya uzaklıkları sonlu sayıda pozitif sayıdır; en küçüğüne $\delta_0 > 0$ diyelim ve $\delta = \min\{1, \delta_0\}$ alalım. $F \setminus \{a\}$ boşsa $\delta = 1$ alalım. Her iki durumda da $\delta > 0$ ve şu özellik sağlanır: $0 < |x - a| < \delta$ ise $x \in (a-1, a+1)$ ve $x \notin F$.

Kestirim. $0 < |x - a| < \delta$ olsun. x irrasyonelse $T(x) = 0 < \varepsilon$. $x = \frac{p}{q}$ en sade biçimde rasyonelse, $x \in (a-1, a+1)$ ve $x \notin F$ olduğundan $q > N$ olmalıdır; dolayısıyla

$$T(x) = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Her durumda $|T(x) - 0| < \varepsilon$. Bu, $\lim_{x \rightarrow a} T(x) = 0$ demektir.

2. a irrasyonelse $T(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} T(x)$; Önerme 33.1 gereği T , a 'da süreklidir. $a = \frac{p}{q}$ rasyonelse $T(a) = \frac{1}{q} > 0$ ama limit 0'dır; limit var, değer farklı: Tanım 34.1 (1) gereği kaldırılabilir süreksizlik. Rasyonellerin her birinde değeri 0 yaparak bütün süreksizlikleri "kaldırırsak" elimizde sıfır fonksiyonu kalır; T 'nin sürekli genişlemesi budur.

■

i Thomae ile Dirichlet karşılaştırması

Her iki fonksiyon da rasyonelleri irrasyonellerden ayırır; ama Dirichlet fonksiyonu rasyonellerde sabit 1 değerini alırken Thomae fonksiyonu paydası büyüdükçe küçülen değerler alır. Bir irrasyonel sayıya yakın rasyonellerin paydaları zorunlu olarak büyüktür (paydası küçük olanlar sonlu sayıdadır ve belli bir uzaklıkta kalır); işte süreklilik buradan gelir. Thomae fonksiyonu, sürekli olduğu noktaların kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olan bir fonksiyondur. Tersî mümkün değildir: sürekli olduğu noktaların kümesi tam olarak $\mathbb{Q}$ olan bir fonksiyon **yoktur**. Bunun ispatı, sürekli olunan noktalar kümesinin özel bir yapısına (sayılabilir çoklukta açık kümenin kesişimi olmasına) dayanır ve bu dersin sınırlarının dışındadır.

34.6 Monoton Fonksiyonların Süreksizlikleri

Keyfi bir fonksiyon her türden süreksizliğe sahip olabilir; Dirichlet fonksiyonu her noktada ikinci tür süreksizdir. Fonksiyona **monotonluk** koşulu koyunca tablo bambaşkadır. Hatırlatalım: I bir aralık olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, her $x < y$ için $f(x) \leq f(y)$ sağlıyorsa **artan**, $f(x) \geq f(y)$ sağlıyorsa **azalan**; artan ya da azalan fonksiyonlara **monoton** denir. Teorem 31.3, monoton bir fonksiyonun her iç noktada sağ ve sol limitlerinin var olduğunu söylüyordu. Bu, sınıflandırma açısından şu anlama gelir: monoton bir fonksiyonun iç noktalarda ikinci tür süreksizliği olamaz. Birazdan kaldırılabilir süreksizliğin de olamayacağını göreceğiz; geriye yalnızca sıçrama kalır.

Teorem 34.1 (Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri Sıçramadır). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton ve a , I 'nin bir iç noktası olsun. O zaman:

1. $f(a^-)$ ve $f(a^+)$ tek yönlü limitleri vardır; f artan ise $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, azalan ise $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$.
2. f 'nin a 'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f(a^-) = f(a^+)$ olmasıdır.
3. f , a 'da süreksizse bu süreksizlik bir **sıçrama süreksizliği**dir; monoton bir fonksiyonun iç noktalarda ne kaldırılabilir ne de ikinci tür süreksizliği olabilir.

İspat.

(1) Tam olarak Teorem 31.3'in ifadesidir.

(2) Önce f artan olsun. ($\Leftarrow$ yönü) $f(a^-) = f(a^+) = \ell$ olsun. (1)'deki $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$ eşitsizliği $\ell \leq f(a) \leq \ell$, yani $f(a) = \ell$ verir. Sağ ve sol limitler var ve eşit olduğundan Teorem 31.1 gereği

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = f(a)$; a bir iç nokta, dolayısıyla I 'nin yığılma noktası olduğundan **Önerme 33.1** ile f, a 'da sürekli.

($\Rightarrow$ yönü) f, a 'da sürekli olsun. **Önerme 33.1** gereği $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ vardır; **Teorem 31.1** gereği $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$.

f azalan ise aynı akıl yürütme kelimesi kelimesine geçerlidir: ($\Leftarrow$) yönünde (1)'deki eşitsizlik bu kez $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$ biçimindedir ve $f(a^-) = f(a^+) = \ell$ iken yine $f(a) = \ell$ verir; ($\Rightarrow$) yönü ise monotonluğu hiç kullanmaz.

(3) f, a 'da süreksiz olsun. (2) gereği $f(a^-) \neq f(a^+)$; (1) gereği her ikisi de reel sayı olarak vardır. Bu, **Tanım 34.1** (2)'nin ta kendisidir. Süreksizlik kaldırılabilir olamaz, çünkü kaldırılabilir süreksizlikte limit vardır ve **Teorem 31.1** gereği $f(a^-) = f(a^+)$ olurdu. İkinci tür olamaz, çünkü her iki tek yönlü limit de vardır. **Önerme 34.1** ile de tutarlı olarak geriye yalnızca sıçrama kalır.

■

Teoremin pratik faydası iki yönlüdür. Birincisi, monoton bir fonksiyonun sürekliliğini denetlemek için yalnızca $f(a^-) = f(a^+)$ eşitliğine bakmak yeter. İkincisi, bir fonksiyonun bir iç noktada kaldırılabilir ya da ikinci tür süreksizliği varsa o fonksiyon, o noktayı iç nokta olarak içeren hiçbir aralıkta monoton olamaz: $\sin \frac{1}{x}$ fonksiyonu 0'ı içeren hiçbir aralıkta, Dirichlet fonksiyonu ise hiçbir aralıkta monoton değildir.

i Aralığın uç noktaları

$I = [a, b]$ kapalı bir aralıksa uç noktalarda yalnızca bir yön vardır. f artan ise a 'da $f(a^+) = \inf\{f(x) : a < x \leq b\}$ vardır ve $f(a) \leq f(a^+)$ 'dir; ispat **Teorem 31.3**'ün sağ limit kısmıyla kelimesi kelimesine aynıdır. f 'nin a 'da sürekli olması $f(a) = f(a^+)$ demektir; aksi hâlde f, a 'da “tek yönlü bir sıçrama” yapar. b için de sol limitle aynı durum geçerlidir.

Örnek 34.6 (Sonsuz Sayıda Sıçraması Olan Artan Bir Fonksiyon). $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \right)$$

ile tanımlansın. $((0, 1]$ aralığı $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ aralıklarının ayrık birleşimi olduğundan tanım her x için tek bir değer verir.) f 'nin artan olduğunu, süreksizlik noktalarının tam olarak $\{\frac{1}{n} : n \geq 2\}$ kümesi olduğunu ve her birinin sıçrama olduğunu gösterelim.

Çözüm.

Artanlık. $0 \leq x < y \leq 1$ olsun. $x = 0$ ise $f(x) = 0 < f(y)$. $x > 0$ ise $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ve $y \in \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$ olacak biçimde $n, m \in \mathbb{N}$ vardır; $x < y$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < y$, yani y 'nin aralığı x 'inkinden solda olamaz: $m \leq n$. O hâlde $f(x) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} = f(y)$.

$\frac{1}{n}$ noktaları ($n \geq 2$). $a = \frac{1}{n}$ bir iç noktadır. $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ iken $f(x) = \frac{1}{n}$; dolayısıyla $f(a^-) = \frac{1}{n} = f(a)$. $\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}$ iken $f(x) = \frac{1}{n-1}$; dolayısıyla $f(a^+) = \frac{1}{n-1}$. Sıçrama

$$f(a^+) - f(a^-) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0.$$

Teorem 34.1 (2) gereği $f, \frac{1}{n}$ 'de süreksizdir ve (3) gereği bu bir sıçramadır; f bu noktalarda soldan süreklidir.

Öteki noktalar. $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ açık aralığındaysa f bu aralıkta sabittir, dolayısıyla x 'te süreklidir. $x = 1$ uç noktasında $f(1) = 1 = f(1^-)$ olduğundan (aralık $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ üzerinde $f = 1$) f süreklidir.

0 noktası. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olan bir N seçelim (**Sonuç 12.2**) ve $\delta = \frac{1}{N}$ alalım. $0 < x < \delta$ ise $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ olan n için $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{N}$, yani $n+1 > N$, $n \geq N$; buradan $|f(x) - f(0)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Demek ki $f, 0$ 'da süreklidir (0 uç nokta olduğundan tanım kümesinde yalnızca $x \geq 0$ vardır; sağdan süreklilik burada süreklilik demektir).

Sonuç: süreksizlik noktaları $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ — sayılabilir sonsuz çoklukta sıçrama, üstelik 0'da yığılıyorlar; ama 0'ın kendisinde fonksiyon süreklidir.

■

Bu örnekte sıçrama noktaları sonsuz ama sayılabilir çokluktaydı. Bu bir rastlantı değildir: monoton bir fonksiyonun sıçramaları **hiçbir zaman** sayılamaz çoklukta olamaz. İspat, [Teorem 31.3](#)'ün sup–inf betimlemesinden çıkan basit bir gözleme dayanır: artan bir fonksiyonda farklı noktalardaki sıçrama aralıkları birbirini “iter”, üst üste binmez.

Teorem 34.2 (Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri En Çok Sayılabilir). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton olsun. f 'nin süreksiz olduğu noktaların kümesi

$$D = \{a \in I : f, a \text{ 'da süreksiz}\}$$

sayılabilir (sonlu ya da sayılabilir sonsuzdur).

İspat.

f artan olsun; azalan durumda $-f$ artandır ve aynı süreksizlik noktalarına sahiptir ([Teorem 33.2](#)), dolayısıyla artan durumdan çıkar.

Adım 1: Her iç süreksizliğe bir açık aralık. D 'nin I 'nin iç noktalarından oluşan kısmına E diyelim ($E = \{a \in D : a, I \text{ 'nın iç noktası}\}$). $a \in E$ için [Teorem 34.1](#) gereği $f(a^-) < f(a^+)$ 'dır (artan fonksiyonda $f(a^-) \leq f(a^+)$ ve süreksizlikte eşit değil). O hâlde

$$J_a = (f(a^-), f(a^+))$$

boş olmayan bir açık aralıktır.

Adım 2: Aralıklar ayrıktır. $a, b \in E$ ve $a < b$ olsun. $f(a^+) \leq f(b^-)$ olduğunu gösterelim. [Önerme 7.11](#) gereği $a < x < b$ olan bir x vardır (örneğin $x = \frac{a+b}{2}$); I aralık olduğundan $x \in I$. [Teorem 31.3](#)'ün betimlemesiyle

$$f(a^+) = \inf\{f(t) : t \in I, t > a\} \leq f(x), \quad f(x) \leq \sup\{f(t) : t \in I, t < b\} = f(b^-);$$

ilk eşitsizlik $x > a$ olduğu için $f(x)$ 'in birinci kümede olmasından, ikincisi $x < b$ olduğu için ikinci kümede olmasından gelir. Böylece J_a 'nın her elemanı $f(a^+) \leq f(b^-)$ 'den küçük, J_b 'nin her elemanı $f(b^-)$ 'den büyüktür: $J_a \cap J_b = \emptyset$.

Adım 3: Her aralığa bir rasyonel. [Teorem 13.5](#) gereği her $a \in E$ için J_a içinde bir rasyonel sayı vardır; her a için böyle bir rasyoneli seçip r_a diyelim. Bu, bir $\varphi : E \rightarrow \mathbb{Q}$, $\varphi(a) = r_a$ fonksiyonu tanımlar. φ birebirdir: $a \neq b$ ise Adım 2 gereği $J_a \cap J_b = \emptyset$, dolayısıyla $r_a \in J_a$ ve $r_b \in J_b$ farklı sayılardır.

Adım 4: Sayılabilirlik. $E = \emptyset$ ise sonludur, dolayısıyla sayılabilir. Değilse: $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz olduğundan ([Teorem 14.7](#)) bir $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ birebir-örten fonksiyonu vardır ([Tanım 14.3](#), [Tanım 14.1](#)). Bileşke $\psi \circ \varphi : E \rightarrow \mathbb{N}$ birebirdir ([Teorem 5.4](#)). Boş olmayan bir kümeden $\mathbb{N}$ 'ye birebir bir fonksiyon varsa o küme sayılabilir ([Teorem 14.2](#)); demek ki E sayılabilir.

Adım 5: Uç noktalar. $D \setminus E$, I 'nin uç noktalarından oluşur; en çok iki elemanlıdır, yani sonlu ve dolayısıyla sayılabilir. $D = E \cup (D \setminus E)$ iki sayılabilir kümenin birleşimidir; [Sonuç 14.5](#) gereği D sayılabilir.

■

Teorem şunu söyler: monoton bir fonksiyon “hemen her yerde” süreklidir — süreksiz olduğu noktalar bir dizi hâlinde $a_1, a_2, a_3, \dots$ diye listelenebilir, tıpkı [Örnek 34.6](#)'daki $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ gibi. Tek noktadan ibaret olmayan her aralık sayılamaz olduğundan ([Sonuç 14.6](#); kaynağı $\mathbb{R}$ 'nin sayılamazlığıdır, [Teorem 14.8](#)), monoton bir fonksiyonun sürekli olduğu noktalar I 'nin böyle her J alt aralığında sayılamaz çoklukta: J 'deki süreklilik noktalarının kümesi olan $J \setminus D$ sayılabilir olsaydı, $J \cap D$ de sayılabilir olduğundan ([Sonuç 14.3](#)) $J = (J \cap D) \cup (J \setminus D)$ sayılabilir olurdu ([Sonuç 14.5](#)). Karşılaştırm: Dirichlet fonksiyonu hiçbir noktada sürekli değildir; ama o da hiçbir aralıkta monoton değildir.

34.7 Alıştırmalar

Alıştırma 34.1 (Süreksizlik Çeşitleri Alıştırmaları).

- $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ($x \neq 2$), $f(2) = 0$ fonksiyonunun 2 noktasındaki süreksizliğinin türünü belirleyiniz; kaldırılabilirse sürekli genişlemesini yazınız.
- $f(x) = \frac{x^2-x}{|x|}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ fonksiyonunun 0 noktasındaki süreksizliğinin türünü belirleyiniz; sıçramaysa sıçramayı hesaplayınız.

- c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ($x \neq 1$), $f(1) = 0$ fonksiyonunun 1 noktasındaki süreksizliğinin türünü belirleyiniz.
- d) $g(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ ($x \neq 0$), $g(0) = 1$ olsun. g 'nin 0'da sürekli olduğunu, her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}$ noktasında sıçrama süreksizliği olduğunu gösteriniz ve sıçramayı hesaplayınız.
- e) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ artan olsun ve f , $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alsın: her $y \in [f(a), f(b)]$ için $f(x) = y$ olan bir $x \in [a, b]$ bulunsun. f 'nin $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $x \neq 2$ için $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$; limit $x=2$ değerine bakmadığından $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ (Önerme 29.1, Sonuç 29.3). Limit var ama $f(2) = 0 \neq 4$: kaldırılabilir süreksizlik. Sürekli genişleme $\tilde{f}(x) = x+2$ 'dir (Önerme 34.2).

b) $x > 0$ için $|x| = x$ ve $f(x) = \frac{x(x-1)}{x} = x-1$; $x < 0$ için $|x| = -x$ ve $f(x) = -(x-1) = 1-x$ (Tanım 8.1). Polinom limitleriyle

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1, \quad f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1.$$

(Sağ limit hesabında yalnızca $x > 0$ değerleri kullanılır; orada f ile $x-1$ çakışır, dolayısıyla tek yönlü limitleri aynıdır.) İkisi de var, farklı: sıçrama süreksizliği. Sıçrama $f(0^+) - f(0^-) = -1 - 1 = -2$ 'dir; grafik 0'da iki birim aşağı basamak yapar. $f(0) = 0$ hiçbirine eşit olmadığından f , 0'da ne sağdan ne soldan sürekli.

c) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ dizisi terimleri 1'den büyük olmak üzere 1'e yakınsar. $f(x_n) = n$ sınırsızdır, dolayısıyla yakınsak değildir (Teorem 20.2). $f(1^+)$ bir reel sayı olsaydı Teorem 31.2 gereği $f(x_n)$ ona yakınsardı; çelişki. Sağ limit yoktur: ikinci tür süreksizlik. ($y_n = 1 - \frac{1}{n}$ ile sol limitin de olmadığı görülür; sonsuz limit diliyle $f(1^+) = +\infty$, $f(1^-) = -\infty$.)

d) 0'da süreklilik. Taban fonksiyonunun tanımı gereği her $t \in \mathbb{R}$ için $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$, yani $t-1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ (Tanım 12.1). $t = \frac{1}{x}$ alalım. $x > 0$ ise eşitsizliği x ile çarpmak yönü korur:

$$1-x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1, \quad \text{yani} \quad -x < g(x) - 1 \leq 0.$$

$x < 0$ ise çarpma yönü çevirir: $1-x > g(x) \geq 1$, yani $0 \leq g(x) - 1 < -x$. Her iki durumda $|g(x) - 1| \leq |x|$; $x=0$ için fark sıfırdır. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon$ alınırsa $|x| < \delta$ iken $|g(x) - g(0)| \leq |x| < \varepsilon$: g , 0'da sürekli.

$\frac{1}{n}$ noktaları. $n \in \mathbb{N}$ ve $a = \frac{1}{n}$ olsun. $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ ise $n < \frac{1}{x} < n+1$, dolayısıyla $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n$ ve $g(x) = nx$; buradan $g(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} nx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. $\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1}$ ise ($n=1$ için $x > 1$ ise) $n-1 < \frac{1}{x} < n$, dolayısıyla $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n-1$ ve $g(x) = (n-1)x$; buradan $g(a^+) = \frac{n-1}{n}$. İki tek yönlü limit de var ve

$$g(a^+) - g(a^-) = \frac{n-1}{n} - 1 = -\frac{1}{n} \neq 0:$$

sıçrama süreksizliği, sıçrama $-\frac{1}{n}$. $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \cdot n = 1 = g(a^-)$ olduğundan g bu noktalarda soldan sürekli. Sıçramalar n büyüdükçe küçülür ve 0'da yığılır; ama az önce gördüğümüz gibi g , 0'da sürekli. (Sıçramalar aşağı yönlü olduğundan g artan değildir; gerçekten g hiçbir $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ aralığında azalan da değildir, çünkü orada $g(x) = nx$ artar.)

e) Olmayana ergi ile. f 'nin $[a, b]$ 'de bir c noktasında süreksiz olduğunu varsayalım.

c iç nokta ise. Teorem 34.1 gereği $f(c^-) < f(c^+)$ ve $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$. $f(c^-) < f(c)$ ya da $f(c) < f(c^+)$ eşitsizliklerinden en az biri kesindir (ikisi de eşitlik olsaydı $f(c^-) = f(c^+)$ olurdu). Kesin olanı seçip Önerme 7.11 ile arada bir y alalım: $f(c^-) < y < f(c)$ ya da $f(c) < y < f(c^+)$. Her iki durumda $f(c^-) < y < f(c^+)$ ve $y \neq f(c)$. Şimdi y 'nin alınmadığını görelim. $x < c$ ise $f(x) \leq \sup\{f(t) : t < c\} = f(c^-) < y$ (Teorem 31.3); $x > c$ ise $f(x) \geq \inf\{f(t) : t > c\} = f(c^+) > y$; $x = c$ ise $f(c) \neq y$. Öte yandan $a < c$ olduğundan $f(a) \leq f(c^-) < y$ ve $c < b$ olduğundan $y < f(c^+) \leq f(b)$; yani $y \in [f(a), f(b)]$. Hipotez y 'nin alınmasını gerektiriyordu; çelişki.

$c = a$ uç noktası ise. $T = \{f(t) : a < t \leq b\}$ kümesi $f(a)$ ile alttan sınırlıdır; Teorem 31.3'in sağ limit ispatı kelimesi kelimesine $f(a^+) = \inf T$ olduğunu ve $f(a) \leq f(a^+)$ 'yı verir. f , a 'da süreksiz olduğundan $f(a) \neq f(a^+)$, yani $f(a) < f(a^+)$. $f(a) < y < f(a^+)$ olan bir y alalım. $x = a$ için $f(x) = f(a) < y$; $x > a$ için $f(x) \geq \inf T = f(a^+) > y$. y alınmaz; ama $y < f(a^+) \leq f(b)$ olduğundan $y \in [f(a), f(b)]$ 'dir. Çelişki. $c = b$ durumu simetriktir (sol limit ve supremum ile).

Demek ki f her noktada süreklidir. Bu alıştırmamızın söylediği şey, bir sonraki bölümün ana teoremini tamamlayan bir gözlemdir: sürekli fonksiyonlar ara değerleri atlamaz (ara değer teoremi); **monoton** fonksiyonlar için bunun tersi de doğrudur — ara değerleri atlamayan monoton fonksiyon süreklidir. ■

Süreksizlikleri üç türe ayırdık ve monoton fonksiyonların yalnızca sayılabilir çoklukta sıçrama yapabildiğini gördük. Şimdi süreklilikten alınabilecek en büyük ödüllere geçiyoruz: bir aralıkta sürekli bir fonksiyon, işaret değiştiriyorsa sıfır olmak zorundadır; kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon en büyük ve en küçük değerlerini gerçekten alır: [Ara Değer Teoremi](#) ve [Weierstrass Teoremleri](#).

35. Ara Değer Teoremi ve Weierstrass Teoremleri

Önceki iki bölümde sürekliliği tek bir nokta çevresinde inceledik: bir fonksiyon bir noktada sürekli ya da değildir, süreksizse bunun türü şudur. Bu bölümde bakış açımız değişiyor. Artık soru, **bir aralığın tamamında** sürekli olan bir fonksiyonun bütün olarak nasıl davrandığıdır. Yanıt iki büyük teoreme toplanır. **Ara değer teoremi**, sürekli bir fonksiyonun grafiğinin “sıçrayamayacağını” söyler: fonksiyon iki değer alıyorsa aradaki her değeri de alır. **Weierstrass ekstremum teoremi** ise kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli fonksiyonun en büyük ve en küçük değerini gerçekten **aldığını** söyler; grafik sonsuza kaçamaz, en tepe noktasına da “yaklaşıp ulaşamama” durumunda kalmaz.

Her iki teoremin arkasında da reel sayıların tamlığı vardır: ilki supremum (ya da iç içe aralıklar) ile, ikincisi Bolzano–Weierstrass teoremiyle ispatlanır. Bu yüzden bu bölüm, Analiz 1’in başında kurduğumuz tamlık aksiyomunun (Bölüm 10.4) fonksiyonlar dünyasındaki karşılığı olarak okunabilir. Bölümün sonunda kompakt kümelerin sürekli görüntüsünün kompakt kaldığını göstererek bu sonuçların aralıklara özgü olmadığını da göreceğiz.

35.1 İşaret Koruma ve Bolzano Teoremi

Ara değer teoreminin ispatı, sürekli fonksiyonların basit ama çok kullanışlı bir özelliğine dayanır: bir noktada pozitif olan sürekli fonksiyon, o noktanın küçük bir komşuluğunda da pozitif kalır. Limitler için benzer bir sonucu [Teorem 30.2](#) olarak görmüştük; şimdi aynı fikri süreklilik diliyle, noktanın kendisini de kapsayacak biçimde yazıyoruz.

Lemma 35.1 (Sürekli Fonksiyon İşaretini Korur). $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli olsun.

1. $f(a) > 0$ ise, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ olan her x için $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ olur.
2. $f(a) < 0$ ise, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ olan her x için $f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$ olur.

İspat.

(1) $f(a) > 0$ olsun. Süreklilik tanımında ([Tanım 33.1](#)) $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ alalım: öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$, $|x - a| < \delta$ iken

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}.$$

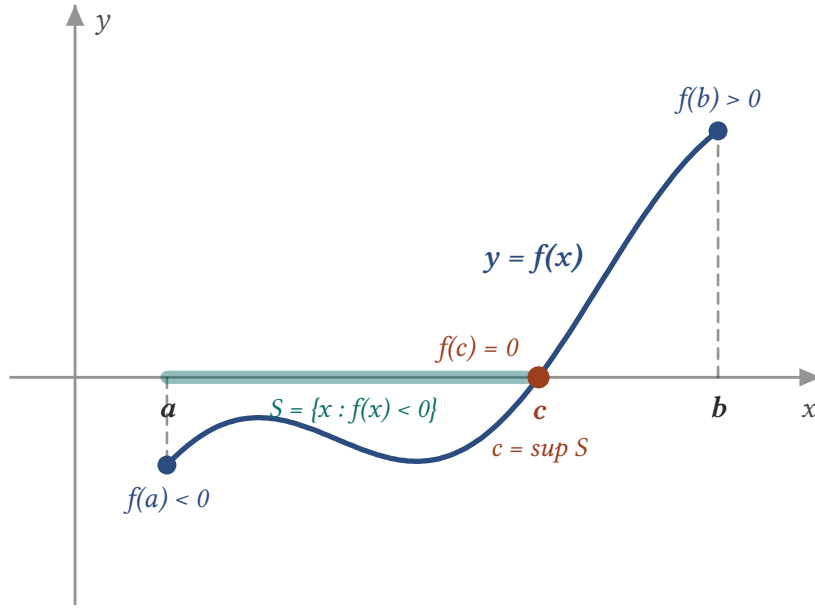
Bu eşitsizlik $f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}$ demektir; sol taraf $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ verir.

(2) $f(a) < 0$ ise $g = -f$ fonksiyonu a ’da süreklidir ([Teorem 33.2](#)) ve $g(a) = -f(a) > 0$ ’dır. (1) gereği bir δ komşuluğunda $g(x) > \frac{g(a)}{2}$, yani $f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$ olur.

■

Lemma, süreklilik için “yakındaki noktalarda değer fazla değişmez” sezgisinin sayısal biçimidir. Şimdi bunu, bir aralığın iki ucunda zıt işaretli olan sürekli bir fonksiyonun arada mutlaka sıfırlanması gerektiğini göstermek için kullanacağız. Bu sonuç Bernard Bolzano’nun 1817’de, süreklilik kavramını ilk kez kesin olarak tanımladığı çalışmasında ispatladığı teoremdir.

Teorem 35.1 (Bolzano Teoremi (Sıfır Yeri Teoremi)). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. $f(a)$ ve $f(b)$ zıt işaretliyse, yani $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise, $f(c) = 0$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır.



Şekil 35.1: Bolzano teoremi: $[a, b]$ üzerinde sürekli f için $f(a) < 0 < f(b)$ ise grafik x eksenini bir c noktasında kesmek zorundadır. İspatta c , fonksiyonun negatif kaldığı S kümesinin supremumu olarak seçilir: eksende koyu çizilen parçanın sağ ucu.

İspat.

$f(a) < 0 < f(b)$ olduğunu varsayabiliriz; aksi hâlde f yerine $-f$ alırsak ($-f$ de süreklidir ve sıfır yerleri aynıdır).

Adayın seçimi. Fonksiyonun negatif olduğu noktaların kümesini düşünelim:

$$S = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}.$$

$f(a) < 0$ olduğundan $a \in S$; yani S boş değildir. $S \subseteq [a, b]$ olduğundan b bir üst sınırdır. Tamlik aksiyomu (Bölüm 10.4) gereği S 'nin supremumu vardır; $c = \sup S$ diyelim. $a \in S$ ve b üst sınır olduğundan $a \leq c \leq b$ 'dir. İddiamız $f(c) = 0$ olduğudur. Bunu, $f(c) < 0$ ve $f(c) > 0$ durumlarının her birinin çelişkiye götürdüğünü göstererek kanıtlayacağız.

Durum $f(c) < 0$. $f(b) > 0$ olduğundan $c \neq b$, yani $c < b$ 'dir. Lemma 35.1 gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in [a, b]$, $|x - c| < \delta$ iken $f(x) < 0$ olur. Gerekirse δ 'yı küçülterek $\delta \leq b - c$ alalım. O zaman $x_1 = c + \frac{\delta}{2}$ noktası $[a, b]$ içindedir, $|x_1 - c| < \delta$ 'dır ve dolayısıyla $f(x_1) < 0$, yani $x_1 \in S$. Ama $x_1 > c = \sup S$; bu, c 'nin S 'nin üst sınırı olmasıyla çelişir.

Durum $f(c) > 0$. $f(a) < 0$ olduğundan $c \neq a$, yani $c > a$ 'dır. Yine Lemma 35.1 gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in [a, b]$, $|x - c| < \delta$ iken $f(x) > 0$ olur. Öte yandan $c = \sup S$ olduğundan, supremumun ε -karakterizasyonu (Teorem 10.1) ile $c - \delta < s \leq c$ olan bir $s \in S$ vardır. Bu s için $|s - c| < \delta$, dolayısıyla $f(s) > 0$; ama $s \in S$ demek $f(s) < 0$ demektir. Çelişki.

Sonuç. Geriye yalnızca $f(c) = 0$ seçeneği kalır. $f(a) \neq 0$ ve $f(b) \neq 0$ olduğundan $c \neq a$ ve $c \neq b$, yani $c \in (a, b)$ 'dir.

■

Teorem sıfır yerinin **varlığını** söyler, yerini söylemez; birden fazla sıfır yeri de olabilir. Ama ispat, sıfır yerini aramak için bir yöntem de vermiştir: “negatif kalan son nokta” aranır. Aşağıdaki ikinci ispat ise sıfır yerini gerçekten hesaplamaya yarayan bir yöntemdir.

i İkinci yol: ikiye bölme yöntemi

Bolzano teoremi, supremum yerine iç içe aralıklar teoremiyle (Teorem 10.5) de ispatlanabilir. $f(a) < 0 < f(b)$ olsun ve $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$ diyelim. Aralığın orta noktası $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ olsun.

- $f(m_1) = 0$ ise sıfır yeri bulunmuştur, dururuz.
- $f(m_1) < 0$ ise $I_2 = [m_1, b_1]$; $f(m_1) > 0$ ise $I_2 = [a_1, m_1]$ alırız.

Her iki hâlde de $I_2 = [a_2, b_2]$ aralığının sol ucunda f negatif, sağ ucunda pozitif ve uzunluğu $\frac{b-a}{2}$ 'dir. Aynı işlemi I_2 'ye uygulayarak I_3 'ü, sonra I_4 'ü, ... elde ederiz. Süreç bir yerde durmazsa

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots, \quad f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

olur. Uzunluklar 0'a gider: $b_n - a_n = 2(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ (Teorem 22.8, Teorem 21.1). Özel olarak her $\varepsilon > 0$ için $b_n - a_n < \varepsilon$ olan bir n vardır; Teorem 10.5 (2) gereği kesişim tek bir c noktasıdır ve her n için $a_n \leq c \leq b_n$ 'dir. $0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle (Teorem 21.6) $a_n \rightarrow c$, benzer biçimde $b_n \rightarrow c$. f sürekli olduğundan dizesel ölçüt (Teorem 33.1) ile $f(a_n) \rightarrow f(c)$ ve $f(b_n) \rightarrow f(c)$. Her n için $f(a_n) < 0$ olduğundan limit sıralama teoremi (Teorem 21.3) $f(c) \leq 0$ verir; $f(b_n) > 0$ olduğundan da $f(c) \geq 0$. Öyleyse $f(c) = 0$.

Bu yöntemin pratik değeri büyüktür: I_n aralığı $n-1$ ikiye bölme adımından sonra elde edildiğinden, n adım sonra sıfır yeri uzunluğu $\frac{b-a}{2^n}$ olan I_{n+1} aralığına hapsedilmiştir; yani her adımda bir ikili basamak kazanılır. Bilgisayarla kök bulmanın en basit algoritması budur.

Örnek 35.1 (Üç Reel Kökü Olan Bir Polinom). $p(x) = x^3 - 3x + 1$ polinomunun üç farklı reel kökü olduğunu gösteriniz ve her birini uzunluğu 1 olan bir aralığa yerleştiriniz.

Çözüm.

Polinomlar $\mathbb{R}$ 'de süreklidir (Sonuç 33.2). Birkaç değer hesaplayalım:

$$p(-2) = -8 + 6 + 1 = -1, \quad p(-1) = -1 + 3 + 1 = 3, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 1 - 3 + 1 = -1, \quad p(2) = 8 - 6 + 1 = 3.$$

İşaret üç kez değişiyor:

- $[-2, -1]$ üzerinde $p(-2) < 0 < p(-1)$; Teorem 35.1 gereği bir $c_1 \in (-2, -1)$ kökü vardır.
- $[0, 1]$ üzerinde $p(0) > 0 > p(1)$; bir $c_2 \in (0, 1)$ kökü vardır.
- $[1, 2]$ üzerinde $p(1) < 0 < p(2)$; bir $c_3 \in (1, 2)$ kökü vardır.

Aralıklar ayrık olduğundan $c_1 < c_2 < c_3$ üç farklı köktür. Cebirden bildiğimiz gibi üçüncü dereceden bir polinomun en çok üç kökü olabilir; demek ki başka kök yoktur.

İkiye bölme yöntemiyle c_2 'yi biraz daha daraltalım: $p(0,5) = 0,125 - 1,5 + 1 = -0,375 < 0$, demek ki $c_2 \in (0, 0,5)$. $p(0,25) = 0,015625 - 0,75 + 1 > 0$, demek ki $c_2 \in (0, 0,25)$. Devam edilirse $c_2 \approx 0,347$ bulunur.

■

35.2 Ara Değer Teoremi

Bolzano teoremi 0 değeri hakkındadır; ama 0'ın özel bir yanı yoktur. Fonksiyondan bir sabit çıkararak aynı sonucu her ara değer için elde ederiz.

Teorem 35.2 (Ara Değer Teoremi). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her y sayısı için, yani $f(a) < y < f(b)$ ya da $f(b) < y < f(a)$ olan her y için, $f(c) = y$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır.

İspat.

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$ olsun. Sabit fonksiyon süreklidir ve sürekli fonksiyonların farkı süreklidir (Teorem 33.2); dolayısıyla g süreklidir. y sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olduğundan $g(a) = f(a) - y$ ve $g(b) = f(b) - y$ zıt işaretlidir: $f(a) < y < f(b)$ ise $g(a) < 0 < g(b)$, öteki hâlde $g(b) < 0 < g(a)$. Her iki durumda da $g(a) \cdot g(b) < 0$. Teorem 35.1 gereği $g(c) = 0$, yani $f(c) = y$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır.

■

Teoremi şöyle özetleyebiliriz: **kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon, aldığı iki değer arasındaki her değeri alır.** Grafiğin diliyle: y yüksekliğindeki yatay doğru, grafiğin altından üstüne geçilirken mutlaka kesilir. $y = f(a)$ ya da $y = f(b)$ durumları zaten aşikâr olduğundan ($c = a$ ya da $c = b$ alınır), $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki (uçlar dâhil) her değer alınır.

⚠ Süreklilik vazgeçilmezdir; karşıtı yanlışır

Taban fonksiyonu $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $[0, 1]$ üzerinde $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ değerlerini alır ama arada hiçbir değeri, örneğin $\frac{1}{2}$ 'yi almaz: 1 noktasındaki sıçrama ara değerleri atlatır. (Süreksizlik türlerinin tanımı noktanın bir delinmiş komşuluğunun tanım kümesinde olmasını ister; 1, $[0, 1]$ 'in uç noktası olduğundan bu sınıflandırma taban fonksiyonu bütün $\mathbb{R}$ üzerinde düşünüldüğünde uygulanır: [Tanım 34.1](#) (2) ve [Örnek 34.2](#) gereği 1 bir sıçrama noktasıdır.) Demek ki teoremdaki süreklilik koşulu kaldırılamaz. Teoremin karşıtı da doğru değildir: ara değer özelliğini taşıyan her fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir. $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $g(0) = 0$ fonksiyonu 0'da sürekli değildir ([Örnek 28.2](#)); ama yine de ara değer özelliğini taşır. 0'ı içermeyen bir aralıkta g sürekli ve [Teorem 35.2](#) uygulanır. 0'ı içeren bir $[x_1, x_2]$ aralığında ise g , $[-1, 1]$ 'deki bütün değerleri sonsuz kez alır; $g(x_1)$ ve $g(x_2)$ de $[-1, 1]$ 'de olduğundan aralarındaki her değer alınır. Bu tür fonksiyonlara “Darboux özellikli” denir ve Analiz 2'de türevlerin bu özelliği taşıdığı görülecektir.

Şimdi ara değer teoreminin klasik uygulamalarını görelim. Her birinde şablon aynıdır: uygun bir sürekli fonksiyon kur, iki ucunda işaret değiştirdiğini göster.

Örnek 35.2 (Tek Dereceli Polinomun Reel Kökü Vardır). Derecesi tek olan her reel katsayılı polinomun en az bir reel kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ ve n tek olsun. p 'nin kökleri $\frac{1}{a_n} p$ 'nin kökleriyle aynı olduğundan, baş katsayının 1 olduğunu varsayabiliriz:

$$p(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_k = \frac{a_k}{a_n}.$$

Fikir şudur: $|x|$ çok büyükken x^n terimi ötekilerin toplamını ezer, dolayısıyla $p(x)$ 'in işareti x^n 'nin işaretidir; n tek olduğundan bu işaret $x > 0$ için $+$, $x < 0$ için $-$ 'dir. Bunu kesinleştirelim.

$M = 1 + |b_{n-1}| + |b_{n-2}| + \dots + |b_0|$ olsun; $M \geq 1$ 'dir. $|x| = M$ için, $|x| \geq 1$ olduğundan $k \leq n-1$ iken $|x|^k \leq |x|^{n-1}$ olur ve genel üçgen eşitsizliğiyle ([Teorem 9.7](#))

$$|b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0| \leq (|b_{n-1}| + \dots + |b_0|) |x|^{n-1} = (M-1)M^{n-1}.$$

Bu kalan kısma $r(x)$ diyelim; $p(x) = x^n + r(x)$ ve $|r(\pm M)| \leq (M-1)M^{n-1}$. Şimdi

$$p(M) = M^n + r(M) \geq M^n - (M-1)M^{n-1} = M^{n-1} > 0,$$

$$p(-M) = (-M)^n + r(-M) = -M^n + r(-M) \leq -M^n + (M-1)M^{n-1} = -M^{n-1} < 0.$$

İkinci satırda n tek olduğu için $(-M)^n = -M^n$ yazdık. Polinom sürekli olduğundan ([Sonuç 33.2](#)) [Teorem 35.1](#), $[-M, M]$ aralığında bir kök verir.

Derece çift olduğunda sonuç yanlıştır: $x^2 + 1$ polinomunun reel kökü yoktur, çünkü her x için $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ([Önerme 7.12](#) (1)).

■

Örnek 35.3 (Bir Denklemin Çözümü). $x = \cos x$ denkleminin tam olarak bir reel çözümü olduğunu ve bu çözümün $(0, 1)$ aralığında bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$g(x) = x - \cos x$ olsun. Kosinüs $\mathbb{R}$ 'de sürekli ([Önerme 33.4](#)); $x \mapsto x$ de sürekli olduğundan g sürekli ([Teorem 33.2](#)). Aşağıda kosinüsün $[0, \pi/2]$ üzerinde azalan olması ve $|\cos x| \leq 1$ gibi temel trigonometri olgularını da kullanacağız.

Varlık. $g(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$. $g(1) = 1 - \cos 1$ ve $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $0 < \cos 1 < 1$, dolayısıyla $g(1) > 0$. [Teorem 35.1](#) gereği $g(c) = 0$, yani $c = \cos c$ olan bir $c \in (0, 1)$ vardır.

Teklik. Önce $[0, 1]$ üzerinde: $0 \leq x < y \leq 1$ ise, kosinüs $[0, \pi/2]$ üzerinde azalan olduğundan $\cos x \geq \cos y$ ve

$$g(y) - g(x) = (y - x) + (\cos x - \cos y) > 0.$$

Yani g , $[0, 1]$ üzerinde kesin artandır ve en çok bir kez sıfırlanır. Aralığın dışında sıfırlanamaz: $x > 1$ ise $\cos x \leq 1 < x$ olduğundan $g(x) > 0$; $x < 0$ ise ya $-1 \leq x < 0$ olur ve $\cos x > 0 > x$, ya da $x < -1$ olur ve $x < -1 \leq \cos x$; her iki hâlde $g(x) < 0$. Demek ki denklemin $\mathbb{R}$ 'deki tek çözümü c 'dir. İkiye bölme yöntemiyle $g(0, 5) < 0$ ve $g(0, 75) > 0$ bulunur; devam edildiğinde $c \approx 0, 739$ elde edilir. ■

Örnek 35.4 (Sabit Nokta Teoremi). $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli olsun. $f(c) = c$ olan bir $c \in [0, 1]$ (bir **sabit nokta**) bulunduğunu gösteriniz.

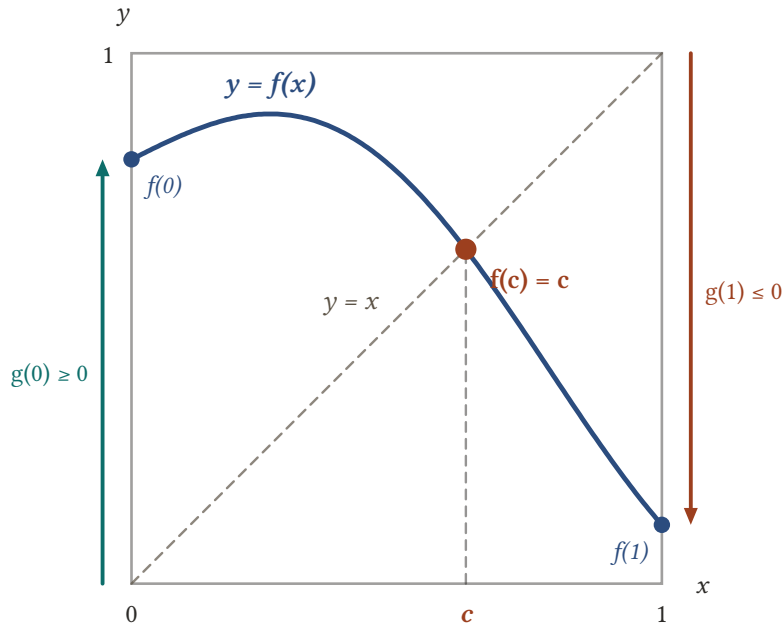
Çözüm.

Sezgi: grafik, $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinin sol kenarından sağ kenarına kalem kaldırmadan çizilen bir eğridir; köşegen $y = x$ kareyi ikiye böldüğünden eğri köşegeni kesmek zorundadır.

$g(x) = f(x) - x$ olsun; g süreklidir. f 'nin değerleri $[0, 1]$ 'de olduğundan

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

$g(0) = 0$ ise $c = 0$, $g(1) = 0$ ise $c = 1$ bir sabit noktadır. Aksi hâlde $g(0) > 0 > g(1)$ olur ve **Teorem 35.1** gereği $g(c) = 0$, yani $f(c) = c$ olan bir $c \in (0, 1)$ vardır.



Şekil 35.2: Sürekli $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun grafiği kareyi sol kenardan sağ kenara geçerken $y = x$ köşegenini kesmek zorundadır; kesişim noktası c , $f(c) = c$ sabit noktasıdır. $g(x) = f(x) - x$ farkı 0'da ≥ 0 , 1'de ≤ 0 olduğundan Bolzano teoremi arada bir sıfır verir.

Aynı akıl yürütme herhangi bir $[a, b]$ aralığı için de geçerlidir: $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekliyse sabit noktası vardır. Fakat aralığın kapalı olması şarttır: $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{2}$ sürekli olduğu hâlde sabit noktası yoktur ($\frac{x}{2} = x$ yalnız $x = 0$ için sağlanır, $0 \notin (0, 1)$). ■

Örnek 35.5 (Köklerin Varlığı Yeniden). Ara değer teoremini kullanarak $c^2 = 2$ olan bir $c > 0$ bulunduğunu, daha genel olarak her $a > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $c^n = a$ olan bir $c > 0$ bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\sqrt{2}$ 'nin varlığını Teorem 13.1'te doğrudan supremum ile, n -inci kökleri Teorem 13.2'te binom açılımıyla ispatlamıştık. Ara değer teoremi bu işi neredeyse zahmetsiz hâle getirir.

$f(x) = x^2 - 2$ sürekli bir polinomdur; $f(1) = -1 < 0$ ve $f(2) = 2 > 0$. Teorem 35.1 gereği $c^2 = 2$ olan bir $c \in (1, 2)$ vardır. $0 < x < y$ iken $x^2 < y^2$ olduğundan (Önerme 7.12 (4)) pozitif böyle bir sayı vardır; ona $\sqrt{2}$ deriz.

Genel hâl: $f(x) = x^n - a$ olsun. $f(0) = -a < 0$. Bernoulli eşitsizliği (Teorem 9.5) ile $(1 + a)^n \geq 1 + na > a$ olduğundan $f(1 + a) > 0$. Öyleyse $[0, 1 + a]$ aralığında $c^n = a$ olan bir $c \in (0, 1 + a)$ vardır. Elbette bu ispat, tamlığı daha derinde kullanıyor: ara değer teoremi supremumun varlığına dayanmaktadır. Yeni bir şey kazanmadık; ama tamlığın **bir kez** sürekli fonksiyonlar diline çevrilmesi, sonsuz çeşitlilikte varlık sorusunu tek bir kalıba indirger.

■

Ara değer teoreminin başka bir okuması da vardır: sürekli fonksiyon aralıkları aralıklara götürür. Bunu, kapalı sınırlı aralıklar için daha kesin bir biçimde aşağıda (Sonuç 35.1) göreceğiz; genel aralıklar için ifade şudur.

Önerme 35.1 (Sürekli Fonksiyon Aralığı Aralığa Götürür). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. $f(I)$ görüntü kümesi, içerdiği herhangi iki sayı arasındaki her sayıyı da içerir; yani $f(I)$ bir aralıktır (tek noktali olabilir).

İspat.

$y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y < y_2$ olsun. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ olan $x_1, x_2 \in I$ seçelim; $y_1 \neq y_2$ olduğundan $x_1 \neq x_2$. $x_1 < x_2$ ise $[x_1, x_2] \subseteq I$ 'dir (I aralık; Tanım 7.3) ve f bu kapalı aralıkta sürekli; Teorem 35.2 gereği $f(c) = y$ olan bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır. $x_2 < x_1$ ise aynı şey $[x_2, x_1]$ için yapılır. Her iki hâlde $y \in f(I)$.

Gösterdiğimiz özellik, tam olarak aralık tanımındaki koşuldur (Tanım 7.3); $J = f(I)$ boş olmadığından J bir aralıktır.

Uçlarını da belirleyebiliriz. J üstten sınırlıysa $\beta = \sup J$, değilse $\beta = +\infty$; alttan sınırlıysa $\alpha = \inf J$, değilse $\alpha = -\infty$ olsun. $\alpha < y < \beta$ olan bir y alalım. β sonluysa Teorem 10.1 ($\varepsilon = \beta - y$ ile), sonsuzsa üstten sınırsızlık, $y < y_2$ olan bir $y_2 \in J$ verir; benzer biçimde (α sonluysa Teorem 10.2 ile) $y_1 < y$ olan bir $y_1 \in J$ vardır. Yukarıdaki özellik gereği $y \in J$. Demek ki α ile β arasındaki her sayı J 'dedir; J 'nin hiçbir elemanı da α 'nın altına ya da β 'nin üstüne çıkamaz. O hâlde J , uçları α ve β olan bir aralıktır; uçların kümeye ait olup olmamasına göre açık, kapalı ya da yarı açıktır (sonsuz uçlarda köşeli ayraç kullanılmaz).

■

Görüntünün türü değişebilir: $f(x) = x^2$ fonksiyonu açık $(-1, 1)$ aralığını yarı açık $[0, 1)$ aralığına, $f(x) = \frac{1}{x}$ ise $(0, 1]$ aralığını sınırsız $[1, \infty)$ aralığına götürür. Kapalı sınırlı aralıklarda böyle bir şey olmaz; bu da bir sonraki kısmın konusudur.

35.3 Sınırlılık ve Weierstrass Ekstremum Teoremi

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0, 1]$ üzerinde sürekli ama sınırsızdır; $f(x) = x$ fonksiyonu $[0, 1)$ üzerinde sürekli, sınırlıdır ama en büyük değerini almaz: değerler 1'e istediğimiz kadar yaklaşır, 1 hiçbir zaman alınmaz. Bu iki örnekte aralık **kapalı ve sınırlı** değildir. Şimdi göreceğimiz iki teorem, aralık kapalı ve sınırlı olduğunda bu iki aksaklığın da ortadan kalktığını söyler. İspatların her ikisinde de ana araç Bolzano–Weierstrass teoremidir (Teorem 24.5): sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Teorem 35.3 (Kapalı Aralıkta Sürekli Fonksiyon Sınırlıdır). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise f sınırlıdır; yani her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak bir $M > 0$ vardır.

İspat.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım: f sınırsız olsun. O zaman hiçbir sayı $|f|$ için üst sınır değildir; özel olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f(x_n)| > n$$

olan bir $x_n \in [a, b]$ seçilebilir. Böylece $[a, b]$ içinde bir (x_n) dizisi elde ettik. Bu dizi sınırlıdır ($a \leq x_n \leq b$); Teorem 24.5 gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Limitine x_0 diyelim. Her k için $a \leq x_{n_k} \leq b$ olduğundan limit sıralama teoremiyle (Teorem 21.3) $a \leq x_0 \leq b$, yani $x_0 \in [a, b]$.

f, x_0 noktasında süreklidir. Sürekliliğin dizisel ölçütü (Teorem 33.1) gereği $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Yakınsak diziler sınırlıdır (Teorem 20.2); demek ki $(f(x_{n_k}))_k$ dizisi sınırlıdır. Ama seçimimiz gereği

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \quad (k \in \mathbb{N})$$

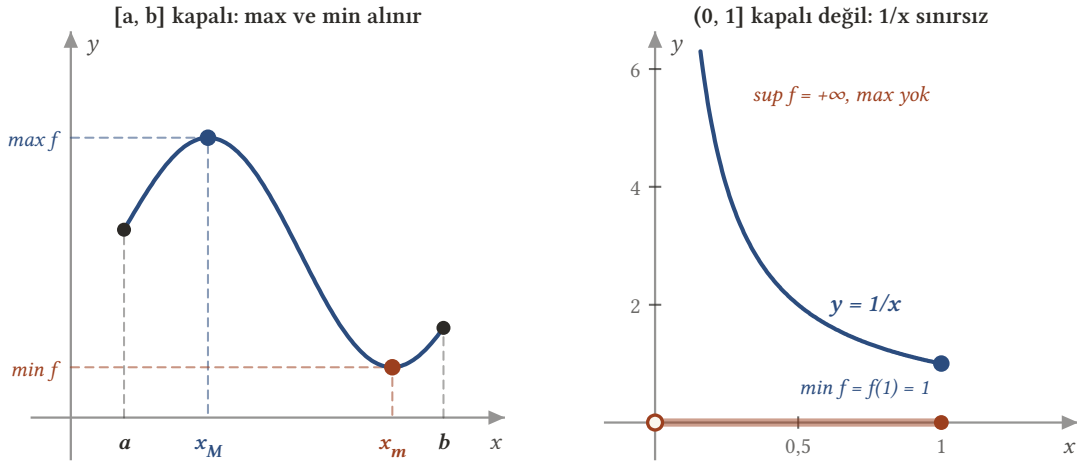
(alt dizi indisleri için $n_k \geq k$ eşitsizliğini Önerme 24.1'te görmüştük). Yani $(f(x_{n_k}))$ sınırsızdır. Çelişki. Öyleyse f sınırlıdır. ■

İspatın kilit noktası, $[a, b]$ içindeki her dizinin $[a, b]$ içinde kalan bir limite sahip alt dizisinin olmasıdır; bunun için hem sınırlılık (Bolzano–Weierstrass için) hem de kapalılık (limitin aralıkta kalması için) gerekir. Şimdi bir adım daha atıp sınırın gerçekten alındığını gösterelim.

Teorem 35.4 (Weierstrass Ekstremum Teoremi). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. f en büyük ve en küçük değerini alır: öyle $x_M, x_m \in [a, b]$ noktaları vardır ki her $x \in [a, b]$ için

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Başka bir deyişle $f(x_M) = \max f([a, b])$ ve $f(x_m) = \min f([a, b])$; supremum ve infimum birer maksimum ve minimumdur.



Şekil 35.3: Solda kapalı $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon: en büyük değer x_M 'de, en küçük değer x_m 'de gerçekten alınır. Sağda $(0, 1]$ üzerinde $f(x) = 1/x$: aralık kapalı olmadığından fonksiyon sınırsızdır ve en büyük değer yoktur; en küçük değer $f(1) = 1$ ise alınır.

İspat.

Maksimum. $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ görüntü kümesi boş değildir ve Teorem 35.3 gereği üstten sınırlıdır. Tamlık aksiyomu (Bölüm 10.4) ile supremumu vardır; $M = \sup f([a, b])$ diyelim. Göstereceğimiz şey M 'nin alındığı, yani $f(x_M) = M$ olan bir x_M bulunduğudur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $M - \frac{1}{n} < M$ sayısı $f([a, b])$ 'nin üst sınırı değildir (Teorem 10.1, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ile); dolayısıyla

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

olan bir $x_n \in [a, b]$ seçebiliriz. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ olduğundan (Örnek 20.1) sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) $f(x_n) \rightarrow M$ verir.

(x_n) dizisi $[a, b]$ içinde olduğundan sınırlıdır; [Teorem 24.5](#) gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır, $x_{n_k} \rightarrow x_M$ diyelim. Önceki ispattaki gibi $a \leq x_{n_k} \leq b$ olduğundan $x_M \in [a, b]$ ([Teorem 21.3](#)). Şimdi $(f(x_{n_k}))_k$ dizisine iki gözle bakalım:

- f, x_M 'de sürekli olduğundan [Teorem 33.1](#) ile $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_M)$.
- $(f(x_{n_k}))$, M 'ye yakınsayan $(f(x_n))$ dizisinin bir alt dizisidir; [Teorem 24.1](#) gereği $f(x_{n_k}) \rightarrow M$.

Limit tektir ([Teorem 20.1](#)); öyleyse $f(x_M) = M$. M bir üst sınır olduğundan her x için $f(x) \leq M = f(x_M)$.

Minimum. $g = -f$ fonksiyonu $[a, b]$ 'de sürekli. İlk kısma göre g maksimumunu bir x_m noktasında alır: her x için $-f(x) \leq -f(x_m)$, yani $f(x_m) \leq f(x)$.

■

Teoremin gücü şuradadır: bir “en iyi” noktanın var olduğunu, onu bulmadan söyler. Analiz 2’de türevle ekstremum ararken önce bu teoremlerle ekstremumun var olduğu garantiye alınır, sonra “türevin sıfır olduğu noktalar” arasında aranır. Weierstrass’ın adını taşımasının nedeni, bu tür varlık teoremlerinin titiz ispatlarının onun 1860’lardaki Berlin derslerinde ortaya konmuş olmasıdır.

Örnek 35.6 (Hipotezlerin Her Biri Gereklidir). Aşağıdaki fonksiyonların her birinin maksimumunu almadığını gösteriniz ve Weierstrass teoreminin hangi hipotezinin bozulduğunu belirtiniz.

- $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{x}$.
- $f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x$.
- $f_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = x$ ($0 \leq x < 1$), $f_3(1) = 0$.
- $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Çözüm.

a) f_1 sürekli ([Teorem 33.2](#)) ama sınırsızdır: $K > 0$ verilsin; $x = \frac{1}{K+1} \in (0, 1]$ için $f_1(x) = K + 1 > K$. Sınırsız fonksiyonun maksimumu olamaz. Bozulan hipotez: aralık kapalı değil (0 ucu eksik). Kapalılık kaldırılınca sürekli fonksiyonun sınırlı olması bile garanti edilemez.

b) f_2 sürekli ve sınırlıdır; görüntü kümesi $[0, 1)$, supremumu 1’dir. Ama hiçbir $x \in [0, 1)$ için $f_2(x) = 1$ olmaz. Bozulan hipotez: aralık kapalı değil.

c) Tanım kümesi $[0, 1]$ kapalı ve sınırlıdır; f_3 sınırlıdır, görüntüsü yine $[0, 1]$ ’dir ve 1 alınmaz. Bozulan hipotez: süreklilik – $f_3, 1$ noktasında süreksizdir, çünkü $x_n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ iken $f_3(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \neq 0 = f_3(1)$ ([Teorem 33.1](#)).

d) $f_4, \mathbb{R}$ ’de sürekli ([Önerme 33.3](#) ve [Teorem 33.2](#); payda hiç sıfırlanmaz). Her x için $|f_4(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$, yani sınırlıdır. $x > 0$ için $f_4(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ ifadesi 1’e istenildiği kadar yaklaşır ama 1’e ulaşmaz; dolayısıyla $\sup f_4(\mathbb{R}) = 1$ ve maksimum yoktur (benzer biçimde minimum da yoktur). Bozulan hipotez: tanım kümesi sınırlı değil. $\mathbb{R}$ kapalıdır; kapalılık tek başına yetmez.

■

Ara değer teoremi ile Weierstrass teoremini birleştirtince kapalı aralığın görüntüsü tam olarak belirlenir.

Sonuç 35.1 (Kapalı Aralığın Sürekli Görüntüsü). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $m = \min f([a, b])$ ve $M = \max f([a, b])$ olsun. O zaman

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Yani kapalı sınırlı bir aralığın sürekli görüntüsü, kapalı sınırlı bir aralıktır (ya da $m = M$ ise tek noktadır).

İspat.

m ve M ’nin varlığı [Teorem 35.4](#)’dan gelir; $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$ diyelim.

($\subseteq$) Her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ olduğundan $f([a, b]) \subseteq [m, M]$.

($\supseteq$) $y \in [m, M]$ olsun. $y = m$ ise $y = f(x_m)$, $y = M$ ise $y = f(x_M)$ görüntüdedir. $m < y < M$ ise $x_m \neq x_M$ ’dir; f , uçları x_m ve x_M olan kapalı aralıkta sürekli ve bu uçlarda m ve M değerlerini alır. [Teorem 35.2](#) gereği bu aralıkta $f(c) = y$ olan bir c vardır; $c \in [a, b]$ olduğundan $y \in f([a, b])$.

■

Örnek 35.7 (Bir Görüntü Kümesi Hesabı). $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.

f bir polinom olduğundan süreklidir; **Sonuç 35.1** gereği $f([0, 3]) = [m, M]$ 'dir ve iş, minimum ile maksimumu bulmaya kalır. Türev bilmeden de yapabiliriz: kareye tamamlayalım,

$$f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1.$$

$(x - 1)^2 \geq 0$ ve eşitlik yalnız $x = 1$ 'de olduğundan $m = f(1) = -1$. Maksimum için: $x \in [0, 3]$ iken $|x - 1| \leq 2$, dolayısıyla $(x - 1)^2 \leq 4$ ve $f(x) \leq 3$; eşitlik $x = 3$ 'te sağlanır. Öyleyse $M = f(3) = 3$ ve

$$f([0, 3]) = [-1, 3].$$

Uç noktalarındaki değerlere bakmak yetmezdi: $f(0) = 0$ ve $f(3) = 3$ olduğu hâlde görüntü $[0, 3]$ değildir; minimum aralığın içinde, $x = 1$ 'de alınır.

■

35.4 Kompakt Kümelerin Sürekli Görüntüsü

Sınırlılık ve ekstremum teoremlerinin ispatlarında $[a, b]$ 'nin kullandığımız tek özelliği şuydu: aralıktaki her dizinin, limiti yine aralıktaki bir yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu tam olarak **dizisel kompaktlık** (**Tanım 24.3**) tanımıdır ve **Teorem 24.8** gereği kompaktlıkla, dolayısıyla kapalı ve sınırlı olmakla denktir. Öyleyse sonuçlar kapalı sınırlı bütün kümelere taşınmalıdır. Gerçekten de daha fazlası doğrudur: kompaktlık süreklilik altında korunur.

Teorem 35.5 (Kompakt Kümenin Sürekli Görüntüsü Kompakttır). $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ve $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. O zaman $f(K)$ kompakttır.

İspat.

Teorem 24.8 gereği kompaktlık ile dizisel kompaktlık aynı şeydir; $f(K)$ 'nin dizisel kompakt olduğunu göstereceğiz. (y_n) , $f(K)$ içinde herhangi bir dizi olsun. Her y_n bir görüntü olduğundan $f(x_n) = y_n$ olan bir $x_n \in K$ seçelim. K dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin, limiti K 'de olan yakınsak bir alt dizisi vardır: $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. f , x_0 'da süreklidir; dizisel ölçüt (**Teorem 33.1**) ile

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \in f(K).$$

Demek ki (y_n) 'nin, limiti $f(K)$ içinde olan yakınsak bir alt dizisi vardır. (y_n) keyfi olduğundan $f(K)$ dizisel kompakt, dolayısıyla kompakttır.

■

Sonuç 35.2 (Kompakt Kümede Sürekli Fonksiyon Ekstremumlarını Alır). $K \neq \emptyset$ kompakt ve $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise f sınırlıdır ve en büyük ile en küçük değerini alır.

İspat.

Teorem 35.5 gereği $f(K)$ kompakttır; dolayısıyla sınırlı (**Teorem 18.1**) ve kapalıdır (**Teorem 18.2**). Boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir kümenin maksimumu ve minimumu vardır (**Sonuç 17.5**); yani $\sup f(K)$ ve $\inf f(K)$ sayıları $f(K)$ 'nin elemanıdır. Bu da tam olarak f 'nin en büyük ve en küçük değerlerini alması demektir.

■

$[a, b]$ aralığı kapalı ve sınırlı olduğundan Heine–Borel teoremi (**Teorem 18.5**) gereği kompakttır; böylece **Teorem 35.4** bu sonucun özel hâli olarak yeniden elde edilmiş olur. Yeni olan şey, sonucun örneğin $K = [0, 1] \cup [2, 3]$ ya da $K = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ gibi aralık olmayan kümelere de geçerli olmasıdır. Kompakt olmayan kümelere görüntü kompakt olmak zorunda değildir: $(0, 1]$ kompakt değildir ve $x \mapsto \frac{1}{x}$ onu sınırsız $[1, \infty)$ kümesine götürür; $(0, 1)$ 'i ise $x \mapsto x$ yine $(0, 1)$ 'e, kapalı olmayan bir kümeye götürür.

Öte yandan ters yön de doğru değildir: kompakt olmayan bir kümenin sürekli görüntüsü kompakt olabilir; sabit fonksiyon $\mathbb{R}$ 'yi tek noktaya götürür.

🔗 Bölümün özeti

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

Sonuç	Söylediği	Dayandığı araç
Teorem 35.1	uçlarda zıt işaret $\Rightarrow$ arada sıfır yeri	supremum / iç içe aralıklar
Teorem 35.2	aldığı iki değer arasındaki her değeri alır	Bolzano teoremi
Teorem 35.3	sınırlıdır	Bolzano–Weierstrass
Teorem 35.4	max ve min alınır	supremum + Bolzano–Weierstrass
Sonuç 35.1	$f([a, b]) = [m, M]$	ikisinin birleşimi
Teorem 35.5	kompaktın görüntüsü kompakt	dizisel kompaktlık

Hepsinin ortak paydası: tanım kümesi “kaçış noktası bırakmayan” bir kümedir ve süreklilik, dizilerin limitini fonksiyonun içinden geçirmemize izin verir.

35.5 Alıştırmalar

Alıştırma 35.1 (Ara Değer ve Weierstrass Teoremleri Üzerine).

- $x^5 + 2x - 1 = 0$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.
- $p(x) = x^4 - 4x + 1$ polinomunun en az iki farklı reel kökü olduğunu gösteriniz.
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \in \mathbb{Q}$ olsun. f 'nin sabit olduğunu gösteriniz.
- $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $f(a) < g(a)$ ve $f(b) > g(b)$ olsun. $f(c) = g(c)$ olan bir $c \in (a, b)$ bulunduğunu gösteriniz.
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) > 0$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq \delta$ olacak bir $\delta > 0$ bulunduğunu gösteriniz. Aynı sonucun $(0, 1]$ aralığında $f(x) = x$ için yanlış olduğunu açıklayınız.

Çözüm.

a) $h(x) = x^5 + 2x - 1$ bir polinomdur, süreklidir (**Sonuç 33.2**). $h(0) = -1 < 0$ ve $h(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0$. **Teorem 35.1** gereği $h(c) = 0$ olan bir $c \in (0, 1)$ vardır. (Ayrıca $x < y$ iken $x^5 < y^5$ ve $2x < 2y$ olduğundan h kesin artandır; çözüm tektir.)

b) $p(0) = 1 > 0$, $p(1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$, $p(2) = 16 - 8 + 1 = 9 > 0$. $[0, 1]$ ve $[1, 2]$ aralıklarında işaret değiştiğinden **Teorem 35.1** iki kök verir: $c_1 \in (0, 1)$ ve $c_2 \in (1, 2)$. Aralıklar ayrık olduğundan $c_1 \neq c_2$. (Derece çift olduğu için **Örnek 35.2**'teki sonuç uygulanamazdı; kökleri elle bulmak zorunda kaldık.)

c) f sabit olmasın; $f(x_1) \neq f(x_2)$ olan $x_1, x_2 \in [a, b]$ vardır, diyelim $f(x_1) < f(x_2)$. İrrasyonel sayılar yoğun olduğundan (**Teorem 13.6**) $f(x_1) < t < f(x_2)$ olan bir irrasyonel t vardır. f , uçları x_1 ve x_2 olan kapalı aralıkta süreklidir; **Teorem 35.2** gereği $f(c) = t$ olan bir c vardır. Ama bu, $f(c) \in \mathbb{Q}$ varsayımıyla çelişir. Öyleyse f sabittir.

Aynı akıl yürütme, değerleri $\mathbb{Z}$ 'de ya da herhangi bir “boşluklu” kümede olan sürekli fonksiyonların sabit olduğunu gösterir. Örneğin $[a, b]$ 'de sürekli ve yalnız ± 1 değerlerini alan bir fonksiyon sabittir.

d) $h = f - g$ fonksiyonu süreklidir (**Teorem 33.2**). $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ ve $h(b) = f(b) - g(b) > 0$. **Teorem 35.1** gereği $h(c) = 0$, yani $f(c) = g(c)$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır. Geometrik anlam: biri diğerinin altından başlayıp üstünde biten iki sürekli grafik kesişmek zorundadır. **Örnek 35.4** bunun $g(x) = x$ özel hâlidir.

e) **Teorem 35.4** gereği f minimumunu bir x_m noktasında alır: her x için $f(x) \geq f(x_m)$. $\delta = f(x_m)$ diyelim; hipotez gereği $\delta > 0$ 'dır ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq \delta$.

Sonuç şunu söyler: kapalı aralıkta sürekli ve hep pozitif olan fonksiyon 0'a "yaklaşamaz", 0'dan pozitif bir uzaklıkta kalır. $(0, 1]$ üzerinde $f(x) = x$ hep pozitifdir ama hiçbir $\delta > 0$ işe yaramaz: **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n} < \delta$ olan bir n vardır ve $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} < \delta$. Aralık kapalı olmadığından minimum yoktur, infimum 0'dır ve alınmaz.

■

Bu bölümde sürekliliğin bir aralık boyunca ne kadar güçlü sonuçlar verdiğini gördük. Ama süreklilik tanımındaki δ hâlâ noktaya bağlıdır: aynı ε için aralığın bir yerinde geniş, başka bir yerinde çok dar bir δ gerekebilir. Bir sonraki bölümde, bütün aralık için tek bir δ 'nın yettiği durumu, **düzgün sürekliliği** inceleyecek ve Cantor teoremiyle kapalı sınırlı aralıkta sürekliliğin bunu otomatik olarak sağladığını göreceğiz: **Düzgün Süreklilik ve Cantor Teoremi**.

36. Düzgün Süreklilik ve Cantor Teoremi

Süreklilik tanımına bir kez daha bakalım. f fonksiyonunun a noktasında sürekli olması, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunması demektir ki a 'ya δ 'dan yakın her x için $f(x)$, $f(a)$ 'ya ε 'dan yakın olsun (Tanım 33.1). Bu tanımda δ iki şeye bağlıdır: ε 'a ve **noktaya**. Aynı ε için grafiğin yatık olduğu yerde geniş, dik olduğu yerde dar bir δ gerekir. Peki bir aralığın tamamı için, noktadan bağımsız, “herkese yetecek” tek bir δ seçilebilir mi?

Bu sorunun yanıtı bazen evet, bazen hayırdır ve yanıtın evet olduğu duruma **düzgün süreklilik** denir. Bu bölümde önce kavramı tanımlayıp süreklilikten farkını örneklerle göreceğiz; sonra düzgün sürekliliği garanti eden (Lipschitz koşulu) ve düzgün sürekli olmadığını göstermeye yarayan (dizisel ölçüt) araçları kuracağız. Bölümün ana teoremi Cantor’a aittir: kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon otomatik olarak düzgün sürekli. Bu sonuç, önceki bölümdeki Weierstrass teoremi gibi, Bolzano–Weierstrass teoremine dayanır ve Analiz 2’de Riemann integralinin kuruluşunda kilit rol oynar.

36.1 Noktaya Bağlı Delta

Önce sorunu somut olarak görelim. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun bir $a \in \mathbb{R}$ noktasındaki sürekliliğini tanımla göstermek istediğimizde

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|$$

çarpanlarına bakarız. $|x - a| < 1$ alırsak üçgen eşitsizliğiyle (Teorem 8.2) $|x + a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|$ olur; dolayısıyla

$$\delta_a = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\right\}$$

seçimi $|x - a| < \delta_a \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$ verir. Bu δ_a , $|a|$ büyüdükçe azalır: küçük bir ε için ($\varepsilon \leq 1$ olsun, minimumun 1 kolu devreye girmesin) $a = 0$ 'da ε , $a = 100$ 'de $\varepsilon/201$ kadardır. Grafik sağa gittikçe dikleştiği için aynı ε -bandını yakalamak giderek daha dar bir pencere gerektirir.

Benzer bir durum $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunda $a > 0$ noktası sıfıra yaklaşırken ortaya çıkar. $|x - a| < \frac{a}{2}$ iken $x > \frac{a}{2} > 0$ olduğundan

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x - a|}{xa} \leq \frac{2|x - a|}{a^2}$$

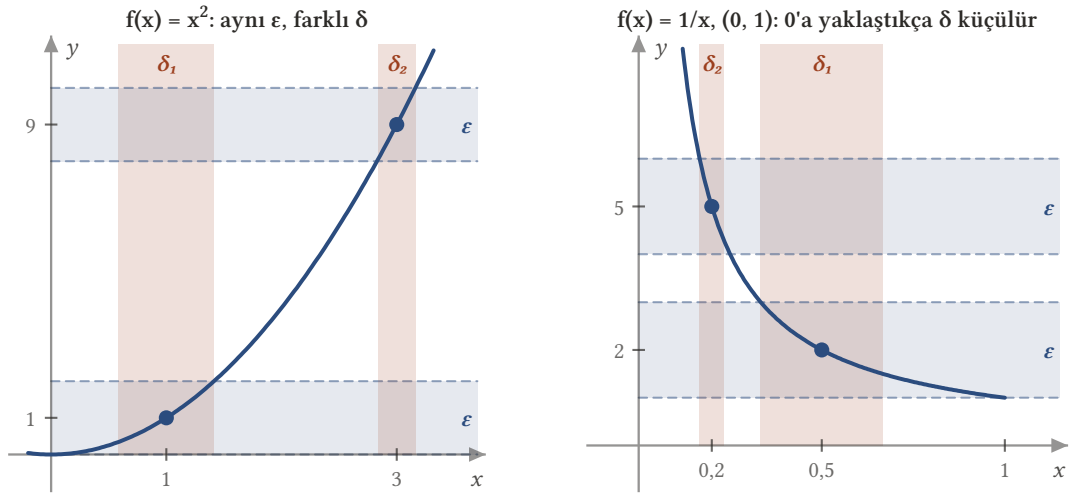
ve $\delta_a = \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$ işe yarar; ama $a \rightarrow 0$ iken $\delta_a \rightarrow 0$. Her iki örnekte de her noktada süreklilik vardır, fakat bütün noktalara birden yetecek tek bir δ bulmak zor görünmektedir. Bunun gerçekten imkânsız olduğunu birazdan göstereceğiz. Önce “tek bir δ yeter” fikrini tanıma dönüştürelim.

Tanım 36.1 (Düzgün Süreklilik). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ varsa ki $|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in A$ çifti için

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sağlansın, f 'ye A üzerinde **düzgün sürekli** (uniformly continuous) denir. Sembolle:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$



Şekil 36.1: Solda $f(x) = x^2$: aynı ε için $x = 1$ yakınında geniş, $x = 3$ yakınında dar bir δ yeter; eğim büyüdükçe δ küçülür ama sınırlı bir aralıkta en küçük δ bütün noktalara yetişir. Sağda $(0, 1)$ üzerinde $f(x) = 1/x$: 0 'a yaklaştıkça aynı ε için gereken δ sınırsız küçülür; bütün noktalara birden uyan tek bir δ yoktur, fonksiyon düzgün sürekli değildir.

Tanımdaki δ yalnızca ε 'a bağlıdır; x ve y seçilmeden önce belirlenir. Süreklilikle aradaki fark tamamen niceleyicilerin sırasındadır.

! Niceleyicilerin sırası

f 'nin A kümesinin her noktasında sürekli olması:

$$\forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f 'nin A üzerinde düzgün sürekli olması:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in A : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

İlkinde δ , a 'dan **sonra** seçilir ve a 'ya bağlı olabilir; ikincisinde δ , a 'dan **önce** seçilir ve bütün a 'lar için aynıdır. “Her x için bir y vardır” ile “öyle bir y vardır ki her x için” arasındaki farkı niceleyicileri öğrenirken görmüştük; düzgün süreklilik bu farkın analizdeki en önemli örneğidir.

Düzgün sürekliliğin “sıradan” sürekliliği gerektirdiğini hemen görelim; tersinin doğru olmadığını ise örneklerle göstereceğiz.

Önerme 36.1 (Düzgün Sürekli Fonksiyon Süreklidir). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A üzerinde düzgün sürekli ise f , A 'nın her noktasında sürekli.

İspat.

$a \in A$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün süreklilik tanımından ε 'a karşılık gelen $\delta > 0$ sayısını alalım. $x \in A$ ve $|x - a| < \delta$ olsun. Tanımı $y = a$ ile uygularsak $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ elde ederiz. Bu tam olarak f 'nin a 'da sürekli olmasıdır (Tanım 33.1); a keyfi olduğundan f , A 'nın her noktasında sürekli.

■

Bir fonksiyonun düzgün sürekli **olmadığını** göstermek için tanımın olumsuzlamasına ihtiyacımız var. Niceleyici olumsuzlama kurallarıyla (Teorem 2.1) f 'nin A üzerinde düzgün sürekli olmaması şu demektir:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in A : \quad |x - y| < \delta \quad \text{ve} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Yani “kötü” bir ε_0 vardır: δ ne kadar küçük seçilirse seçilsin, birbirine δ 'dan yakın ama görüntüleri ε_0 kadar uzak iki nokta bulunur.

36.2 Örnekler

Her örnekte şablon aynıdır: düzgün süreklilik için $|f(x) - f(y)|$ ifadesini $|x - y|$ cinsinden, x ve y 'den bağımsız bir sabitle sınırlamaya çalışırız; düzgün sürekli olmadığını göstermek için ise verilen her δ 'ya karşı bir kötü çift üretiriz.

Örnek 36.1 (Doğrusal Fonksiyonlar). $m, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = mx + b$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$m = 0$ ise f sabittir; her x, y için $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ olduğundan herhangi bir δ , örneğin $\delta = 1$, işe yarar.

$m \neq 0$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x) - f(y)| = |(mx + b) - (my + b)| = |m| \cdot |x - y|.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ alalım. $|x - y| < \delta$ ise $|f(x) - f(y)| = |m| \cdot |x - y| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon$. δ yalnızca ε 'a bağlıdır; f düzgün süreklidir. Doğrunun eğimi her yerde aynı olduğundan bu beklenen bir sonuçtur.

■

Örnek 36.2 (Kare Fonksiyonu: Sınırlı Aralıkta Evet, Tüm Doğruda Hayır). $f(x) = x^2$ fonksiyonunun

a) $M > 0$ olmak üzere $[-M, M]$ aralığında (özel olarak $[0, 1]$ 'de) düzgün sürekli olduğunu,

b) $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını

gösteriniz.

Çözüm.

a) $x, y \in [-M, M]$ için $|x| \leq M$ ve $|y| \leq M$ olduğundan

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq |x - y| (|x| + |y|) \leq 2M |x - y|.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ alırsak $|x - y| < \delta$ iken $|x^2 - y^2| \leq 2M |x - y| < \varepsilon$ olur. $[0, 1]$ için $M = 1$ ve $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ yeterlidir.

b) Bölümün başındaki hesap, δ_a 'nın $|a|$ büyüdükçe küçüldüğünü göstermişti; şimdi hiçbir sabit δ 'nın yetmediğini kanıtlayalım. $\varepsilon_0 = 1$ alalım ve herhangi bir $\delta > 0$ verilsin. Noktaları

$$x = \frac{1}{\delta}, \quad y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

seçelim. $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ 'dir; ama

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |x + y| = \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon_0.$$

Demek ki her δ için birbirine δ 'dan yakın, görüntüleri 1'den uzak bir çift vardır; f , $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir. Sezgi: orijinden uzaklaştıkça parabol dikleşir; sabit genişlikteki bir pencere içinde fonksiyon istenildiği kadar büyük sıçramalar yapar.

■

Örnek 36.3 (Bir Bölü x Fonksiyonu). $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun

a) $[1, \infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu,

b) $(0, 1)$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını

gösteriniz.

Çözüm.

a) $x, y \geq 1$ için $xy \geq 1$ olduğundan

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y - x|}{xy} \leq |x - y|.$$

$\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon$ alınırsa $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x - y| < \varepsilon$. Aynı hesap, $c > 0$ olmak üzere $[c, \infty)$ üzerinde $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{|x - y|}{c^2}$ verir; yani f , sıfırdan pozitif bir uzaklıkta kalan her kümede düzgün süreklidir.

b) $\varepsilon_0 = 1$ alalım ve $\delta > 0$ verilsin. **Sonuç 12.2** gereği $\frac{1}{n} < \delta$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır; n büyüdükçe $\frac{1}{n}$ daha da küçüldüğünden gerekirse n 'yi büyüterek $n \geq 2$ alabiliriz. O zaman $x = \frac{1}{n}$ ve $y = \frac{1}{2n}$ noktaları $(0, 1)$ içindedir ($0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$) ve

$$|x - y| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \delta, \quad |f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1 = \varepsilon_0.$$

Öyleyse $f, (0, 1)$ üzerinde düzgün sürekli değildir. Sorun 0'a yakın bölgededir: oraya yaklaştıkça grafik sonsuza fırlar ve sabit genişlikteki bir pencere içindeki değişim sınırsız büyür.

■

Bu iki örnek “grafik dikleşince düzgün süreklilik bozulur” izlenimi verebilir; ama diklik tek başına belirleyici değildir. Aşağıdaki fonksiyonun grafiği 0'da düşey teğetlidir, yine de düzgün süreklidir.

Örnek 36.4 (Karekök Fonksiyonu). $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce şu eşitsizliği kanıtlayalım: her $x, y \geq 0$ için

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}. \quad (1)$$

Simetri nedeniyle $x \geq y$ varsayabiliriz. $\sqrt{y} + \sqrt{x - y}$ sayısının karesi

$$(\sqrt{y} + \sqrt{x - y})^2 = y + 2\sqrt{y}\sqrt{x - y} + (x - y) = x + 2\sqrt{y(x - y)} \geq x$$

olur. Negatif olmayan u, v sayılarında $u^2 \leq v^2 \Rightarrow u \leq v$ 'dir ($v < u$ olsaydı, $v > 0$ iken **Önerme 7.12** (4) ile $v^2 < u^2$, $v = 0$ iken aynı önermenin (1) maddesiyle $v^2 = 0 < u^2$ olurdu; ikisi de $u^2 \leq v^2$ ile çelişir). Bunu $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$ ile uygularsak $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$, yani $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y} = \sqrt{|x - y|}$. Sol taraf $x \geq y$ iken negatif olmadığından bu, (1)'dir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \varepsilon^2$ alalım. $x, y \geq 0$, $|x - y| < \delta$ ise (1) ve karekökün artanlığıyla

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Demek ki $\sqrt{x}, [0, \infty)$ 'un tamamında düzgün süreklidir. Dikkat: burada $\delta = \varepsilon^2$, ε 'dan çok daha küçüktür ($\varepsilon < 1$ iken); ama noktaya bağlı değildir ve önemli olan yalnızca budur.

■

36.3 Lipschitz Koşulu

Doğrusal fonksiyonlar, $[-M, M]$ 'de kare fonksiyonu ve $[1, \infty)$ 'da $\frac{1}{x}$ örneklerinde hep aynı türden bir eşitsizlik elde ettik: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Bu kalıp o kadar sık karşımıza çıkar ki kendi adı vardır.

Tanım 36.2 (Lipschitz Koşulu). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Öyle bir $L \geq 0$ sabiti varsa ki her $x, y \in A$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

sağlansın, f 'nin A üzerinde **Lipschitz koşulunu** (Lipschitz condition) sağladığı ya da **Lipschitz sürekli** olduğu söylenir; L 'ye bir **Lipschitz sabiti** denir.

Geometrik anlamı şudur: grafiğin herhangi iki noktasını birleştiren kirişin eğimi $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, mutlak değerce L 'yi aşamaz. Koşul, Alman matematikçi Rudolf Lipschitz'in (1832–1903) adını taşır; Analiz 2'de, **bir aralıkta** türevlenebilen ve türevi orada sınırlı kalan her fonksiyonun bu koşulu sağladığı görülecektir (ispat ortalama değer teoremine dayanır; tanım kümesinin aralık olması şarttır). Şimdiye kadarki örneklerden: $mx + b$ için $L = |m|$; $[-M, M]$ 'de x^2 için $L = 2M$; $[c, \infty)$ 'da $\frac{1}{x}$ için $L = \frac{1}{c^2}$. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 8.3) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ verdiğinden $|x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de $L = 1$ ile Lipschitz'dir. Sinüs için de $L = 1$ alınabilir: toplam-fark özdeşliği ile süreklilik bölümünde kabul ettiğimiz $|\cos u| \leq 1$ ve $|\sin t| \leq |t|$ olgularıyla (Önerme 33.4'ün ispatındaki hesap)

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x - y|.$$

Teorem 36.1 (Lipschitz Koşulu Düzgün Sürekliliği Gerektirir). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyorsa A üzerinde düzgün süreklidir.

İspat.

L bir Lipschitz sabiti olsun. $L = 0$ ise her x, y için $|f(x) - f(y)| \leq 0$, yani f sabittir ve Örnek 36.1'deki gibi her δ işe yarar.

$L > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin; $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ alalım. $x, y \in A$ ve $|x - y| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

δ yalnızca ε 'a (ve sabit L 'ye) bağlıdır; f düzgün süreklidir. ■

Teorem, düzgün sürekliliği göstermenin en hızlı yolunu verir: tek bir eşitsizlik, δ 'yı otomatik olarak üretir. Öte yandan Lipschitz koşulu düzgün süreklilikten kesinlikle daha güçlüdür.

⚠ Karşıtı yanlışır: karekök

$\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde düzgün süreklidir (Örnek 36.4) ama Lipschitz koşulunu sağlamaz. Sağlasaydı, bir L için her $x, y \in [0, 1]$ 'de $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L |x - y|$ olurdu. $y = 0$ ve $x = \frac{1}{n^2}$ alalım:

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}} \leq L \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow n \leq L \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bu, doğal sayıların üstten sınırlı olmamasıyla (Teorem 10.4) çelişir. Geometrik neden: 0 civarında kirişlerin eğimi $\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sınırsız büyür. Yine de fonksiyon düzgün süreklidir, çünkü kirişin dikliği değil, dar bir penceredeki **toplam değişim** ($\sqrt{|x - y|}$) küçüktür.

36.4 Düzgün Sürekli Olmama için Dizisel Ölçüt

Sürekliliğin dizisel ölçütü (Teorem 33.1), ε - δ hesabını dizi limitine çevirmişti. Düzgün süreklilik için de benzer bir çeviri vardır; özellikle bir fonksiyonun düzgün sürekli **olmadığını** göstermek için çok kullanışlıdır. Fikir, olumsuzlamadaki “her δ için kötü bir çift vardır” ifadesini $\delta = \frac{1}{n}$ olarak iki diziye dönüştürmektir.

Teorem 36.2 (Düzgün Sürekli Olmama için Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. f , A üzerinde düzgün sürekli değildir.
2. Öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ve A içinde öyle $(x_n), (y_n)$ dizileri vardır ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2) f düzgün sürekli olmasın. Olumsuzlama gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için $|x - y| < \delta$ ve $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ olan $x, y \in A$ bulunur. Bunu her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{n}$ ile uygulayalım: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ve $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ olan $x_n, y_n \in A$ seçelim. Böylece iki dizi kurduk. $0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ve $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (Örnek 20.1) olduğundan sıkıştırma teoremiyle (Teorem 21.6) $|x_n - y_n| \rightarrow 0$; bir dizinin mutlak değeri sıfıra gidiyorsa kendisi de sıfıra gider (Önerme 20.3), yani $x_n - y_n \rightarrow 0$. İkinci koşul kuruluş gereği sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (1) ε_0 ve diziler verilsin; f 'nin düzgün sürekli olduğunu varsayıp çelişki bulalım. Düzgün süreklilik tanımını $\varepsilon = \varepsilon_0$ ile uygulayınca bir $\delta > 0$ elde ederiz: $|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in A$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$. $x_n - y_n \rightarrow 0$ olduğundan limit tanımında $\varepsilon = \delta$ alarak $n \geq N$ iken $|x_n - y_n| < \delta$ olacak bir N bulunur. Özel olarak $|x_N - y_N| < \delta$, dolayısıyla $|f(x_N) - f(y_N)| < \varepsilon_0$. Ama hipotez $|f(x_N) - f(y_N)| \geq \varepsilon_0$ diyordu. Çelişki; f düzgün sürekli değildir.

■

Teoremin olumlu biçimi de yararlıdır ve süreklilik için dizisel ölçütü karşılaştırmayı netleştirir.

Sonuç 36.1 (Düzgün Süreklilik için Dizisel Ölçüt). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun A üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul şudur: A içinde $x_n - y_n \rightarrow 0$ sağlayan her $(x_n), (y_n)$ dizi çifti için $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ olur.

İspat.

($\Rightarrow$ yönü) f düzgün sürekli ve $x_n - y_n \rightarrow 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin; düzgün süreklilikten δ 'yı alalım. $x_n - y_n \rightarrow 0$ olduğundan $n \geq N$ iken $|x_n - y_n| < \delta$ olacak bir N vardır; bu n 'ler için $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Demek ki $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$ yönü) Koşul sağlansın ama f düzgün sürekli olmasın. Teorem 36.2 gereği $x_n - y_n \rightarrow 0$ ve her n için $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ olan diziler vardır. Hipoteze göre $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$, dolayısıyla $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$ (Teorem 20.3). Her terim ε_0 'dan büyük ya da eşit olduğundan limit sıralama teoremiyle (Teorem 21.3) $0 \geq \varepsilon_0 > 0$; çelişki.

■

Süreklilik ölçütünde tek bir dizi sabit bir $a \in A$ noktasına yakınsıyordu. Burada ise iki dizi birbirine yaklaşır; ortak bir limitleri olması gerekmez — sonsuza kaçabilir ya da A 'nın dışındaki bir noktaya (örneğin $(0, 1)$ için 0 'a) yığılabirler. Düzgün süreklilik, fonksiyonun böyle “kaçan” çiftleri de kontrol altında tutmasını ister.

Örnek 36.5 (Dizisel Ölçütü Üç Örnek). Dizisel ölçütü kullanarak aşağıdaki fonksiyonların belirtilen kümede düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

- $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$.
- $g(x) = \frac{1}{x}$, $A = (0, 1)$.
- $h(x) = \sin \frac{1}{x}$, $A = (0, 1)$.

Çözüm.

a) $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alalım. $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Öte yandan

$$f(x_n) - f(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2.$$

$\varepsilon_0 = 2$ ile Teorem 36.2 uygulanır. Bu, Örnek 36.2'deki sonucun daha kısa bir ispatıdır: diziler sonsuza kaçarken aralarındaki fark kapanıyor, görüntülerin farkı kapanmıyor.

b) $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{1}{n+2}$ alalım; her $n \in \mathbb{N}$ için ikisi de $(0, 1)$ içindedir. $x_n - y_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$ (limit aritmetiği, Teorem 21.1), ama $g(x_n) - g(y_n) = (n+1) - (n+2) = -1$, yani $|g(x_n) - g(y_n)| = 1$.

$\varepsilon_0 = 1$.

c) $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi}$ alalım. Her $n \geq 1$ için $0 < x_n < y_n \leq \frac{1}{2\pi} < 1$, yani ikisi de A 'dadır. $0 < y_n < \frac{1}{n}$ olduğundan sıkıştırmayla $y_n \rightarrow 0$, benzer biçimde $x_n \rightarrow 0$; dolayısıyla $x_n - y_n \rightarrow 0$. Görüntüler:

$$h(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad h(y_n) = \sin(2n\pi) = 0.$$

$|h(x_n) - h(y_n)| = 1$; $\varepsilon_0 = 1$ ile h düzgün sürekli değildir. Bu örnek önemli bir noktayı gösterir: h **sınırlıdır** ($|h| \leq 1$) ve $(0, 1)$ 'in her noktasında süreklidir, yine de düzgün sürekli değildir. Sorun büyüklük değil, 0'a yaklaşırken salınımların giderek sıklaşmasıdır; sabit genişlikteki bir pencereye sonsuz çoklukta tam salınım sığar.

■

36.5 Cantor Teoremi

Şimdiye kadar düzgün sürekliliğin bozulduğu bütün örneklerde tanım kümesi ya sınırsızdı ($\mathbb{R}$) ya da kapalı değildi ($(0, 1)$). Bu bir rastlantı değildir. Kapalı ve sınırlı bir aralıkta süreklilik, hiçbir ek koşul gerekmeden düzgün sürekliliği verir. Bu teoremi ilk kez Dirichlet 1854'teki derslerinde kullanmış, Eduard Heine 1872'de yayımlamış, ispatın ardındaki kompaktlık fikrini ise Georg Cantor geliştirmiştir; bu yüzden **Heine–Cantor teoremi** olarak da anılır.

Teorem 36.3 (Cantor Teoremi). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise $f, [a, b]$ üzerinde düzgün süreklidir.

İspat.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım: f düzgün sürekli olmasın. **Teorem 36.2** gereği bir $\varepsilon_0 > 0$ ve $[a, b]$ içinde

$$x_n - y_n \rightarrow 0, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sağlayan $(x_n), (y_n)$ dizileri vardır.

Adım 1: Yakınsak bir alt dizi. Her n için $a \leq x_n \leq b$ olduğundan (x_n) sınırlıdır. Bolzano–Weierstrass teoremi (**Teorem 24.5**) gereği yakınsak bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi vardır; limitine c diyelim. Her k için $a \leq x_{n_k} \leq b$ olduğundan limit sıralama teoremiyle (**Teorem 21.3**) $a \leq c \leq b$, yani $c \in [a, b]$. Burası ispatın kapalılığı kullandığı yerdir: limit, tanım kümesinin dışına kaçamaz.

Adım 2: Öteki dizinin aynı alt dizisi de c 'ye gider. $(x_n - y_n)$ dizisi 0'a yakınsadığından her alt dizisi de 0'a yakınsar (**Teorem 24.1**); özel olarak $x_{n_k} - y_{n_k} \rightarrow 0$. Limit aritmetiğiyle (**Teorem 21.1**)

$$y_{n_k} = x_{n_k} - (x_{n_k} - y_{n_k}) \rightarrow c - 0 = c.$$

Adım 3: Süreklilikle çelişki. $f, c \in [a, b]$ noktasında süreklidir. Sürekliliğin dizisel ölçütü (**Teorem 33.1**) ile hem $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$ hem de $f(y_{n_k}) \rightarrow f(c)$; farkları $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow f(c) - f(c) = 0$ ve dolayısıyla $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$ (**Teorem 20.3**). Ama her k için $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$; limit sıralama teoremi $0 \geq \varepsilon_0 > 0$ verir. Çelişki. O hâlde f düzgün süreklidir.

■

Teoremin değeri, bir kez daha, bir şeyi **hesaplamadan** var olduğunu söylemesindedir: $[a, b]$ 'de sürekli bir fonksiyon için her ε 'a karşılık bütün aralıkta işe yarayan tek bir δ vardır, bu δ 'yı bulmak zorunda değiliz. Analiz 2'de “kapalı aralıkta sürekli her fonksiyon Riemann integrallenebilir” teoreminin ispatı tam olarak bu δ 'ya dayanır.

i Hipotezlerin gerekliliği

İspatta $[a, b]$ 'nin iki özelliğini kullandık; ikisi de vazgeçilmezdir.

- **Sınırlılık** Bolzano–Weierstrass için gerekliydi. $\mathbb{R}$ üzerinde x^2 süreklidir ama düzgün sürekli değildir (**Örnek 36.2**); dizisel ölçütteki $x_n = n + \frac{1}{n}$ dizisinin yakınsak alt dizisi yoktur.
- **Kapalılık**, alt dizinin limitinin tanım kümesinde kalması, dolayısıyla f 'nin orada sürekli olması için gerekliydi. $(0, 1)$ üzerinde $\frac{1}{x}$ ve $\sin \frac{1}{x}$ süreklidir ama düzgün sürekli değildir (**Örnek 36.5**); kötü diziler 0'a yığılır ve $0 \notin (0, 1)$.

Süreklilik hipotezi de elbette gereklidir: düzgün süreklilik sürekliliği gerektirir (**Önerme 36.1**).

İspatta $[a, b]$ hakkında kullandığımız tek şey, içindeki her dizinin limiti yine $[a, b]$ 'de olan yakınsak bir alt dizisinin bulunmasıydı. Bu, dizisel kompaktlığın (Tanım 24.3) tanımıdır; dolayısıyla teorem bütün kompakt kümelere taşınır.

Sonuç 36.2 (Kompakt Kümede Sürekli Fonksiyon Düzgün Süreklidir). $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ve $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise f , K üzerinde düzgün sürekli. Özel olarak, kapalı ve sınırlı her K kümesinde sürekli olan fonksiyon düzgün sürekli.

İspat.

Teorem 36.3'ün ispatı sözcüğü sözcüğüne geçerlidir; yalnızca Adım 1 değişir. f düzgün sürekli olmasın; Teorem 36.2 ile K içinde $x_n - y_n \rightarrow 0$ ve $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ olan diziler alalım. Teorem 24.8 gereği K dizisel kompakttır: (x_n) 'nin, limiti $c \in K$ olan yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Adım 2 ile $y_{n_k} \rightarrow c$, Adım 3 ile $(f, c \in K$ 'de sürekli olduğundan) $0 \geq \varepsilon_0$ çelişkisi elde edilir.

İkinci ifade için: kapalı ve sınırlı bir küme Heine–Borel teoremi (Teorem 18.5) gereği kompakttır.

■

Örnek 36.6 (Cantor Teoreminin Uygulamaları).

- Her polinomun her sınırlı I aralığında düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.
- $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, 1]$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz. ($\sin \frac{1}{x}$ 'in $(0, 1]$ 'de düzgün sürekli olmadığını görmüştük; çarpan x ne değiştiriyor?)
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve bir $p > 0$ için **periyodik** olsun: her x için $f(x + p) = f(x)$. f 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) I sınırlı olduğundan $I \subseteq [-M, M]$ olacak bir $M > 0$ vardır. Polinom $[-M, M]$ 'de sürekli (Sonuç 33.2); Teorem 36.3 gereği orada düzgün sürekli. Düzgün süreklilik alt kümeye geçer: $[-M, M]$ için bulunan δ , I 'daki x, y çiftleri için de işe yarar. Demek ki polinom I üzerinde düzgün sürekli. Kare fonksiyonu için Örnek 36.2'de elle bulduğumuz $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, burada hesapsız garanti edilmiş oldu.

b) $(0, 1]$ kapalı değildir; Cantor teoremini doğrudan uygulayamayız. Hile şudur: fonksiyonu 0'a **genişletelim**. $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $F(0) = 0$ olsun. F , $(0, 1]$ 'de sürekli (sürekli fonksiyonların bileşkesi ve çarpımı; Teorem 33.3, Teorem 33.2). 0'da: $x \rightarrow 0$ iken $x \rightarrow 0$ ve $\sin \frac{1}{x}$ sınırlı olduğundan sınırlı çarpı sıfır teoremiyle (Teorem 30.3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = F(0)$. 0, $[0, 1]$ 'in bir yığılma noktası olduğundan limitte sürekliliğin denkliği (Önerme 33.1) F 'nin 0'da da sürekli olduğunu verir. Teorem 36.3 gereği F , $[0, 1]$ 'de düzgün sürekli; kısıtlaması olan f de $(0, 1]$ 'de düzgün sürekli. $\sin \frac{1}{x}$ için bu hile işlemez: 0'da limiti yoktur (Örnek 28.2), sürekli genişletilemez. Çarpan x , 0'a yaklaşıırken salınımların **genliğini** söndürür; sıklığı artsa da toplam değişim küçük kalır.

c) $\varepsilon > 0$ verilsin. f , $[-p, 2p]$ kapalı aralığında sürekli; Teorem 36.3 gereği öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $u, v \in [-p, 2p]$, $|u - v| < \delta_1$ iken $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$. $\delta = \min\{\delta_1, p\}$ alalım.

$x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$ olsun. $k = \lfloor \frac{x}{p} \rfloor$ tam sayısını alalım (Tanım 12.1); $k \leq \frac{x}{p} < k + 1$ olduğundan $u = x - kp \in [0, p)$. $v = y - kp$ diyelim; $|u - v| = |x - y| < \delta \leq p$ olduğundan $v \in (u - p, u + p) \subseteq (-p, 2p)$. Böylece $u, v \in [-p, 2p]$ ve $|u - v| < \delta_1$; dolayısıyla $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Son olarak $f(x) = f(u)$ ve $f(y) = f(v)$: periyodiklik $f(t + p) = f(t)$ eşitliğini verir; k üzerinden tümevarımla her $k \in \mathbb{N}$ için $f(t + kp) = f(t)$, ve t yerine $t - kp$ yazınca $f(t - kp) = f(t)$; yani her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(t + kp) = f(t)$. O hâlde $|f(x) - f(y)| = |f(u) - f(v)| < \varepsilon$. δ noktaya bağlı olmadığından f , $\mathbb{R}$ 'de düzgün sürekli. Örneğin $\sin$ ve $\cos$ için bu, Lipschitz hesabı yapmadan elde edilmiş ikinci bir ispattır.

■

36.6 Düzgün Süreklilik ve Cauchy Dizileri

Sürekli fonksiyonlar yakınsak dizileri yakınsak dizilere götürür (Teorem 33.1). Peki Cauchy dizilerini (Tanım 26.1) Cauchy dizilerine götürürler mi? $\mathbb{R}$ 'de her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan (Teorem 26.3) soru önemsiz görünebilir; ama dizinin limiti tanım kümesinin **dışında** olabilir ve o zaman süreklilik hiçbir şey söylemez. Düzgün süreklilik tam da bu boşluğu doldurur.

Önerme 36.2 (Düzgün Sürekli Fonksiyon Cauchy Dizilerini Korur). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli ve (x_n) , A içinde bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $(f(x_n))$ de bir Cauchy dizisidir.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün süreklilikten $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ alalım. (x_n) Cauchy olduğundan, tanımda δ 'yı kullanarak, $n, m \geq N$ iken $|x_n - x_m| < \delta$ olacak bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n, m için $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Demek ki $(f(x_n))$ Cauchy dizisidir.

■

Yalnızca süreklilik yetmez: $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0, 1)$ 'de süreklidir; $x_n = \frac{1}{n}$ dizisi $\mathbb{R}$ 'de yakınsak, dolayısıyla Cauchy'dir (Teorem 26.1); ama $f(x_n) = n$ dizisi sınırsız olduğundan Cauchy olamaz (Teorem 26.2). Dizinin limiti olan 0, tanım kümesinin dışındaki bir “deliktir” ve f o delikte patlar. Önermenin ilk sonucu, önceki bölümdeki sınırlılık teoreminin (Teorem 35.3) bir akrabasıdır: orada kapalılık gerekiyordu, burada onun yerini düzgün süreklilik alır.

Sonuç 36.3 (Sınırlı Kümede Düzgün Sürekli Fonksiyon Sınırlıdır). $A \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli ise f , A üzerinde sınırlıdır.

İspat.

f sınırsız olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n)| > n$ olan bir $x_n \in A$ seçelim. A sınırlı olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir; Teorem 24.5 gereği yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Yakınsak dizi Cauchy'dir (Teorem 26.1); Önerme 36.2 ile $(f(x_{n_k}))_k$ de Cauchy, dolayısıyla sınırlıdır (Teorem 26.2). Ama $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ (Önerme 24.1) olduğundan bu dizi sınırsızdır. Çelişki.

■

Sonuç, düzgün sürekli olmamayı göstermenin üçüncü bir yolunu verir: sınırlı bir kümede sınırsız olan sürekli fonksiyon düzgün sürekli değildir. $(0, 1)$ 'de $\frac{1}{x}$ için bu, en kısa ispattır. Elbette karşıtı doğru değildir: $\sin \frac{1}{x}$ sınırlıdır ama düzgün sürekli değildir.

36.6.1 Açık Aralıktan Kapalı Aralığa Genişleme

Örnek 36.6'nin (b) şıkkındaki hile — fonksiyonu uç noktalara sürekli biçimde genişletip Cantor teoremini uygulamak — genel bir ilkedir ve tersi de doğrudur: açık aralıkta düzgün süreklilik, uç noktalara sürekli genişletilebilmekle aynı şeydir.

Teorem 36.4 (Düzgün Süreklilik ve Sürekli Genişleme). $a < b$ reel sayılar ve $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. f , (a, b) üzerinde düzgün süreklidir.
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ tek yönlü limitleri (Tanım 31.1) reel sayı olarak vardır.
3. f 'nin $[a, b]$ 'ye sürekli bir genişlemesi (extension) vardır: her $x \in (a, b)$ için $F(x) = f(x)$ olan sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bulunur.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2) a noktasındaki sağ limiti ele alalım; b için ispat aynıdır. (a, b) içinde a 'ya yakınsayan diziler vardır: örneğin $x_n = a + \frac{b-a}{n+1}$ her n için (a, b) 'dedir ve $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ olduğundan (Örnek 20.1 ile Teorem 24.3) limit aritmetiğiyle (Teorem 21.1) $x_n \rightarrow a$ 'dır. Böyle herhangi bir (x_n) dizisi alalım. Yakınsak olduğundan Cauchy'dir (Teorem 26.1); Önerme 36.2 ile $(f(x_n))$ Cauchy'dir ve Cauchy ölçütü (Teorem 26.3) gereği bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar.

L 'nin diziden bağımsız olduğunu görelim. (y_n) , (a, b) içinde a 'ya yakınsayan başka bir dizi olsun. Limit aritmetiğiyle $x_n - y_n \rightarrow a - a = 0$; Sonuç 36.1 gereği $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ ve

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \rightarrow L - 0 = L.$$

Demek ki (a, b) içinde a 'ya yakınsayan her dizi için görüntü dizisi aynı L 'ye gider. Tek yönlü limit için dizisel ölçüt (Teorem 31.2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ verir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $F(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ve $x \in (a, b)$ için $F(x) = f(x)$ tanımlayalım. F 'nin $[a, b]$ 'de sürekli olduğunu gösterelim.

- $c \in (a, b)$ ise c 'nin bir komşuluğunda $F = f$ 'dir ve f , c 'de süreklidir; süreklilik yalnızca noktanın komşuluğundaki değerlere baktığından F de c 'de süreklidir. (Ayrıntı: f 'nin sürekliliğinden gelen δ 'yı gerekirse $\min\{c - a, b - c\}$ ile küçültürsek, $|x - c| < \delta$ olan her $x \in [a, b]$ zaten (a, b) 'de kalır ve orada $F(x) = f(x)$ 'tir.)
- $c = a$ için $\varepsilon > 0$ verilsin. Sağ limit tanımından öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in (a, b)$, $a < x < a + \delta$ iken $|f(x) - F(a)| < \varepsilon$; gerekirse küçülterek $\delta \leq b - a$ alabiliriz (küçük δ da aynı koşulu sağlar). Şimdi $x \in [a, b]$ ve $|x - a| < \delta$ olsun: $x = a$ ise $|F(x) - F(a)| = 0 < \varepsilon$; $x > a$ ise $a < x < a + \delta \leq b$, yani $x \in (a, b)$, $F(x) = f(x)$ ve $|F(x) - F(a)| = |f(x) - F(a)| < \varepsilon$. Bu, F 'nin a 'da sürekliliğidir (Tanım 33.1; tanım kümesi $[a, b]$ olduğundan a 'nın solundaki noktalar söz konusu değildir).
- $c = b$ için aynı akıl yürütme sol limitle yapılır.

(3) $\Rightarrow$ (1) F , $[a, b]$ 'de sürekli olsun. Teorem 36.3 gereği F düzgün süreklidir: $\varepsilon > 0$ için bir δ vardır. $x, y \in (a, b)$, $|x - y| < \delta$ ise $|f(x) - f(y)| = |F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Yani f , (a, b) 'de düzgün süreklidir.

Teorem, sınırlı bir açık aralıkta düzgün sürekliliği bir **limit hesabına** indirger: uç noktalarda tek yönlü limitler var mı? Bu, önceki örneklerin hepsini tek bakışta açıklar.

Örnek 36.7 (Genişleme Ölçütüyle Dört Fonksiyon). Aşağıdaki fonksiyonların $(0, 1)$ üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını Teorem 36.4 ile belirleyiniz.

- $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$
- $f_2(x) = x^2$
- $f_3(x) = \sin \frac{1}{x}$
- $f_4(x) = \frac{1}{x}$

Çözüm.

Dört fonksiyon da $(0, 1)$ 'de süreklidir (sürekliliğin bölünmesi ve bileşkesi; Teorem 33.2, Teorem 33.3). Uç noktalardaki tek yönlü limitlere bakalım.

a) 0^+ 'da: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Teorem 30.6). 1^- 'de: $1 \notin (0, 1)$ olduğundan $f_1(1)$ tanımlı değildir; ama $\frac{\sin x}{x}$ ifadesi 1 'i içeren bir aralıkta süreklidir (Teorem 33.2), dolayısıyla sol limit ifadenin 1 'deki değeridir: $\frac{\sin 1}{1} = \sin 1$. İki limit de vardır; f_1 düzgün süreklidir. Genişlemesi $F(0) = 1$, $F(1) = \sin 1$ ile verilir.

b) 0^+ 'da limit 0 , 1^- 'de 1 (polinom sürekli). Düzgün süreklidir — Örnek 36.2 (a) ile uyumlu.

c) 0^+ 'da limit yoktur: $\sin \frac{1}{x}$ 'in 0 'da sağ limitinin olmadığını Örnek 31.5'te göstermiştik (Örnek 28.2'deki diziler zaten pozitif terimlidir). Teoremin (2) koşulu bozulur; f_3 düzgün sürekli değildir — Örnek 36.5 (c) ile uyumlu.

d) 0^+ 'da $\frac{1}{x}$ sınırsızdır; reel sayı olan bir sağ limit yoktur (limiti olsaydı, 0 'ın bir sağ komşuluğunda sınırlı olurdu). f_4 düzgün sürekli değildir.

⚠ Ölçüt sınırlı aralıklar içindir

Teorem 36.4 sınırlı bir (a, b) aralığı içindir. $[0, \infty)$ ya da $\mathbb{R}$ gibi sınırsız kümelerde uç noktalara genişleme diye bir şey yoktur; orada düzgün sürekliliği doğrudan (Lipschitz koşulu, dizisel ölçüt ya da parçalara ayırma) incelemek gerekir. Örneğin $\sqrt{x}$, $[0, \infty)$ 'da düzgün süreklidir ama x^2 değildir; ikisinin de $+\infty$ 'da "limiti" $+\infty$ 'dur, bu bilgi ayırt edici değildir. Alıştırmaların (e) şıkında sonsuzda **sonlu** limiti olan fonksiyonlar için işe yarayan bir ölçüt göreceğiz.

36.7 Alıştırmalar

Alıştırma 36.1 (Düzgün Süreklilik Üzerine).

- $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu ε - δ ile doğrudan gösteriniz; $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

- b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağladığını, dolayısıyla düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.
- c) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli, $f(A) \subseteq B$ olsun. $g \circ f$ 'nin A üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz. A üzerinde düzgün sürekli iki fonksiyonun toplamının düzgün sürekli olduğunu gösteriniz. Çarpımın düzgün sürekli olmak zorunda olmadığını bir örnek veriniz.
- d) $h(x) = \sin(x^2)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.
- e) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ limiti reel sayı olarak var olsun. f 'nin $[0, \infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $x, y \in [-2, 2]$ için çarpanlara ayırma ve üçgen eşitsizliğiyle

$$|x^3 - y^3| = |x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq |x - y| (x^2 + |x| |y| + y^2) \leq |x - y| (4 + 4 + 4) = 12 |x - y|.$$

$\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$ alınırsa $|x - y| < \delta \Rightarrow |x^3 - y^3| < \varepsilon$. (Bu aynı zamanda $L = 12$ ile bir Lipschitz koşuldur; Teorem 36.1 de uygulanabilirdi. Cantor teoremi ise sonucu hesapsız verir.)

$\mathbb{R}'$ 'de: $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alalım; $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. $x_n, y_n > 0$ olduğundan

$$x_n^3 - y_n^3 = (x_n - y_n)(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) \geq \frac{1}{n} \cdot 3n^2 = 3n \geq 3.$$

$\varepsilon_0 = 3$ ile Teorem 36.2 gereği x^3 , $\mathbb{R}'$ 'de düzgün sürekli değildir.

b) Önce yardımcı bir eşitsizlik: her $t \in \mathbb{R}$ için $(|t| - 1)^2 \geq 0$ açılınca $2|t| \leq 1 + t^2$, yani $\frac{|t|}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$. Şimdi $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \frac{|y^2 - x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Üçgen eşitsizliğiyle $|x + y| \leq |x| + |y|$ ve paydadaki çarpanlar ≥ 1 olduğundan

$$\frac{|x + y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|y|}{1+y^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Demek ki $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$: g , $L = 1$ ile Lipschitz'dir ve Teorem 36.1 gereği $\mathbb{R}'$ 'de düzgün sürekli. (Grafiğin hiçbir kirişi 45° 'den dik değildir.)

c) *Bileşke.* $\varepsilon > 0$ verilsin. g düzgün sürekli olduğundan $|u - v| < \eta \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon$ olacak bir $\eta > 0$ vardır. f düzgün sürekli olduğundan bu η için $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $x, y \in A$, $|x - y| < \delta$ ise $u = f(x)$, $v = f(y) \in B$ için $|u - v| < \eta$, dolayısıyla $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. δ noktaya bağlı değildir.

Toplam. $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli olsun. $\varepsilon > 0$ için $\frac{\varepsilon}{2}$ 'ye karşılık gelen δ_1 (f için) ve δ_2 (g için) alalım; $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $|x - y| < \delta$ ise üçgen eşitsizliğiyle

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Çarpım. $f(x) = g(x) = x$ fonksiyonları $\mathbb{R}'$ 'de düzgün sürekli (Örnek 36.1), ama çarpımları x^2 değildir (Örnek 36.2). Tanım kümesi sınırlıysa durum farklıdır: sınırlı kümede düzgün sürekli fonksiyonlar sınırlıdır (Sonuç 36.3) ve her x, y için şu eşitsizlik geçerlidir:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)|$$

Sağ taraftaki $|f(x)|$ ve $|g(y)|$ çarpanları sınırlı, farklar ise istendiği kadar küçük yapılabildiğinden çarpım da düzgün sürekli olur.

d) $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{2n\pi}$ alalım. Kare farkından

$$0 < x_n - y_n = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{\pi/2}{x_n + y_n} < \frac{\pi/2}{2\sqrt{2n\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ olduğundan (Teorem 21.5 ile $\sqrt{1/n} \rightarrow 0$) sıkıştırma ile $x_n - y_n \rightarrow 0$. Öte yandan $h(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ ve $h(y_n) = \sin(2n\pi) = 0$; $|h(x_n) - h(y_n)| = 1$. Teorem 36.2 gereği h , $\mathbb{R}'$ 'de

düzgün sürekli değildir. Fonksiyon sınırlı ve her yerde sürekli; sorun, x büyüdükçe salınımların sıklaşmasıdır — $\sin \frac{1}{x}$ 'in 0 civarındaki davranışının sonsuzdaki karşılığı.

e) $\varepsilon > 0$ verilsin. Sonsuzdaki limit tanımından (Tanım 32.2) öyle bir $K > 0$ vardır ki $x > K$ için $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. f , $[0, K + 1]$ kapalı aralığında sürekli; Teorem 36.3 gereği $u, v \in [0, K + 1]$, $|u - v| < \delta_1$ iken $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ olacak bir $\delta_1 > 0$ vardır. $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$ alalım ve $x, y \in [0, \infty)$, $|x - y| < \delta$ olsun.

- İkisi de $[0, K + 1]$ 'de ise $|x - y| < \delta_1$ ve $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Biri, diyelim $x, K + 1$ 'den büyükse $y > x - 1 > K$ olur; ikisi de K 'yi geçer ve

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Her durumda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$; δ noktaya bağlı değildir. f düzgün sürekli. Örneğin $\frac{1}{1+x^2}$ ($L = 0$) ve $\frac{x}{1+x}$ ($L = 1$) bu ölçütle $[0, \infty)$ 'da düzgün sürekli.

■

36.8 Analiz 1'in Sonu

Bu bölümle Analiz 1 notları tamamlanıyor. Geriye dönüp bakınca tek bir iplik görünür. Mantık ve küme diliyle başladık; reel sayıları cebirsel, sıralama ve **tamlık** aksiyomlarıyla kurduk. Tamlık, önce supremum ve iç içe aralıklar biçiminde, sonra Bolzano–Weierstrass ve Cauchy ölçütü biçiminde karşımıza çıktı ve reel doğrunun topolojisini — açık ve kapalı kümeler, yığılma noktaları, kompaktlık — şekillendirdi. Dizilerin limiti bu yapının üzerine kuruldu; fonksiyonların limiti ve sürekliliği dizilere indirgendi. Son üç bölümde ise süreklilik, bir aralığın tamamı üzerinde ne anlama geliyor sorusuna yanıt verdik: ara değer teoremi, Weierstrass ekstremum teoremi ve Cantor teoremi. Üçünün de ispatı aynı kaynağa, Bolzano–Weierstrass teoremi aracılığıyla tamlığa dayanır.

Analiz 2 bu noktadan devam eder. **Türev**, limit kavramının fonksiyonun bir noktadaki değişim hızına uygulanmasıdır; Rolle ve ortalama değer teoremleri, Weierstrass teoreminin doğrudan sonuçlarıdır. **Riemann integrali** ise kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar için tam olarak Cantor teoremi sayesinde var olur: düzgün süreklilik, alt ve üst toplamaların birbirine istenildiği kadar yaklaştırılabileceğini garanti eder. Bu bölümde kurduğumuz “tek bir δ ” fikri, orada ilk büyük meyvesini verecektir.

Bu bölümle Analiz 1 tamamlanmış olur; sıradaki ders [Analiz 2](#)'dir. Dersin bütün başlıkları için [müfredat sayfasına](#), dört Analiz dersinin listesi için [Analiz sayfasına](#) bakabilirsiniz.

37. Kümeler, Fonksiyonlar ve Reel Sayılar Üzerine Problemler

Bu bölümdeki problemler, kitabın ilk üç kısmında kurduğumuz araçları bir arada çalıştırır: supremum ve infimumun tanımı ile epsilon ölçütü, tümevarım ilkesi, rasyonel–irrasyonel ayrımı ve bir fonksiyonun görüntü/ters görüntü işlemleri. Hepsi standart alıştırmalardır; amaç yeni bir teori kurmak değil, elimizdeki tanımları doğru ve eksiksiz kullanmayı alışkanlık hâline getirmektir.

Çözümleri okumadan önce her problemi kendi başınıza denemenizi öneririz. Çözümlerde her adımın hangi tanıma ya da teoreme dayandığı açıkça belirtilmiştir; “kolayca görülür” türü atlamalar yoktur, çünkü bu düzeydeki bir ispatın değeri tam olarak o atlanan adımlarda saklıdır. Kullanılan sonuçların kitaptaki yerlerine bağlantı verilmiştir; bir adım karanlık kaldığında önce o kutuya dönmek en hızlı yoldur.

37.1 Supremum ve İnfimum

İlk problem, iki kümenin birleşiminin infimumunun kümelerin kendi infimimleri cinsinden nasıl yazıldığını soruyor. İspat önce $\min\{\inf A, \inf B\}$ sayısının birleşim için bir alt sınır olduğunu gösterir, sonra iki yönlü eşitsizlikle bu sayının infimuma eşit olduğunu kurar; her iki adımda da infimumun (I1) ve (I2) koşulları (Tanım 10.4) kullanılır.

Alıştırma 37.1 (Birleşimin İnfimumu). $A, B \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan ve alttan sınırlı iki küme olsun.

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Sayıların var olduğunu görelim. A ve B boş olmayan ve alttan sınırlı kümeler olduğundan Teorem 10.3 gereği $\alpha = \inf A$ ve $\beta = \inf B$ sayıları vardır. İki reel sayının küçüğü Tanım 7.4 ile tanımlıdır; $m = \min\{\alpha, \beta\}$ yazalım. Tanımı gereği

$$m \leq \alpha \quad \text{ve} \quad m \leq \beta.$$

Adım 1: $m, A \cup B$ kümesinin bir alt sınırıdır. $x \in A \cup B$ keyfi olsun. Birleşimin tanımı gereği $x \in A$ ya da $x \in B$ 'dir.

- $x \in A$ ise (I1) gereği $\alpha \leq x$ olur; $m \leq \alpha$ ile birleştirince $m \leq x$.
- $x \in B$ ise aynı biçimde $\beta \leq x$ ve $m \leq \beta$ olduğundan $m \leq x$.

Her iki durumda da $m \leq x$ elde edildi. Demek ki $m, A \cup B$ için bir alt sınırdır (Tanım 10.1).

Adım 2: $\inf(A \cup B)$ vardır ve $m \leq \inf(A \cup B)$. $A \neq \emptyset$ olduğundan $A \cup B \neq \emptyset$ 'dir; Adım 1'e göre bu küme alttan sınırlıdır. O hâlde Teorem 10.3 gereği $t = \inf(A \cup B)$ vardır. m bir alt sınır ve t alt sınırların en büyüğü olduğundan (I2) ile

$$m \leq t.$$

Adım 3: $t \leq m$. $t, A \cup B$ kümesinin bir alt sınırıdır. $A \subseteq A \cup B$ olduğundan t , özel olarak A 'nın da bir alt sınırıdır; α ise A 'nın alt sınırlarının en büyüğüdür, dolayısıyla (I2) gereği $t \leq \alpha$. Aynı gerekçeyle $B \subseteq A \cup B$ olduğundan $t \leq \beta$. İki sayıdan da küçük ya da eşit olan bir sayı, onların küçüğünden de küçük ya da eşittir:

$$t \leq \min\{\alpha, \beta\} = m.$$

Sonuç. Adım 2 ve Adım 3'ten $m \leq t$ ve $t \leq m$ olur; üçlem yasası (O1, Bölüm 7.1) gereği $t = m$, yani

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

A ve B boş olmayan ve **üstten sınırlı** kümeler ise aynı ispat $-A$ ve $-B$ kümelerine uygulanır; $(-A) \cup (-B) = -(A \cup B)$ eşitliği ile Teorem 10.3'teki $\inf A = -\sup(-A)$ bağıntısı birlikte ispatın ayna görüntüsünü verir:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Buna karşılık **kesişim** için benzer bir formül yoktur: $A = [0, 1]$ ve $B = [2, 3]$ alındığında $A \cap B = \emptyset$ olur ve boş kümenin infimumundan söz edilemez.

■

37.2 Tümevarım

Sıradaki problem, ilk n doğal sayının karelerinin toplamı için kapalı bir formül veriyor. Formül zaten verildiğine göre iş, onu bulmak değil, **her** n için doğru olduğunu tümevarım ilkesiyle (Teorem 9.1) kanıtlamaktır.

Alıştırma 37.2 (Kareler Toplamının Formülü). Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

Çözüm.

$n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi, yukarıdaki eşitlik olsun. Tümevarımın iki adımını denetleyeceğiz.

Başlangıç adımı ($n = 1$). Sol taraf $1^2 = 1$ 'dir. Sağ taraf ise

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

İki taraf eşit olduğundan $P(1)$ doğrudur.

Tümevarım adımı. $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ 'nin doğru olduğunu varsayalım (tümevarım hipotezi); $P(n+1)$ 'i göstereceğiz. Toplamın son terimini ayırıp hipotezi uygulayalım:

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Sağ tarafı ortak paydada toplayıp $(n+1)$ çarpanını dışarı alalım:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1) [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1) (2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Köşeli parantez içindeki ikinci dereceden ifadeyi çarpanlarına ayıralım. Doğrudan çarpma ile denetlenir:

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Böylece

$$1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Bu, formülde n yerine $n+1$ yazınca elde edilen ifadenin ta kendisidir; gerçekten

$$\frac{(n+1) ((n+1)+1) (2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Demek ki $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Sonuç. Başlangıç adımı ve tümevarım adımı sağlandığından **Teorem 9.1** gereği $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Formülün bir tutarlılık denetimi olarak $n = 3$ 'ü deneyelim: sol taraf $1 + 4 + 9 = 14$, sağ taraf $\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$.

■

37.3 Supremum, İnfimum, Maksimum ve Minimum Hesapları

Aşağıdaki iki problemde somut kümelerin uç değerleri isteniyor. Yöntem her ikisinde de aynıdır: önce bir aday sayı belirlenir, sonra o sayının üst (ya da alt) sınır olduğu gösterilir ve son olarak ondan daha iyi bir sınır bulunmadığı kanıtlanır. Aday sayı kümenin elemanıysa iş kısadır: **Önerme 10.3** gereği maksimum varsa supremumla çakışır.

Alıştırma 37.3 (Değişen İşaretle Bir Terimler Kümesi). Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin supremumunu, infimumunu, varsa maksimumunu ve minimumunu bulunuz.

Çözüm.

Kümeyi tanıyalım. İlk terimler şunlardır:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad a_5 = -\frac{6}{5}.$$

Demek ki n çift iken $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 0$, n tek iken $a_n = -(1 + \frac{1}{n}) < 0$ 'dır. Bu ayrımı ispat boyunca kullanacağız.

Supremum ve maksimum. İddia: $\max A = \sup A = \frac{3}{2}$.

Önce $\frac{3}{2}$ bir üst sınırdır. $n \in \mathbb{N}$ keyfi olsun.

- n çift ise $n \geq 2$ olduğundan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

- n tek ise $a_n < 0 < \frac{3}{2}$.

Her iki durumda da $a_n \leq \frac{3}{2}$; yani $\frac{3}{2}$, A 'nın bir üst sınırıdır.

Sonra bu sayı kümenin elemanıdır: $n = 2$ için $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in A$.

Kümenin bir elemanı aynı zamanda üst sınırysa o eleman maksimumdur (**Tanım 10.3**); dolayısıyla $\max A = \frac{3}{2}$ ve **Önerme 10.3** gereği $\sup A = \frac{3}{2}$.

İnfimum ve minimum. İddia: $\min A = \inf A = -2$.

Alt sınır olduğu. $n \in \mathbb{N}$ keyfi olsun.

- n tek ise $n \geq 1$ olduğundan $\frac{1}{n} \leq 1$, yani $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ ve her iki yanı -1 ile çarpıp yönü çevirince

$$a_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq -2.$$

- n çift ise $a_n > 0 > -2$.

Demek ki her n için $-2 \leq a_n$; yani -2 bir alt sınırdır.

Kümenin elemanı olduğu. $n = 1$ için $a_1 = -(1 + 1) = -2 \in A$.

Öyleyse $\min A = -2$ ve **Önerme 10.3** gereği $\inf A = -2$.

Sonuç.

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}, \quad \inf A = \min A = -2.$$

Dördü de vardır; çünkü uç değerler kümeye aittir. Bu kümenin ilginç yanı şudur: maksimum ve minimum bulunmasına karşın elemanlar 1 ve -1 sayılarının çevresinde yığılır. Gerçekten 1 ve -1 , A 'nın yığılma noktalarıdır (Tanım 17.1) ama A 'ya ait değildir: n çift iken $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$, n tek iken $a_n < 0$ olduğundan hiçbir n için $a_n = 1$ olamaz. Benzer biçimde n tek iken $1 + \frac{1}{n} > 1$ olduğundan $a_n < -1$ olur, n çift iken ise $a_n > 0$ 'dır; dolayısıyla $-1 \notin A$. Yığılma noktası ile uç değerlerin birbirinden bağımsız kavramlar olduğunu gösteren tipik bir örnektir.

■

Alıştırma 37.4 (Karesi İki İden Küçük Olan Sayılar).

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

kümesinin supremumunu, infimumunu, varsa maksimumunu ve minimumunu bulunuz.

Çözüm.

Kümeyi aralık olarak yazalım. Teorem 13.1 gereği $\sqrt{2} > 0$ sayısı vardır ve $(\sqrt{2})^2 = 2$ 'dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$$

olduğunu gösterelim.

($\Rightarrow$) $x^2 < 2$ olsun. $|x|^2 = x^2$ olduğundan

$$(\sqrt{2} - |x|)(\sqrt{2} + |x|) = 2 - x^2 > 0.$$

İkinci çarpan $\sqrt{2} + |x| > 0$ olduğundan, çarpımın pozitif olması ilk çarpanın da pozitif olmasını gerektirir: $\sqrt{2} - |x| > 0$, yani $|x| < \sqrt{2}$.

($\Leftarrow$) $|x| < \sqrt{2}$ olsun. Eşitsizliğin iki yanını önce $|x| \geq 0$ ile, sonra $\sqrt{2} > 0$ ile çarpalım:

$$|x|^2 \leq |x| \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

(İlk adımda $|x| = 0$ olabileceği için eşitsizlik geniştir.) Böylece $x^2 = |x|^2 < 2$.

Demek ki $B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ açık aralıktır. Özel olarak $0 \in B$, yani $B \neq \emptyset$.

Supremum. İddia: $\sup B = \sqrt{2}$. Tanım 10.4'un iki koşulunu denetleyelim.

(S1) $x \in B$ olsun. Yukarıdaki denklitten $|x| < \sqrt{2}$; ayrıca her sayı mutlak değerini aşamaz, yani $x \leq |x| < \sqrt{2}$. Demek ki $\sqrt{2}$ bir üst sınırdır.

(S2) $M < \sqrt{2}$ olan hiçbir M 'nin üst sınır olamayacağını gösterelim; yani $M < t$ olan bir $t \in B$ bulacağız.

• $M < 0$ ise $t = 0$ alalım: $0 \in B$ ve $M < 0$.

• $0 \leq M < \sqrt{2}$ ise Önerme 7.11 gereği

$$M < t < \sqrt{2}, \quad t = \frac{M + \sqrt{2}}{2}$$

olur. Burada $t > M \geq 0$ olduğundan $|t| = t < \sqrt{2}$, yani $t \in B$ 'dir.

Her iki durumda da M , B 'nin bir üst sınırı değildir. (S1) ve (S2) birlikte $\sup B = \sqrt{2}$ verir.

İnfimum. $x \in B \Leftrightarrow -x \in B$ olduğuna dikkat edelim; çünkü $(-x)^2 = x^2$ 'dir. Bu, $-B = B$ demektir.

Teorem 10.3'taki bağıntıyı kullanalım:

$$\inf B = -\sup(-B) = -\sup B = -\sqrt{2}.$$

Maksimum ve minimum. $(\sqrt{2})^2 = 2$ olduğundan $\sqrt{2}$ sayısı $x^2 < 2$ koşulunu sağlamaz, yani $\sqrt{2} \notin B$. $\max B$ var olsaydı Önerme 10.3 gereği $\max B = \sup B = \sqrt{2}$ olur ve maksimum kümenin elemanı olduğundan $\sqrt{2} \in B$ çıkardı — çelişki. Demek ki B 'nin maksimumu **yoktur**. Aynı gerekçeyle $-\sqrt{2} \notin B$ olduğundan minimumu da yoktur.

Sonuç.

$$\sup B = \sqrt{2}, \quad \inf B = -\sqrt{2};$$

maksimum ve minimum yoktur. Bu küme, supremumun maksimuma göre üstünlüğünü gösteren temel örnektir: uç değer kümeye ait olmasa bile supremum vardır. Üstelik B 'nin uç noktaları irrasyoneldir; aynı kümeye $\mathbb{Q}$ içinde bakılsaydı rasyonel bir supremum bulunamazdı (Sonuç 13.1).

■

37.4 İrrasyonel Sayılar

Aşağıdaki problem, irrasyonel bir sayının sıfırdan farklı rasyonel katlarının yine irrasyonel olduğunu söylüyor. İspatın anahtarı, $\mathbb{Q}$ 'nun dört işlem altında kapalı olması (Önerme 11.6) ve bir sayının ya rasyonel ya irrasyonel olmasıdır (Tanım 13.1).

Alıştırma 37.5 (Rasyonel Katlar İrrasyonelliği Bozmaz). $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ ve x irrasyonel bir sayı olsun. xr çarpımının da irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. xr sayısının irrasyonel **olmadığını** varsayalım. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{I}$ kümeleri $\mathbb{R}$ 'yi ayırık iki parçaya böldüğünden (Tanım 13.1) bu varsayım

$$xr = q \in \mathbb{Q}$$

olacak bir q rasyonel sayısının bulunması demektir.

$r \neq 0$ olduğundan r 'nin çarpma işlemine göre tersi r^{-1} vardır; üstelik sıfırdan farklı bir rasyonel sayının tersi yine rasyoneldir (Önerme 11.6). Eşitliğin iki yanını r^{-1} ile çarpalım:

$$(xr) r^{-1} = q r^{-1}.$$

Sol tarafta çarpmanın birleşme özelliğini kullanalım:

$$(xr) r^{-1} = x (rr^{-1}) = x \cdot 1 = x.$$

Böylece $x = q r^{-1}$ elde edilir. Sağ taraf iki rasyonel sayının çarpımıdır; $\mathbb{Q}$ çarpma altında kapalı olduğundan (Önerme 11.6) $x \in \mathbb{Q}$ çıkar. Bu ise x 'in irrasyonel olmasıyla çelişir.

Varsayımımız çelişkiye götürdüğüne göre yanlıştır: $xr \notin \mathbb{Q}$, yani xr irrasyoneldir.

$r \neq 0$ koşulu neden şart? $r = 0$ alınırsa $xr = 0$ olur ve 0 rasyoneldir; yani koşul kaldırılırsa iddia yanlışa döner. Aynı sonuç kitapta Önerme 13.3 (2) olarak da kayıtlıdır; aynı önermenin (1) maddesinde ise rasyonel bir sayı ile irrasyonel bir sayının **toplamının** irrasyonel olduğu gösterilir. Buna karşılık iki irrasyonelin çarpımı için böyle bir kural yoktur: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ rasyoneldir.

■

37.5 Epsilon Diliyle Eşitlik

Analizde en sık kullanılan küçük araçlardan biri şudur: bir sayı, her pozitif ε 'dan küçükse ve negatif değilse sıfırdır. Aşağıdaki problem bunun yaygın bir biçimidir; limit ispatlarında iki sayının eşit olduğunu göstermek için hemen her zaman bu kalıp kullanılır.

Alıştırma 37.6 (Her Epsilon İçin Geçerli Bir Eşitsizlik). $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $a \leq b$ olduğu ve her $\varepsilon > 0$ için

$$a + \varepsilon > b$$

eşitsizliğinin sağlandığı biliniyor. $a = b$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Hipotezi elverişli bir biçime sokalım. Her $\varepsilon > 0$ için $a + \varepsilon > b$ olması, eşitsizliğin iki yanından a çıkarılınca

$$b - a < \varepsilon \quad (\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için})$$

demektir. Ayrıca $a \leq b$ hipotezinden $b - a \geq 0$ 'dır. $d = b - a$ yazalım; elimizde $d \geq 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $d < \varepsilon$ var. $d = 0$ olduğunu göstereceğiz.

Olmayana ergi. $d \neq 0$ olsun. $d \geq 0$ ile birlikte bu, $d > 0$ demektir. O hâlde $\varepsilon = d$ seçimi **meşrudur**, çünkü hipotez her pozitif ε için geçerlidir. Bu seçimle

$$d < \varepsilon = d,$$

yani $d < d$ elde edilir. Oysa üçlem yasası (O1, Bölüm 7.1) gereği hiçbir sayı kendisinden küçük olamaz. Çelişki.

Demek ki $d = 0$, yani $b - a = 0$ ve

$$a = b.$$

İkinci bir yol (Arşimet özelliği). $d > 0$ olsaydı [Sonuç 12.2](#) gereği $\frac{1}{n} < d$ olacak bir $n \in \mathbb{N}$ bulunurdu. Öte yandan hipotezi $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ile uygulayınca $d < \frac{1}{n}$ çıkar. İki eşitsizlik birlikte $d < d$ verir; yine çelişki. Bu ikinci yol, ε 'u doğrudan d seçmenin mümkün olmadığı durumlarda (örneğin ε yalnızca $\frac{1}{n}$ biçiminde alınabiliyorsa) işe yarar.

Kalıbın genel hâli. Aynı akıl yürütme şunu verir: her $\varepsilon > 0$ için $a \leq b + \varepsilon$ ise $a \leq b$ 'dir. Limitlerin tekliğini ve limitlerde sıralamanın korunduğunu gösterirken tam olarak bu kalıbı kullanacağız.

■

37.6 Görüntü ve Ters Görüntü

Son iki problem, bir kümenin görüntüsünün ters görüntüsünü konu alıyor. Her fonksiyon için tek yönlü bir kapsama geçerlidir; kapsamanın eşitliğe dönüşmesi için fonksiyonun birebir olması gerekir. Çözümlerde yalnızca iki tanım kullanılacak ([Tanım 5.2](#)): $y \in f(A)$ demek " $y = f(a)$ olan bir $a \in A$ vardır" demek, $x \in f^{-1}(B)$ demek ise " $f(x) \in B$ " demektir.

Alıştırma 37.7 (Bir Küme Görüntüsünün Ters Görüntüsünün İçindedir). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun.

$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Kapsama göstermek için A 'nın keyfi bir elemanını alıp sağdaki kümeye ait olduğunu göstermek yeterlidir.

$a \in A$ keyfi olsun.

Adım 1. Görüntünün tanımı gereği ([Tanım 5.2](#)), $f(A)$ kümesi A 'nın elemanlarının görüntülerinden oluşur. $a \in A$ olduğundan

$$f(a) \in f(A).$$

Adım 2. Ters görüntünün tanımı gereği, bir $x \in X$ elemanı için

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

geçerlidir. Bunu $B = f(A)$ ve $x = a$ için yazalım: Adım 1'de $f(a) \in f(A)$ bulmuştuk, dolayısıyla

$$a \in f^{-1}(f(A)).$$

$a \in A$ keyfi seçildiğinden A 'nın her elemanı $f^{-1}(f(A))$ kümesindedir; yani $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Kapsama gerçekten kesin olabilir. Eşitlik her zaman doğru değildir. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve $A = [0, 1]$ alalım. O zaman $f(A) = [0, 1]$ ve

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x : 0 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1].$$

Demek ki $A = [0, 1] \subsetneq [-1, 1] = f^{-1}(f(A))$ olur; aynı hesap [Örnek 5.4](#) kutusunun (b) şıkında da yapılmıştır. Fazladan gelen elemanlar, A 'daki bir elemanla **aynı görüntüye** sahip olan ama A 'da

bulunmayan noktalardır — burada x ile $-x$ çiftleri. Bir sonraki problem, bu bozulmanın tek sorumlusunun birebir olmamak olduğunu gösteriyor.

■

Alıştırma 37.8 (Birebir Fonksiyonlarda Eşitlik). $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. f birebir ise

$$f^{-1} (f(A)) = A$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Küme eşitliği iki kapsama ile gösterilir.

($\supseteq$) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Bu kapsama her fonksiyon için doğrudur; [Alıştırma 37.7](#)'da ispatlandı (kitapta [Teorem 5.1](#) (11) olarak da yer alır). Birebirlik burada kullanılmaz.

($\subseteq$) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. $x \in f^{-1}(f(A))$ keyfi olsun. Ters görüntünün tanımı gereği bu,

$$f(x) \in f(A)$$

demektir. Görüntünün tanımı gereği ise $f(x) = f(a)$ olacak biçimde bir $a \in A$ vardır. Şimdi f 'nin birebir olduğunu kullanalım: birebir bir fonksiyonda aynı değeri alan iki nokta eşittir ([Tanım 5.7](#)), yani

$$f(x) = f(a) \Rightarrow x = a.$$

$a \in A$ olduğundan $x = a \in A$ bulunur. Demek ki $f^{-1}(f(A))$ kümesinin her elemanı A 'dadır.

İki kapsamadan $f^{-1}(f(A)) = A$ çıkar. Bu, [Teorem 5.3](#) (3) maddesidir.

Birebirlik gerçekten gerekli mi? Evet; üstelik koşul yalnızca yeterli değil, aynı zamanda gereklidir. Her $A \subseteq X$ için $f^{-1}(f(A)) = A$ olduğunu varsayalım ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. $A = \{x_1\}$ seçelim. O zaman $f(x_2) = f(x_1) \in f(\{x_1\})$ olduğundan $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$, yani $x_2 = x_1$. Demek ki f birebirdir. Kısacası “ $f^{-1}(f(A)) = A$ eşitliği her A için geçerlidir” demek ile “ f birebirdir” demek aynı kapıya çıkar.

■

38. Diziler, Limit ve Süreklilik Üzerine Problemler

Bu bölümdeki problemler kitabın ikinci yarısının belkemiğini yoklar: dizilerin yakınsaklığı, fonksiyon limiti ve süreklilik. Sorular bilerek iç içe geçirilmiştir; örneğin özyineli bir dizinin limitini bulurken monoton yakınsaklık teoremini kullanırız, bir limitin var olmadığını gösterirken dizisel ölçüte başvururuz, bir denklemin çözümünün varlığını ise ara değer teoremiyle kurarız. Böylece “hangi teorem nerede işe yarar?” sorusu, tanımları tekrar etmek yerine kullanımda öğrenilir.

Her problem kendi kutusundadır ve çözümü kutunun içinde katlanmış olarak durur. Okuma biçimi şöyledir: önce soruyu görürsünüz, kâğıt üzerinde kendiniz denersiniz, ancak ondan sonra çözümü açarsınız. Çözümlerde kullanılan her teorem ve tanım, kitabın ilgili kutusuna bağlanmıştır; takıldığınız adımda o bağlantıyı izleyip geri dönmeniz yeterlidir. Doğru–yanlış tipi problemlerde yalnızca karar vermek yetmez: iddia doğruysa tam bir ispat, yanlışsa işleyen bir karşı örnek ve karşı örneğin hangi varsayımı çökerttiğinin açıklaması beklenir.

38.1 Özyineli Bir Dizinin Yakınsaklığı

Özyineli dizilerde limit hesabının standart yolu iki aşamalıdır: önce limitin **var olduğu** gösterilir (çoğu zaman monotonluk ve sınırlılık üzerinden), sonra özyineleme bağıntısında limite geçilerek limitin **değeri** bulunur. İki aşamanın sırası önemlidir; varlık kurulmadan bağıntıda limite geçmek geçersiz bir hesaptır.

Alıştırma 38.1 (Karekök Özyinelemesinin Limiti). $x_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin (Tanım 19.2) yakınsak olup olmadığını belirleyiniz; yakınsaksa limitini bulunuz.

Çözüm.

Adım 1: Terimler 0 ile 2 arasındadır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < x_n < 2$ olduğunu tümevarımla (Teorem 9.1) göstereyim. $n = 1$ için $0 < 1 < 2$ doğrudur. $0 < x_n < 2$ olsun. Her yana 2 eklersek

$$2 < 2 + x_n < 4$$

olur; karekök artan olduğundan $\sqrt{2} < x_{n+1} < 2$ elde edilir. Özel olarak $0 < x_{n+1} < 2$ 'dir. Böylece iddia her n için doğrudur. Bu adım aynı zamanda karekökün içinin hep pozitif kaldığını, yani dizinin gerçekten tanımlı olduğunu da gösterir.

Adım 2: Dizi artandır. $0 < x_n < 2$ olduğunu biliyoruz. Çarpanlara ayıralım:

$$(2 + x_n) - x_n^2 = -(x_n^2 - x_n - 2) = -(x_n - 2)(x_n + 1).$$

Burada $x_n - 2 < 0$ ve $x_n + 1 > 0$ olduğundan çarpım negatiftir, dolayısıyla eksisi pozitiftir:

$$x_n^2 < 2 + x_n.$$

İki taraf da negatif olmadığından karekök alma sıralamayı korur ve

$$x_n = \sqrt{x_n^2} < \sqrt{2 + x_n} = x_{n+1}$$

bulunur. Yani (x_n) kesin artandır (Tanım 19.4).

Adım 3: Yakınsaklık. (x_n) artan ve üstten 2 ile sınırlıdır; Teorem 23.1 gereği yakınsaktır. Limite L diyelim. Aynı teorem $L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olduğunu söyler; buradan $1 = x_1 \leq L \leq 2$ çıkar.

Adım 4: Limitin değeri. Özyineleme bağıntısının iki yanında $n \rightarrow \infty$ yapalım. Sol yanda (x_{n+1}) dizisi vardır ve [Sonuç 24.4](#) gereği onun limiti de L 'dir. Sağ yanda ise $2 + x_n \rightarrow 2 + L$ ([Teorem 21.1](#)) ve terimler negatif olmadığından [Teorem 21.5](#) gereği

$$\sqrt{2 + x_n} \rightarrow \sqrt{2 + L}.$$

Limitin tekliği ([Teorem 20.1](#)) iki sonucu eşitler:

$$L = \sqrt{2 + L}.$$

$L \geq 1 > 0$ olduğundan iki yanın karesini alabiliriz: $L^2 = 2 + L$, yani

$$L^2 - L - 2 = (L - 2)(L + 1) = 0.$$

Kökler $L = 2$ ve $L = -1$ 'dir. $L \geq 1$ olduğundan $L = -1$ elenir. Sonuç:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

Uyarı. Adım 3 atlanıp doğrudan " $L = \sqrt{2 + L}$, öyleyse $L = 2$ " denseydi hesap eksik olurdu: bu denklem yalnızca limit **varsa** hangi değeri alabileceğini söyler. Örneğin $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 2y_n$ dizisinde aynı yöntem $L = 2L$, yani $L = 0$ verirdi; oysa bu dizi ıraksaktır.

■

38.2 Doğru mu, Yanlış mı?

Aşağıdaki dört iddianın her biri, sık yapılan bir hatanın tam üstüne oturur. Doğru olanlarda ispatın hangi hipotezi nerede kullandığına, yanlış olanlarda ise karşı örneğin hangi varsayımı çöktüğüne dikkat ediniz.

Alıştırma 38.2 (Çarpımı Yakınsak Olan Diziler). Aşağıdaki iddianın doğru mu yanlış mı olduğuna karar veriniz. Doğruysa ispatlayınız, yanlışsa bir karşı örnek veriniz.

İddia. $(a_n b_n)$ ve (a_n) dizileri yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ise (b_n) dizisi de yakınsaktır.

Çözüm.

İddia **yanlıştır**.

Karşı örnek. $a_n = \frac{1}{n}$ ve $b_n = (-1)^n$ alalım.

- Her n için $a_n > 0$ 'dır ve (a_n) yakınsaktır: $\lim a_n = 0$.
- (b_n) sınırlıdır ($|b_n| = 1$). [Teorem 21.2](#) gereği çarpım dizisi yakınsaktır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

- Buna karşın (b_n) ıraksaktır: çift indisli alt dizisi sabit 1, tek indisli alt dizisi sabit -1 dizisidir; iki alt dizinin limitleri farklı olduğundan [Sonuç 24.3](#) gereği (b_n) yakınsamaz.

Böylece hipotezler sağlandığı hâlde sonuç bozulur.

Karşı örnek neden işliyor? $b_n = \frac{a_n b_n}{a_n}$ yazmak her n için geçerlidir, çünkü $a_n > 0$ paydayı sıfırdan farklı yapar. Ama bölme kuralının limit sürümü ([Teorem 21.1](#)) paydanın **limitinin** sıfırdan farklı olmasını ister; $a_n > 0$ koşulu yalnızca terimlerin pozitifliğini verir, limitin pozitifliğini vermez. Yukarıdaki örnekte $\lim a_n = 0$ 'dır ve kural uygulanamaz.

İddianın doğru sürümü. $\lim a_n = a \neq 0$ ise iddia doğrudur: $\lim a_n b_n = c$ diyelim; paydanın limiti sıfırdan farklı olduğundan [Teorem 21.1](#) gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{c}{a}.$$

■

Alıştırma 38.3 (Sürekli Fonksiyon Altında Sınırlı Kümenin Görüntüsü). Aşağıdaki iddianın doğru mu yanlış mı olduğuna karar veriniz. Doğruysa ispatlayınız, yanlışsa bir karşı örnek veriniz.

İddia. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $A \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı bir küme ise $f(A)$ kümesi sınırlıdır.

Çözüm.

İddia **doğrudur**.

$A = \emptyset$ ise $f(A) = \emptyset$ zaten sınırlıdır; bu yüzden $A \neq \emptyset$ varsayalım.

Adım 1: A 'yı kapalı bir aralığa hapsedelim. A sınırlı olduğundan (Tanım 10.2) öyle bir $M > 0$ vardır ki her $x \in A$ için $|x| \leq M$, yani

$$A \subseteq [-M, M].$$

Adım 2: Kapalı aralıkta sınırlılık. f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan $[-M, M]$ aralığına kısıtlanması da sürekli: süreklilik tanımındaki ε - δ koşulu daha küçük bir tanım kümesinde daha az sayıda x için istenir. O hâlde Teorem 35.3 uygulanabilir: öyle bir $K > 0$ vardır ki

$$x \in [-M, M] \implies |f(x)| \leq K.$$

Adım 3: Sonuç. $y \in f(A)$ olsun. Tanımı gereği $y = f(x)$ olan bir $x \in A$ vardır; Adım 1'den $x \in [-M, M]$ ve Adım 2'den $|y| = |f(x)| \leq K$ 'dir. Demek ki K sayısı $f(A)$ için bir sınırdır ve $f(A)$ sınırlıdır.

Hangi hipotez taşıyor? Sürekliliğin bütün $\mathbb{R}$ üzerinde istenmesi. f yalnızca A üzerinde sürekli olsaydı iddia çökerdi: $A = (0, 1)$ sınırlıdır ve $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu A üzerinde sürekli, ama

$$f(A) = (1, \infty)$$

sınırsızdır. Buradaki fark, A 'nın kapanışı olan $[0, 1]$ aralığında f 'nin tanımlı olmamasıdır; ispatımız tam da A 'yı kapalı ve sınırlı bir aralığa gömebilmeye dayanıyordu.

■

Alıştırma 38.4 (Sınırlı ve Sürekli Olmak Düzgün Süreklilik Getirir mi?). Aşağıdaki iddianın doğru mu yanlış mı olduğuna karar veriniz. Doğruysa ispatlayınız, yanlışsa bir karşı örnek veriniz.

İddia. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve sürekliyse $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli (Tanım 36.1).

Çözüm.

İddia **yanlıştır**.

Karşı örnek. $f(x) = \sin(x^2)$ alalım.

- f sınırlıdır: her x için $|f(x)| \leq 1$.
- f sürekli: $x \mapsto x^2$ polinomu sürekli (Sonuç 33.2), $\sin$ sürekli (Önerme 33.4) ve sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli (Teorem 33.3).

Buna karşın f düzgün sürekli değildir. Bunu görmek için

$$x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \sqrt{2\pi n}$$

dizilerini alalım. Kareleri farkı sabittir, bu yüzden eşlenikle çarpınca

$$x_n - y_n = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{\pi/2}{x_n + y_n}$$

elde edilir. Burada $x_n + y_n > \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$ olduğundan

$$0 < x_n - y_n < \frac{\pi/2}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0,$$

yani sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) gereği $\lim(x_n - y_n) = 0$. Öte yandan

$$f(x_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0$$

olduğundan her n için

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

$\varepsilon_0 = 1$ seçilirse **Teorem 36.2**'nin ikinci koşulu sağlanır; dolayısıyla f düzgün sürekli değildir.

Neden bu örnek işliyor? Düzgün süreklilik, fonksiyonun **her yerde aynı hızla** değişmesini ister: tek bir δ , bütün nokta çiftleri için yeterli olmalıdır. $\sin(x^2)$ ise x büyüdükçe giderek daha sık salınır; 1 ile 0 değerleri arasındaki mesafeyi giderek daralan aralıklarda kat eder. Sınırlılık buna engel değildir, çünkü sınırlılık değerlerin nereye kadar çıktığını söyler, ne kadar hızlı değiştiğini söylemez.

Hipotez nerede kurtarır? Tanım kümesi kapalı ve sınırlı bir aralık olsaydı iddia doğru olurdu: **Teorem 36.3** gereği $[a, b]$ üzerinde sürekli her fonksiyon orada düzgün sürekli. Belirleyici olan yalnızca sınırlılık değil, tanım kümesinin kapalı **ve** sınırlı, yani kompakt olmasıdır. Sınırlı ama kapalı olmayan bir tanım kümesinde de karşı örnek yaşar: $(0, 1)$ aralığında

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

fonksiyonu sınırlı ve sürekli, ama

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}, \quad y_n = \frac{1}{2\pi n}$$

alınırsa $x_n - y_n \rightarrow 0$ iken her n için $|g(x_n) - g(y_n)| = 1$ kalır.

■

Alıştırma 38.5 (Tek Yönlü Sıralama Limiti Belirler mi?). Aşağıdaki iddianın doğru mu yanlış mı olduğuna karar veriniz. Doğruysa ispatlayınız, yanlışsa bir karşı örnek veriniz.

İddia. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 'dır.

Çözüm.

İddia **yanlıştır**.

Karşı örnek. $a_n = -1$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alalım. Her n için $-1 < 0 < \frac{1}{n}$, yani $a_n \leq b_n$ 'dir ve $\lim b_n = 0$ 'dır. Buna karşın (a_n) sabit dizisinin limiti -1 'dir, 0 değil.

Durum daha da kötüleşebilir: $a_n = -n$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alınırsa hipotezler yine sağlanır, ama (a_n) yakınsak bile değildir; $-\infty$ 'a ıraksar.

Karşı örnek neden işliyor? $a_n \leq b_n$ eşitsizliği (a_n) dizisini yalnızca **üstten** kısıtlar; aşağı yönde hiçbir engel koymaz. Sıkıştırma teoremi (**Teorem 21.6**) iki taraflı bir kuşatma ister: alttan da sıfıra giden bir dizi bulunmalıdır. Nitekim her n için $c_n \leq a_n \leq b_n$ ve $\lim c_n = \lim b_n = 0$ olsaydı sonuç doğru olurdu.

İddianın doğru sürümü. Hipoteze “ (a_n) yakınsaktır” eklenirse, sıralamanın limitte korunması (**Teorem 21.3**) yalnızca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

sonucunu verir; eşitlik değil, eşitsizlik. Yukarıdaki $a_n = -1$ örneği bu eşitsizliğin kesin olabileceğini gösterir.

■

38.3 Rasyonel ve İrrasyonel Noktalarda Ayrı Tanımlanan Bir Fonksiyon

Bu kısımdaki iki problem, tanımı $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ üzerinde farklı iki kurala ayrılan

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 5 - x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alır. Her iki problemde de belirleyici olan gözlem şudur: hem rasyoneller hem irrasyoneller $\mathbb{R}$ 'de yoğundur, dolayısıyla her noktanın her komşuluğunda fonksiyon iki kuralı da kullanır. Limit ancak iki kuralın o noktadaki değerleri çakışıyorsa var olabilir.

Alıştırma 38.6 (Dallı Fonksiyonun $x = 2$ Noktasındaki Limiti). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, x rasyonelken $f(x) = 2x - 1$, x irrasyonelken $f(x) = 5 - x$ olarak tanımlansın. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Adayı bulalım. İki kuralın $x = 2$ noktasındaki değerleri çıkarır:

$$2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad 5 - 2 = 3.$$

Bu yüzden limitin 3 olmasını bekleriz. Şimdi bunu tanımdan (Tanım 27.1) doğrulayalım.

Tek bir kestirim. $x \neq 2$ olsun ve iki durumu ayrı ayrı ölçelim. x rasyonelse

$$|f(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = 2|x - 2|;$$

x irrasyonelse

$$|f(x) - 3| = |5 - x - 3| = |2 - x| = |x - 2|.$$

$|x - 2| \leq 2|x - 2|$ olduğundan her iki durum tek bir eşitsizlikte toplanır:

$$|f(x) - 3| \leq 2|x - 2| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Kestirimin güzelliği, x 'in rasyonel mi irrasyonel mi olduğunu artık hiç sormamasıdır.

ε - δ argümanı. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alalım. $0 < |x - 2| < \delta$ ise

$$|f(x) - 3| \leq 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon.$$

Tanım gereği

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

Not. f bu noktada aynı zamanda süreklidir, çünkü $2 \in \mathbb{Q}$ olduğundan $f(2) = 3$ 'tür ve limit değeri fonksiyon değerine eşittir (Önerme 33.1). Alıştırma 38.7, 2'nin bu özelliğe sahip tek nokta olduğunu gösterecek.

■

Alıştırma 38.7 (Dallı Fonksiyonun Öteki Noktalarında Limit Yoktur). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, x rasyonelken $f(x) = 2x - 1$, x irrasyonelken $f(x) = 5 - x$ olarak tanımlansın. $a \neq 2$ olan her $a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

İki kural yalnızca $x = 2$ 'de çıkarır. $2a - 1 = 5 - a$ denklemi $3a = 6$, yani $a = 2$ verir. Dolayısıyla $a \neq 2$ iken

$$2a - 1 \neq 5 - a.$$

Noktaya yaklaşan iki dizi kuralım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a < a + \frac{1}{n}$ olduğundan:

- Teorem 13.5 gereği $a < r_n < a + \frac{1}{n}$ olan bir $r_n \in \mathbb{Q}$ vardır;
- Teorem 13.6 gereği $a < s_n < a + \frac{1}{n}$ olan bir irrasyonel s_n vardır.

Kurulan eşitsizlikler

$$a < r_n < a + \frac{1}{n}, \quad a < s_n < a + \frac{1}{n}$$

biçimindedir. Soldaki sabit a dizisi ile sağdaki $a + \frac{1}{n}$ dizisi a 'ya yakınsadığından sıkıştırma teoremi (Teorem 21.6) gereği $r_n \rightarrow a$ ve $s_n \rightarrow a$ olur; ayrıca her iki dizinin de bütün terimleri a 'dan farklıdır.

Görüntü dizilerinin limitleri ayrışır. r_n rasyonel, s_n irrasyonel olduğundan

$$f(r_n) = 2r_n - 1, \quad f(s_n) = 5 - s_n$$

olur. Teorem 21.1 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 2a - 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = 5 - a.$$

Sonuç. $a \neq 2$ olduğundan bu iki limit farklıdır. a 'ya yakınsayan ve a 'dan farklı terimli iki dizi, farklı görüntü limitleri verdiği için **Sonuç 28.1** gereği $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **yoktur**.

Alıştırma 38.6 ile birlikte tablo tamamlanır: f yalnızca $x = 2$ noktasında limite sahiptir ve yalnızca orada süreklidir; diğer her noktada süreksizdir.

■

38.4 Limit Hesapları

Aşağıdaki dört limit, dört ayrı tekniği örnekler: belirsizliği eşlenik çarpanla açmak, tek yönlü yaklaşımda parça parça tanımlı bir ifadeyi sadeleştirmek, sonsuzdaki davranışı baskın terimle karşılaştırmak ve salınan bir çarpanı sıkıştırmayla etkisiz kılmak.

Alıştırma 38.8 (Eşlenik Çarpanla Açılan Belirsizlik).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Fonksiyon $x > -1$ ve $x \neq 0$ için tanımlıdır; 0 noktası bu kümenin bir yığılma noktasıdır. $x \rightarrow 0$ iken pay ve payda birlikte sıfıra gider, yani $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır; limit kurallarını doğrudan uygulayamayız.

Eşlenikle genişletelim. $0 < |x| < 1$ olsun. $\sqrt{x+1} + 1 > 0$ olduğundan pay ve paydayı bu çarpanla çarpabiliriz:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)}.$$

Payda x kalır ve $x \neq 0$ olduğundan sadeleşir:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}.$$

Limite geçelim. Sağdaki ifade 0'ın delinmiş bir komşuluğunda ilk ifadeyle çakıştığından limitleri aynıdır (**Önerme 29.1**). Karekök fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde süreklidir (**Önerme 33.3**) ve $x \mapsto x + 1$ ile bileşkesi de süreklidir (**Teorem 33.3**); bu yüzden $x \rightarrow 0$ iken $\sqrt{x+1} \rightarrow 1$ ve payda $2 \neq 0$ değerine gider. Bölme kuralı (**Teorem 29.2**) uygulanabilir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Neden eşlenik? Belirsizliğin kaynağı, payın $x = 0$ 'da sıfırlanmasıydı. Eşlenikle çarpmak payı $(x+1) - 1 = x$ 'e çevirir; böylece paydaki ve paydadaki x çarpanları sadeleşir ve geriye 0'da sorunsuz bir ifade kalır.

■

Alıştırma 38.9 (Taban Fonksiyonu İçeren Sol Limit).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 2}{|x - 2| \lfloor x - 2 \rfloor}$$

limitini inceleyiniz. Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ taban (tam değer) fonksiyonudur (**Tanım 12.1**); Türkçe literatürde aynı fonksiyon için $\llbracket x \rrbracket$ gösterimi de kullanılır.

Çözüm.

Paydayı sol yaklaşımda sadeleştiririm. $1 < x < 2$ olsun. O zaman

$$-1 < x - 2 < 0$$

olduğundan taban fonksiyonunun tanımı gereği $\lfloor x - 2 \rfloor = -1$ 'dir. Ayrıca $x - 2 < 0$ olduğundan $|x - 2| = 2 - x$ 'tir. Demek ki bu aralıkta payda

$$|x - 2| \lfloor x - 2 \rfloor = (2 - x)(-1) = x - 2$$

olur; özel olarak payda sıfırdan farklıdır ve fonksiyon $(1, 2)$ aralığında tanımlıdır. Böylece $1 < x < 2$ için

$$g(x) := \frac{2x - 2}{|x - 2| \lfloor x - 2 \rfloor} = \frac{2x - 2}{x - 2}.$$

Davranışı okuyalım. $x \rightarrow 2^-$ iken pay $2 \cdot 2 - 2 = 2$ sayısına, yani pozitif bir değere yaklaşır; payda ise sıfıra **negatif taraftan** yaklaşır. Pozitif bir sayıyı mutlak değerce küçülen negatif sayılara bölmek, mutlak değerce büyüyen negatif sonuçlar verir. Beklentimiz $-\infty$ 'dur; şimdi bunu tanımdan gösterelim. **Tanımdan doğrulama.** $M > 0$ verilsin. $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{M}\}$ alalım ve $2 - \delta < x < 2$ olsun. $\delta \leq \frac{1}{2}$ olduğundan $x > \frac{3}{2}$, dolayısıyla

$$2x - 2 > 1 > 0.$$

Ayrıca $0 < 2 - x < \delta$ 'dir. Paydayı $x - 2 = -(2 - x)$ biçiminde yazıp bu iki bilgiyi birleştirelim:

$$g(x) = -\frac{2x - 2}{2 - x} < -\frac{1}{2 - x} < -\frac{1}{\delta} \leq -M.$$

(İlk eşitsizlikte $2x - 2 > 1$ ve $2 - x > 0$, ikincisinde $0 < 2 - x < \delta$ kullanıldı.) Demek ki her $M > 0$ için uygun bir $\delta > 0$ bulunmaktadır; **Tanım 32.1**'un tek yönlü sürümü gereği

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 2}{|x - 2| \lfloor x - 2 \rfloor} = -\infty.$$

Sonucun okunuşu. Limit **reel bir sayı olarak yoktur**; fonksiyon 2'ye soldan yaklaşırken $-\infty$ 'a ıraksar. Taban fonksiyonunun katkısı yalnızca bir işaret çarpanıdır: sağdan yaklaşımda $0 < x - 2 < 1$ olduğundan $\lfloor x - 2 \rfloor = 0$ olur ve ifade tanımsız kalır; bu yüzden soru yalnızca sol limit için anlamlıdır. ■

Alıştırma 38.10 (Sonsuzda Kök ile Birinci Derecenin Yarışı).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 2}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Kaba bir kestirim yeter. $x > 0$ olsun. Payda $x + 2 > x > 0$ olduğundan kesir küçülür:

$$0 < \frac{\sqrt{x}}{x + 2} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Sağdaki ifade sıfıra gider. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ise $\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}$ ve buradan $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ olur. Demek ki

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Sıkıştırılalım. Sabit 0 fonksiyonu ile $\frac{1}{\sqrt{x}}$ arasında kalan ifademiz, sonsuzdaki limitler için sıkıştırma kuralı (**Teorem 32.2**, 2. madde) gereği aynı limite sahiptir:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 2} = 0.$$

Yorum. Payda birinci derecedendir, pay ise $\sqrt{x} = x^{1/2}$ mertebesinde. Büyük x için x , $\sqrt{x}$ 'ten çok daha hızlı büyür; kesir bu yüzden sıfıra iner. Aynı sonuç pay ve paydayı x 'e bölerek de görülür: kesir $\frac{1/\sqrt{x}}{1+2/x}$ biçimini alır, payı 0'a, paydası 1'e gider.

■

Alıştırma 38.11 (Salınımı Bastıran Üstel Çarpan).

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \sin \frac{1}{x}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.

Fonksiyon $x \neq 0$ için tanımlıdır. İki çarpanı ayrı ayrı incelemek gerekir: $\sin \frac{1}{x}$ çarpanı $x \rightarrow 0$ iken -1 ile 1 arasında sonsuz kez salınır ve limiti yoktur; buna karşın üstel çarpan sıfıra gider. Salınan ama **sınırlı** bir çarpan, sıfıra giden bir çarpanla çarpıldığında sonuç sıfırdır.

Adım 1: Üstel çarpan için bir üst sınır. Önce her $t \geq 0$ için

$$e^t \geq 1 + t$$

olduğunu görelim: Bernoulli eşitsizliği (Teorem 9.5) $h = \frac{t}{n} \geq 0$ ile

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \geq 1 + t$$

verir; $n \rightarrow \infty$ için sol yan Tanım 23.2 gereği e^t 'ye yakınsar ve sıralama limitte korunur (Teorem 21.3). Şimdi $x \neq 0$ için $t = \frac{1}{x^2} > 0$ alalım. Yukarıdaki eşitsizlik

$$e^{1/x^2} \geq 1 + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^2}$$

verir. Üstel fonksiyonun $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ kuralıyla eşitsizliği ters çevirirsek

$$0 < e^{-1/x^2} < x^2.$$

Adım 2: Üstel çarpanın limiti. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ olduğundan, sıfır ile x^2 arasında sıkışan ifade için sıkıştırma teoremi (Teorem 30.5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0$$

sonucunu verir.

Adım 3: Sınırlı çarpanı ekleyelim. Her $x \neq 0$ için $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ olduğundan ikinci çarpan 0'ın her delinmiş komşuluğunda sınırlıdır. Teorem 30.3 gereği

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Aynı sonuç doğrudan sıkıştırmayla. Adım 1'deki sınırı kullanarak

$$0 \leq \left| e^{-1/x^2} \sin \frac{1}{x} \right| \leq e^{-1/x^2} < x^2$$

yazılır; $x^2 \rightarrow 0$ olduğundan mutlak değer limiti 0'dır ve Sonuç 30.1 ile fonksiyonun limiti de 0 çıkar.

■

38.5 Ara Değer Teoreminin Bir Uygulaması

Bir denklemin çözümünün **var olduğunu** göstermek, çözümü bulmaktan çoğu zaman daha kolaydır. Yöntem hep aynıdır: iki tarafın farkını bir yardımcı fonksiyon olarak tanımla, bu fonksiyonun uçlarda zıt

işaretleli değerler aldığını göster, sonra ara değer teoremine (Teorem 35.2) ya da onun sıfır yeri sürümüne (Teorem 35.1) başvuru.

Alıştırma 38.12 (Yarım Birim Kaydırmada Eşit Değer). $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $f(0) = f(1)$ olsun.

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in [0, \frac{1}{2}]$ noktasının var olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Yardımcı fonksiyon. $x \in [0, \frac{1}{2}]$ için $x + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [0, 1]$ olduğundan

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$$

kuralı $[0, \frac{1}{2}]$ üzerinde iyi tanımlıdır. İspatlamak istediğimiz şey, g 'nin bu aralıkta bir sıfırı olduğudur. **g sürekli.** $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ birinci dereceden bir polinom olduğundan sürekli (Sonuç 33.2) ve görüntüsü $[0, 1]$ içinde kalır; f ile bileşkesi Teorem 33.3 gereği sürekli. İki sürekli fonksiyonun farkı da sürekli (Teorem 33.2).

Uçlardaki değerler birbirinin tersidir. Doğrudan hesaplayalım:

$$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0),$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$f(0) = f(1)$ varsayımını ikinci satırda kullanırsak

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0).$$

İki durum.

Birinci durum: $g(0) = 0$ ise $c = 0$ aranan noktadır, çünkü o zaman $f(0) = f(\frac{1}{2})$ olur.

İkinci durum: $g(0) \neq 0$ olsun. O zaman

$$g(0) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) = -(g(0))^2 < 0,$$

yani g aralığın iki ucunda zıt işaretleli değerler alır. g sürekli olduğundan Teorem 35.1 gereği $g(c) = 0$ olan bir $c \in (0, \frac{1}{2})$ vardır.

Her iki durumda da $c \in [0, \frac{1}{2}]$ bulunur ve $g(c) = 0$, yani

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

olur.

Yorum. Sonuç, grafiğin üzerinde tam olarak $\frac{1}{2}$ uzunluğunda yatay bir kiriş bulunabileceğini söyler: uçları aynı yükseklikte olan bir eğri, yarım birimlik bir kaydırmada değerini bir kez tekrarlamak zorundadır. Benzer bir akıl yürütmeye aynı sonuç $\frac{1}{n}$ biçimindeki her uzunluk için de elde edilir; buna karşın $\frac{2}{5}$ gibi $\frac{1}{n}$ biçiminde olmayan bir uzunluk için iddia genel olarak doğru değildir.

■